



LYCÉE INTERNATIONAL FRANÇAIS

**SAINT
EXUPÉRY**

BRAZZAVILLE CONGO

2025

ANNALES DU BAC

MATHÉMATIQUES

Géométrie dans l'espace

Exercices extraits du site de l'APMEP

PAR VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

SUJETS ET CORRIGÉS
54 PAGES

SOMMAIRE

• Exercice 1 (Amérique du Nord 21 mai 2025)	page 4
Solution de l'exercice 1	page 21
• Exercice 2 (Amérique du Nord 22 mai 2025)	page 4
Solution de l'exercice 2	page 23
• Exercice 3 (Amérique du Nord - sujet 2 secours - 22 mai 2025)	page 5
Solution de l'exercice 3	page 25
• Exercice 4 (Asie 11 juin 2025 - sujet 1)	page 6
Solution de l'exercice 4	page 27
• Exercice 5 (Asie 12 juin 2025 - sujet 2)	page 7
Solution de l'exercice 5	page 28
• Exercice 6 (Centres étrangers 12 juin 2025 - sujet 1)	page 7
Solution de l'exercice 6	page 30
• Exercice 7 (Centres étrangers 13 juin 2025 - sujet 2)	page 8
Solution de l'exercice 7	page 31
• Exercice 8 (Métropole 17 juin 2025 - sujet 1)	page 9
Solution de l'exercice 8	page 32
• Exercice 9 (Polynésie 17 juin 2025 - sujet 1)	page 10
Solution de l'exercice 9	page 34
• Exercice 10 (Métropole 18 juin 2025 - sujet 2)	page 11
Solution de l'exercice 10	page 36
• Exercice 11 (Polynésie 18 juin 2025 - sujet 2)	page 12
Solution de l'exercice 11	page 38
• Exercice 12 (Asie 5 septembre 2025 - sujet 1)	page 13
Solution de l'exercice 12	page 40
• Exercice 13 (Métropole 9 septembre 2025 - sujet 1)	page 15
Solution de l'exercice 13	page 43
• Exercice 14 (Métropole 10 septembre 2025 - sujet 2)	page 16
Solution de l'exercice 14	page 46
• Exercice 15 (Amérique du Sud 13 novembre 2025 - sujet 1)	page 17
Solution de l'exercice 15	page 48
• Exercice 16 (Amérique du Sud 14 novembre 2025 - sujet 2)	page 18
Solution de l'exercice 16	page 50
• Exercice 17 (Nouvelle-Calédonie 20 novembre 2025 - sujet 1)	page 19
Solution de l'exercice 17	page 52
• Exercice 18 (Nouvelle-Calédonie 21 novembre 2025 - sujet 2)	page 20
Solution de l'exercice 18	page 54

EXERCICE 1

Amérique du Nord - sujet 1 - 21 mai 2025

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - 6t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

On considère également les points suivants :

- A(3 ; -3 ; -2)
- B(5 ; -4 ; -1)
- C le point de la droite (d) d'abscisse 2
- H le projeté orthogonal du point B sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3z - 7 = 0$

Affirmation 1

La droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

Affirmation 2

Le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne :

$$x + 3z + 3 = 0$$

Affirmation 3

Une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\frac{\pi}{6}$.

Affirmation 4

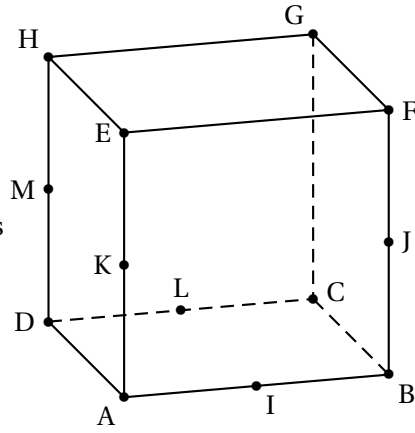
La distance BH est égale à $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

EXERCICE 2

Amérique du Nord - sujet 2 - 22 mai 2025

PARTIE A

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.
Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].



Affirmation 1 : « $\overrightarrow{JH} = 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB}$ »

Affirmation 2 : « Le triplet de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AG})$ est une base de l'espace. »

Affirmation 3 : « $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = -\frac{1}{4}$. »

PARTIE B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$
- les points A(2 ; 0 ; -1) et B(5 ; -3 ; 7)

Affirmation 4 : « Le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AB) sont parallèles. »

Affirmation 5 : « Le plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ passant par B a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$ »

Affirmation 6 : « La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\frac{\sqrt{14}}{2}$. »

On note (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -12 + 2k \\ y = 6 \\ z = 3 - 5k \end{cases}, \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Affirmation 7 : « Les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires. »

EXERCICE 3

Amérique du Nord - sujet 2 secours - 22 mai 2025

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.

On considère la droite D qui a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

et le plan P qui a pour équation cartésienne : $2x - 3y + z - 6 = 0$.

1. **Affirmation :** La droite D' , qui a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - 6t \\ z = 9 - 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ est parallèle à la droite } D.$$

2. On admet que les points $A(-2 ; 3 ; 1)$, $B(1 ; 3 ; -4)$ et $C(6 ; 3 ; 9)$ ne sont pas alignés.

Affirmation : La droite D est orthogonale au plan défini par les trois points A , B et C .

3. **Affirmation :** La droite D est sécante avec la droite Δ qui a pour représentation

paramétrique : $\begin{cases} x = -4 + 2t' \\ y = 1 - 3t' \\ z = 2 + t' \end{cases} t' \in \mathbb{R}$

4. **Affirmation :** Le point $F(-3 ; -3 ; 3)$ est le projeté orthogonal du point $E(-5 ; 0 ; 2)$ sur le plan P .

5. **Affirmation :** Il existe exactement une valeur du paramètre réel a telle que le plan P' d'équation $-3x + y - a^2z + 3 = 0$ soit parallèle à la droite D .

Note du rédacteur « pour certaines questions, il est indispensable que le repère soit orthonormé. »

EXERCICE 4

Asie 11 juin 2025 - sujet 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- α un réel quelconque ;
- les points $A(1 ; 1 ; 0)$, $B(2 ; 1 ; 0)$ et $C(\alpha ; 3 ; \alpha)$;
- (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Pour toutes les valeurs de α , les points A , B et C définissent un plan et un vecteur normal à ce plan est $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Affirmation 2 : Il existe exactement une valeur de α telle que les droites (AC) et (d) soient parallèles.

Affirmation 3 : Une mesure de l'angle $\widehat{OAB}$ est 135° .

Affirmation 4 : Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point $H(1; 2; 2)$.

Affirmation 5 : La sphère de centre O et de rayon 1 rencontre la droite (d) en deux points distincts.

On rappelle que la sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance r de Ω .

EXERCICE 5

Asie 12 juin 2025 - sujet 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $C(3; 0; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $H(-6; 2; 2)$ et $J\left(\frac{-54}{13}; \frac{62}{13}; 0\right)$;
- le plan P d'équation cartésienne $2x + 3y + 6z - 6 = 0$;
- le plan P' d'équation cartésienne $x - 2y + 3z - 3 = 0$;
- la droite (d) dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = -8 + \frac{1}{3}t \\ y = -1 + \frac{1}{2}t \\ z = -4 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : La droite (d) est orthogonale au plan P et coupe ce plan en H .

Affirmation 2 : La mesure en degré de l'angle $\widehat{DCH}$, arrondie à 10^{-1} , est $17,3^\circ$.

Affirmation 3 : Les plans P et P' sont sécants et leur intersection est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : Le point J est le projeté orthogonal du point H sur la droite (CD) .

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une seule réponse correcte. Aucune justification n'est demandée.

Dans tout l'exercice, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(-3; 1; 4)$ et $B(1; 5; 2)$
- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $4x + 4y - 2z + 3 = 0$
- la droite (d) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -6 + 3t \\ y = 1 \\ z = 9 - 5t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

1. Les droites (AB) et (d) sont :

- | | |
|-----------------------------------|---------------------|
| a. sécantes non perpendiculaires. | c. non coplanaires. |
| b. perpendiculaires. | d. parallèles. |

2. La droite (AB) est :

- a. incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
- b. strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.
- c. sécante et non orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
- d. orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

3. On considère le plan P' d'équation cartésienne $2x + y + 6z + 5 = 0$.

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont :

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------|
| a. sécants et non perpendiculaires. | c. confondus. |
| b. perpendiculaires. | d. strictement parallèles. |

4. On considère le point $C(0; 1; -1)$. La valeur de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré est :

- | | | | |
|---------------|---------------|---------------|--------------|
| a. 90° | b. 51° | c. 39° | d. 0° |
|---------------|---------------|---------------|--------------|

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

On considère les points $A(1; 0; 3)$, $B(-2; 1; 2)$ et $C(0; 3; 2)$.

1.
 - a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).
 - c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $-x + y + 4z - 11 = 0$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x - 3y + 2z - 9 = 0$ et le plan $\mathcal{P}'$ d'équation cartésienne $x - y - z + 2 = 0$.

2.
 - a. Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants. On note (d) leur droite d'intersection.
 - b. Déterminer si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.
3. Montrer que la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que le point $M(2; 1; 3)$ appartient aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. En déduire une représentation paramétrique de la droite (d) .
5. Montrer que la droite (d) est aussi incluse dans le plan (ABC).
Que peut-on dire des trois plans (ABC), $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$?

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les points $A(-1; 0; 5)$ et $B(3; 2; -1)$.
Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB).

2. On considère :

- la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$;
- la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z + 1 = 0$.

Affirmation 4 : La distance du point C(2 ; -1 ; 2) au plan $\mathcal{P}$ est égale à $2\sqrt{3}$.

EXERCICE 9

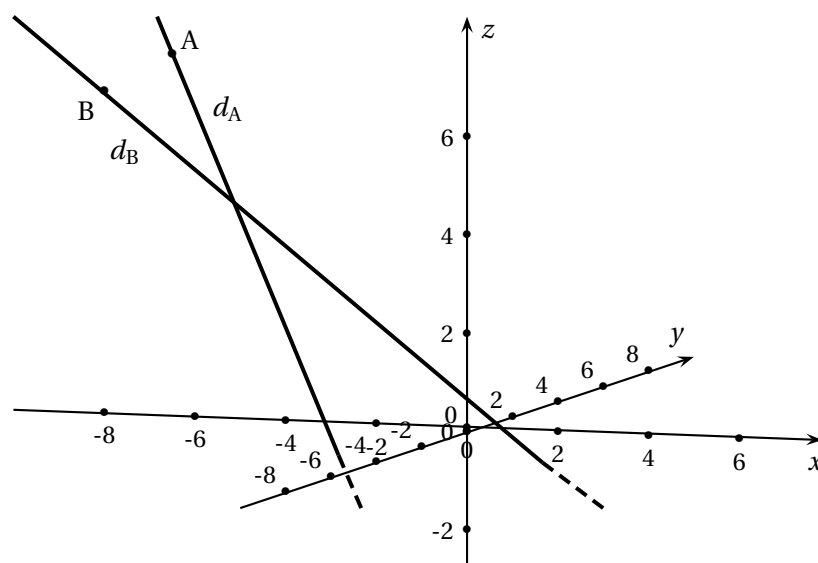
Polynésie 17 juin 2025 - sujet 1

Deux avions sont en approche d'un aéroport.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont l'origine O est le pied de la tour de contrôle, et le sol est le plan P_0 d'équation $z = 0$.

L'unité des axes correspond à 1 km.

On modélise les avions par des points.



L'avion Alpha transmet à la tour sa position en $A(-7 ; 1 ; 7)$ et sa trajectoire est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

L'avion Bêta transmet une trajectoire définie par la droite d_B passant par le point B dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = -5 + t \\ z = 11 - 4t \end{cases} \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

1. S'il ne dévie pas de sa trajectoire, déterminer les coordonnées du point S en lequel l'avion Bêta touchera le sol.
2.
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d_A caractérisant la trajectoire de l'avion Alpha.
 - b. Les deux avions peuvent-ils entrer en collision ?
3.
 - a. Démontrer que l'avion Alpha passe par la position $E(-3 ; -1 ; 1)$.
 - b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan P_E passant par E et perpendiculaire à la droite d_A est :

$$2x - y - 3z + 8 = 0.$$

- c. Vérifier que le point $F(-1 ; -3 ; 3)$ est le point d'intersection du plan P_E et de la droite d_B .
 - d. Calculer la valeur exacte de la distance EF, puis vérifier que cela correspond à une distance de 3 464 m, à 1 m près.
4. La réglementation aérienne stipule que deux avions en approche doivent être à tout instant à au moins 3 milles nautiques l'un de l'autre (1 mille nautique vaut 1 852 m).

Si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au même instant, leur distance de sécurité est-elle respectée ?

EXERCICE 10

Métropole 18 juin 2025 - sujet 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère :

- les points $A(-1 ; 2 ; 1)$, $B(1 ; -1 ; 2)$ et $C(1 ; 1 ; 1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d: \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R};$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d: \begin{cases} x = s \\ y = \frac{3}{2} + s \\ z = 3 - 2s \end{cases} \text{ avec } s \in \mathbb{R};$$

Partie A

- Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S(-\frac{1}{2}; 1; 4)$.
- Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
 - En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
$$x + 2y + 4z - 7 = 0.$$
- Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
- Démontrer que le point $H(-1; 0; 2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).
 - En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment $[CS]$. On a donc $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0; 1]$.

- Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k .
- Existe-t-il un point M sur le segment $[CS]$ tel que le triangle (MAB) soit rectangle en M ?

EXERCICE 11

Polynésie 18 juin 2025 - sujet 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points suivants :

$$A(1; 3; 0), \quad B(-1; 4; 5), \quad C(0; 1; 0) \quad \text{et} \quad D(-2; 2; 1).$$

- Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
- Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

3. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

b. Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$2x - y + z + 1 = 0.$$

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

4. On appelle H le point de coordonnées $(-\frac{2}{3} \ ; \ \frac{4}{3} \ ; \ \frac{5}{3})$.

Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}B \times h$, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est sa hauteur relative à cette base.

a. Montrer que $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

b. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

6. On considère la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 1 - 2k \\ y &= -3k \\ z &= 1 + k \end{cases} \text{ où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

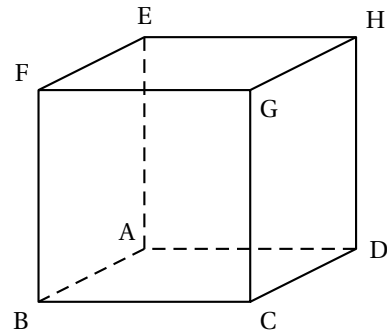
La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles?

EXERCICE 12

Asie 5 septembre 2025 - sujet 1

« Dans un triangle non équilatéral, la droite d'Euler est la droite qui passe par les trois points suivants :

- le centre du cercle circonscrit à ce triangle (cercle passant par les trois sommets de ce triangle).
- le centre de gravité de ce triangle situé à l'intersection des médianes de ce triangle.
- l'orthocentre de ce triangle situé à l'intersection des hauteurs de ce triangle ».



Le but de l'exercice est d'étudier un exemple de droite d'Euler.

On considère un cube ABCDEFGH de côté une unité.

L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

On note I le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [BG].

1. Donner sans justification les coordonnées des points A, B, G, I et J.
2.
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AJ).
 - b. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IG) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

- c. Démontrer que les droites (AJ) et (IG) sont sécantes en un point S de coordonnées $S\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
3.
 - a. Montrer que le vecteur $\vec{n}(0; -1; 1)$ est normal au plan (ABG).
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABG).
 - c. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que cette droite (d) coupe le plan (ABG) en un point L de coordonnées $L\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

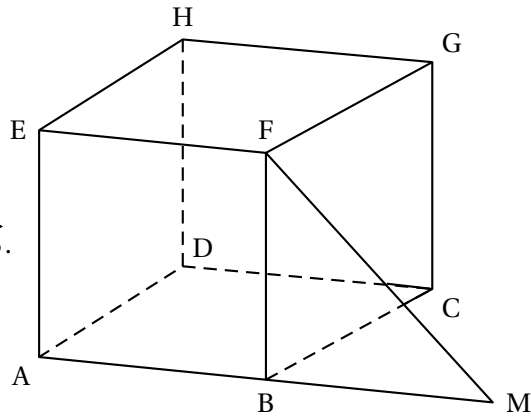
- d. Montrer que le point L est équidistant des points A, B et G.
4. Montrer que le triangle ABG est rectangle en B.
5.
 - a. Identifier le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABG (aucune justification n'est attendue).
 - b. Vérifier par un calcul que ces trois points sont effectivement alignés.

EXERCICE 13

Métropole 9 septembre 2025 - sujet 1

On considère le cube ABCDEFGH.

On place le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$.

**Partie A**

1. Montrer que les droites (FG) et (FM) sont perpendiculaires.
2. Montrer que les points A, M, G et H sont coplanaires.

Partie B

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{AH}$ et montrer qu'ils ne sont pas colinéaires.
2. a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (GM) est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

- b. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (AH) est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que le point d'intersection de (GM) et (AH), que l'on nommera N, a pour coordonnées (0 ; 2 ; 2).

3. a. Montrer que le triangle AMN est un triangle rectangle en A.
b. Calculer l'aire de ce triangle.
4. Soit J le centre de la face BCGF.
a. Déterminer les coordonnées du point J.
b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{FJ}$ est un vecteur normal au plan (AMN).

- c. Montrer que J appartient au plan (AMN). En déduire qu'il est le projeté orthogonal du point F sur le plan (AMN).
5. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre ou d'une pyramide est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h,$$

$\mathcal{B}$ étant l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Montrer que le volume du tétraèdre AMNF est le double du volume de la pyramide BCGFM.

EXERCICE 14

Métropole 10 septembre 2025 - sujet 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points

$$A(4; -1; 3), \quad B(-1; 1; -2), \quad C(0; 4; 5) \text{ et } D(-3; -4; 6).$$

1. a. Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés.

On admet qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $29x + 30y - 17z = 35$.

- b. Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires? Justifier.

On admet que lorsque quatre points ne sont pas coplanaires, il existe un unique point situé à égale distance de ces quatre points.

L'objectif de cet exercice est de déterminer le point H se situant à égale distance des quatre points A, B, C, D.

On définit le plan médiateur d'un segment comme le plan passant par le milieu de ce segment et orthogonal à la droite portant ce segment. C'est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

2. Soit P_1 le plan médiateur du segment [AB].

- a. Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].

- b. En déduire qu'une équation cartésienne de P_1 est : $5x - 2y + 5z = 10$.

3. On note P_2 le plan médiateur du segment [CD].

- a. Soit M un point du plan P_2 de coordonnées $(x; y; z)$.

Exprimer MC^2 et MD^2 en fonction des coordonnées de M.

En déduire qu'une équation cartésienne du plan P_2 est : $-3x - 8y + z = 10$.

- b. Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

4. Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= -2 - 1,9t \\ y &= t \text{ où } t \in \mathbb{R} \\ z &= 4 + 2,3t \end{cases}$$

Démontrer que Δ est la droite d'intersection de P_1 et P_2 .

On note P_3 le plan médiateur du segment $[AC]$.

On admet qu'une équation cartésienne du plan P_3 est : $8x - 10y - 4z = -15$.

5. Démontrer que la droite Δ et le plan P_3 sont sécants.

6. Justifier que le point d'intersection entre Δ et P_3 est le point H.

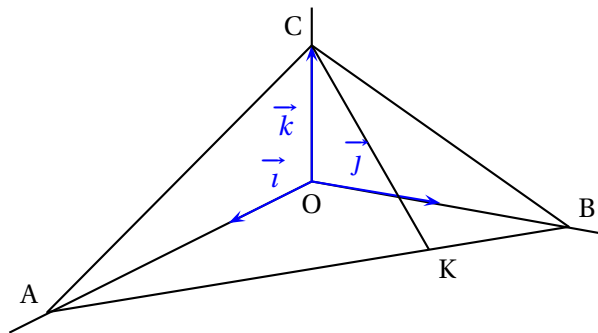
EXERCICE 15

Amérique du Sud 13 novembre 2025 - sujet 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points

$$A(2\sqrt{3}; 0; 0), \quad B(0; 2; 0), \quad C(0; 0; 1) \quad \text{et} \quad K\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 0\right).$$



1. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (CK) est :

$$\begin{cases} x &= \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y &= \frac{3}{2}t \\ z &= -t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2. Soit $M(t)$ un point de la droite (CK) paramétrée par un réel t .

Établir que $OM(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$.

3. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = OM(t)$.
 - a. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - b. En déduire la valeur de t pour laquelle f atteint son minimum.
4. En déduire que le point $H\left(\frac{\sqrt{3}}{8}; \frac{3}{8}; \frac{3}{4}\right)$ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK) .
5. Démontrer, à l'aide de l'outil produit scalaire, que le point H est l'orthocentre (intersection des hauteurs d'un triangle) du triangle ABC .
6.
 - a. Démontrer que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC) .
 - b. En déduire une équation du plan (ABC) .
7. Calculer, en unité d'aire, l'aire du triangle ABC .

EXERCICE 16

Amérique du Sud 14 novembre 2025 - sujet 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans toutes les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé.

1. On considère la droite Δ_1 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$ ainsi que la droite Δ_2 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4 + s \\ y = 2 + 2s \\ z = -1 + s \end{cases}$, où $s \in \mathbb{R}$.
 - a. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.
 - b. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales.
 - c. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont sécantes.
2. On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$, et le plan P d'équation cartésienne : $4x + 2y - z + 3 = 0$.
 - a. La droite d est incluse dans le plan P .

- b. La droite d est parallèle strictement au plan P .
 - c. La droite d est sécante au plan P .
3. On considère les points $A(3; 2; 1)$, $B(7; 3; 1)$, $C(-1; 4; 5)$ et $D(-3; 3; 5)$.
- a. Les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.
 - b. Les points A , B et C sont alignés.
 - c. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
4. On considère les plans Q et Q' d'équation cartésienne respective $3x - 2y + z + 1 = 0$ et $4x + y - z + 3 = 0$.
- a. Le point $R(1; 1; -2)$ appartient aux deux plans.
 - b. Les deux plans sont orthogonaux.
 - c. Les deux plans sont sécants avec pour intersection la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 7t + 4 \\ z = 11t + 7 \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.
-

EXERCICE 17

Nouvelle-Calédonie 20 novembre 2025 - sujet 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(4; -4; 4), \quad B(5; -3; 2), \quad C(6; -2; 3), \quad D(5; 1; 1)$$

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B .
2. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x - y - 8 = 0.$$

3. On note d la droite passant par le point D et orthogonale au plan (ABC) .
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .
 - b. On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) .
Déterminer les coordonnées du point H .
 - c. Montrer que $DH = 2\sqrt{2}$.
4. a. Montrer que le volume de la pyramide $ABCD$ est égal à 2.
On rappelle que le volume V d'une pyramide se calcule à l'aide de la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base de la pyramide et h la hauteur correspondante.

- b. On admet que l'aire du triangle BCD est égale à $\frac{\sqrt{42}}{2}$.

En déduire la valeur exacte de la distance du point A au plan (BCD).

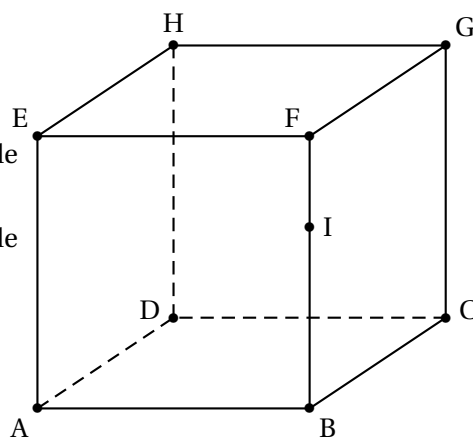
EXERCICE 18

Nouvelle-Calédonie 21 novembre 2025 - sujet 2

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1 et le point I défini par $\vec{FI} = \frac{1}{3}\vec{FB}$.

On pourra se placer dans le repère orthonormé de l'espace $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



1. On considère le triangle HAC.

Affirmation 1 : Le triangle HAC est un triangle rectangle.

2. On considère les droites (HF) et (DI).

Affirmation 2 : Les droites (HF) et (DI) sont sécantes.

3. On considère un réel α appartenant à l'intervalle $]0; \pi[$.

On considère le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \sin(\pi - \alpha) \\ \sin(-\alpha) \end{pmatrix}$.

Affirmation 3 : Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (FAC).

4. Le cube ABCDEFGH possède 8 sommets. On s'intéresse au nombre N de segments que l'on peut construire en reliant 2 sommets distincts quelconques du cube.

Affirmation 4 : $N = \frac{8^2}{2}$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 1

Amérique du Nord - sujet 1 - 21 mai 2025

Affirmation 1 : Vraie

(d) est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ et l'axe des ordonnées par $\vec{j}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les deux droites ont des vecteurs directeurs non colinéaires (ils sont même orthogonaux) donc les droites ne sont ni parallèles, ni confondues.

L'axe des ordonnées passe par l'origine du repère, de coordonnées (0 ; 0 ; 0) et est dirigé par $\vec{j}$ donc une représentation paramétrique de l'axe des ordonnées est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + s \\ z = 0 \end{cases}, \text{ où } s \in \mathbb{R}$$

(d) et l'axe des ordonnées seront donc coplanaires si et seulement si ces deux droites sont sécantes, c'est-à-dire si et seulement si le système suivant a une solution :

$$\begin{cases} 3 - 2t = 0 \\ -1 = s \\ 2 - 6t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = 3 \\ 6t = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1,5 \\ s = -1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Le système n'admet pas de solution, donc les droites n'ont pas de point commun.

Les droites ne sont ni parallèles, ni confondues, ni sécantes, par élimination, elles sont donc non coplanaires.

Affirmation 2 : Vraie

Soit $\mathcal{Q}$ plan passant par A et orthogonal à la droite (d).

(d) est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathcal{Q}$ et donc aussi $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ car $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et non nuls.

Le plan $\mathcal{Q}$ admet donc une équation de la forme $x + 0y + 3z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus, le point A appartient au plan $\mathcal{Q}$ donc $x_A + 3z_A + d = 0$ soit $3 + 3 \times (-2) + d = 0$.

On a donc $d = -3 + 6 = 3$.

Une équation cartésienne du plan passant par A et orthogonal à la droite (d) est donc : $x + 3z + 3 = 0$.

Affirmation 3 : Fausse

Afin de déterminer l'angle $\widehat{BAC}$ nous allons déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
Déterminons tout d'abord les coordonnées du point C :

C est un point de (d), il existe donc un réel t tel que : $\begin{cases} x_C = 3 - 2t \\ y_C = -1 \\ z_C = 2 - 6t \end{cases}$

Or C est le point d'abscisse 2, on a donc $x_C = 2$ d'où $3 - 2t = 2 \iff 1 = 2t$.

$$\iff t = \frac{1}{2}$$

On a donc $z_C = 2 - 6 \times \frac{1}{2} = 2 - 3 = -1$

Les coordonnées du point C sont donc $(2 ; -1 ; -1)$.

On peut donc calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{de même : } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous sommes dans un repère orthonormé, nous avons donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = -3$$

Calculons les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 1^2 = 6, \text{ donc, comme une norme est positive } \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6}.$$

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 1^2 = 6, \text{ donc, de même : } \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{6}.$$

$$\text{Or } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\text{on en déduit donc que : } -1 = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \cos(\widehat{BAC}),$$

$$\text{soit } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

et donc une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\frac{2\pi}{3}$.

Affirmation 4 : Vraie

Déterminons les coordonnées du point H.

H est le projeté orthogonal du point B sur la plan $\mathcal{P}$, c'est donc l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite Δ orthogonal au plan $\mathcal{P}$ passant par le point B.

Le vecteur $\overrightarrow{u'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, c'est donc un vecteur directeur

de la droite Δ .

De plus le point B(5 ; -4 ; -1) appartient à la droite Δ , une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -4 + 0t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

L'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathcal{P}$ donne l'équation en la variable t :

$$(5 + t) + 3(-1 + 3t) - 7 = 0 \iff 5 + t - 3 + 9t - 7 = 0$$

$$\iff 10t = 5$$

$$\iff t = \frac{1}{2}$$

Le point H d'intersection entre la droite Δ et $\mathcal{P}$ est le point de paramètre $t = \frac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de la droite Δ .

$$\text{Il a comme coordonnées : } H\left(5 + \frac{1}{2}; -4; -1 + 3 \times \frac{1}{2}\right) \text{ soit } H\left(\frac{11}{2}; -4; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{On a donc : } \overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où : } \|\overrightarrow{BH}\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4}, \text{ donc } \|\overrightarrow{BH}\| = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

La distance BH est égale à $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 2

Amérique du Nord - sujet 2 - 22 mai 2025

PARTIE A

Affirmation 1 : Vraie

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JH} &= \overrightarrow{JF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DH} + 2\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{DM} + 2\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

Affirmation 2 : Fausse

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$$

On peut exprimer $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$: les trois vecteurs sont coplanaires et donc le triplet de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AG})$ n'est pas une base de l'espace.

Affirmation 3 : Vraie

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} &= \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IK} \quad \text{car } \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{IK} \\ &= \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IA} \quad \text{car A est le projeté orthogonal de K sur la droite (AB)} \\ &= -\overrightarrow{IB} \times \overrightarrow{IA} \quad \text{car les vecteurs sont colinéaires de sens contraire} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \text{car l'arête est de longueur 1 et I est le milieu de l'arête [AB]} \\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

PARTIE B

Affirmation 4 : Fausse

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$, le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

On est dans un repère orthonormé donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 3 \times 2 + (-3) \times (-1) + 8 \times 3 = 6 + 3 + 24 \neq 0$$

Le vecteur normal au plan et le vecteur directeur de la droite ne sont pas orthogonaux donc le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AB) ne sont pas parallèles.

Affirmation 5 : Vraie

Méthode 1 :

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles donc le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal au plan $\mathcal{P}'$.

Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ est donc de la forme : $2x - y + 3z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus, le point B appartient au plan $\mathcal{P}'$ donc $2x_B - y_B + 3z_B + d = 0$

D'où $2 \times 5 + 3 + 3 \times 7 + d = 0$ donc $10 + 3 + 21 + d = 0$ ce qui équivaut à $d = -34$.

Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ est donc : $2x - y + 3z - 34 = 0$.

En multipliant par -1 on obtient l'équation donnée.

Méthode 2 :

Le plan $\mathcal{P}'$ a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$, le vecteur $\vec{n}' \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est

donc un vecteur normal au plan $\mathcal{P}'$.

$\vec{n}' = -\vec{n}$ donc les vecteurs normaux aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont colinéaires et donc les deux plans sont parallèles.

Vérifions si le point B appartient au plan $\mathcal{P}'$.

$$-2x_B + y_B - 3z_B + 34 = -2 \times 5 - 3 - 3 \times 7 + 34 = -10 - 3 - 21 + 34 = 0$$

Donc le point B appartient au plan $\mathcal{P}'$.

Donc le plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ passant par B a bien pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$.

Affirmation 6 : Vraie

La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est égale à la distance AH avec H projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$.

Déterminons les coordonnées du point H.

H est le projeté orthogonal du point A sur la plan $\mathcal{P}$, c'est donc l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite Δ orthogonale au plan $\mathcal{P}$ passant par le point A.

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, c'est donc un vecteur directeur de la droite Δ .

De plus le point A(2 ; 0 ; -1) appartient à la droite Δ , une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 0 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

L'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathcal{P}$ donne l'équation en la variable t :

$$2(2 + 2t) - (-t) + 3(-1 + 3t) + 6 = 0 \iff 4 + 4t + t - 3 + 9t + 6 = 0$$

$$\iff 14t = -7$$

$$\iff t = -\frac{1}{2}$$

Le point H d'intersection entre la droite Δ et $\mathcal{P}$ est le point de paramètre $t = -\frac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de la droite Δ .

Il a comme coordonnées : $H\left(2 - 2 \times \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1 - 3 \times \frac{1}{2}\right)$ soit $H\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$.

On a donc :

$$\vec{AH} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où : } \|\vec{AH}\|^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{14}{4}, \text{ donc } \|\vec{AH}\| = \sqrt{\frac{14}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Affirmation 7 : Fausse

(d) est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et la droite (AB) par $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Les deux droites ont des vecteurs directeurs non colinéaires donc les droites ne sont ni parallèles, ni confondues.

La droite (AB) passe par le point A et est dirigée par $\overrightarrow{AB}$ donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 0 - 3t \\ z = -1 + 8t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

(d) et (AB) seront donc coplanaires si et seulement si ces deux droites sont sécantes, c'est-à-dire si et seulement si le système suivant a une solution :

$$\begin{cases} 2 + 3t = -12 + 2k \\ -3t = 6 \\ -1 + 8t = 3 - 5k \end{cases} \iff \begin{cases} -4 = -12 + 2k \\ t = -2 \\ -17 = 3 - 5k \end{cases} \\ \iff \begin{cases} k = 4 \\ t = -2 \\ k = 4 \end{cases}$$

Le système admet une solution, donc les droites ont un point commun : le point de paramètre $t = -2$ de la droite (AB) ou le point de paramètre $k = 4$ de (d) c'est à dire le point C(-4 ; 6 ; -17).

Les droites (AB) et (d) sont donc sécantes et par conséquent coplanaires.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 3

Amérique du Nord - sujet 2 secours - 22 mai 2025

1. Affirmation : Vraie

Par simple lecture des systèmes de représentation paramétrique, on peut dire que

D est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et D' par $\vec{u}' \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$.

On remarque que : $\vec{u}' = -2\vec{u}$ donc les vecteurs directeurs sont colinéaires, et donc les deux droites sont parallèles entre elles.

2. Affirmation : Fausse

De façon générale, si A, B et C définissent un plan, alors D sera orthogonale au plan (ABC) si et seulement si son vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, classiquement $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

La **méthode classique** serait donc de déterminer les coordonnées de ces vecteurs, et d'en faire le produit scalaire avec $\vec{u}$.

Cela donne : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 3 - 3 \\ -4 - 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

On a (avec les coordonnées de $\vec{u}$ déterminées à la question 1.) le produit scalaire qui se calcule au moyen des coordonnées (on suppose que le repère est ortho-normé).

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 3 \times (-1) + 0 \times 3 + (-5) \times 4 = -23 \neq 0.$$

Comme ce produit scalaire n'est pas nul, pas besoin de calculer le second : on peut affirmer que D n'est pas orthogonale à (ABC), car elle n'est pas orthogonale à (AB) qui est une droite du plan (ABC).

Ici, on peut cependant adopter une **méthode différente** : on repère que les trois points A, B et C partagent la même ordonnée : 3, et sont réputés non alignés, donc le plan ABC est le plan d'équation $y = 3$, et un vecteur normal à (ABC) est le vecteur $\vec{j}$. Comme $\vec{j}$ est clairement non colinéaire à $\vec{u}$, alors on peut en déduire que D n'est pas orthogonale à (ABC).

3. Affirmation : Fausse

D est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et Δ est dirigée par $\vec{u}' \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui est clairement non col-

néaire à $\vec{u}$: les droites ne sont donc pas parallèles. Elles peuvent être soit sécantes, soit non coplanaires.

Pour trancher, cherchons s'il existe un couple de paramètres $(t; t')$ tel que le point de paramètre t sur D serait confondu avec le point de paramètre t' sur Δ , autrement dit : s'il existe un point commun aux deux droites.

On résout le système :

$$\begin{cases} 3 - t = -4 + 2t' \\ -2 + 3t = 1 - 3t' \\ 1 + 4t = 2 + t' \end{cases} \iff \begin{cases} -t = -7 + 2t' \\ -3 + 3t + 3t' = 0 \\ -1 + 4t - t' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 7 - 2t' \\ -3 + 3(7 - 2t') + 3t' = 0 \\ -1 + 4(7 - 2t') - t' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 7 - 2t' \\ -3 + 21 - 6t' + 3t' = 0 \\ -1 + 28 - 8t' - t' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 7 - 2t' \\ 3t' = 18 \\ 9t' = 27 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 7 - 2t' \\ t' = 6 \\ t' = 3 \end{cases}$$

Les équations du système sont incompatibles, donc le système n'a pas de solution, et les droites D et Δ n'ont aucun point commun : elle ne sont donc pas sécantes.

4. Affirmation : Vraie

Le point $F(-3; -3; 3)$ appartient au plan P car ses coordonnées vérifient l'équation du plan, en effet :

$$2x_F - 3y_F + z_F - 6 = 2 \times (-3) - 3 \times (-3) + 3 - 6 = -6 + 9 + 3 - 6 = 0.$$

De plus, $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -3 - (-5) \\ -3 - 0 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ce vecteur a les même coor-

données que le vecteur normal du plan que l'on peut obtenir par lecture de l'équation de P.

Ainsi, la droite (EF) est une droite orthogonale au plan P, telle que $F \in P$, donc F est bien le projeté orthogonal du point $E(-5; 0; 2)$ sur le plan P.

5. Affirmation : Fausse

Par lecture de l'équation de P' , celui-ci admet comme vecteur normal le vecteur

$$\vec{n} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -a^2 \end{pmatrix}. \text{ La droite D est toujours dirigée par } \vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Le produit scalaire $\vec{n} \cdot \vec{u}$ vaut : $\vec{n} \cdot \vec{u} = -3 \times (-1) + 1 \times 3 + (-a^2) \times 4 = 6 - 4a^2$.

D est parallèle à P' si et seulement si le vecteur directeur de D est un vecteur directeur de P' , c'est-à-dire si et seulement si le vecteur directeur de D est orthogonal à un vecteur normal à P' .

Autrement dit, D est parallèle à P' si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ donc si et seulement si $6 - 4a^2 = 0$ c'est à dire $a^2 = \frac{6}{4}$ soit $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ou $a = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

Il existe donc deux valeurs du paramètre réel a telle que le plan P' d'équation $-3x + y - a^2z + 3 = 0$ soit parallèle à la droite D.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 4

Asie 11 juin 2025 - sujet 1

Affirmation 1 : Fausse.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Quel que soit le réel α , ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, et ils définissent bien un plan.

Cependant, le repère étant orthonormé, on peut utiliser les coordonnées pour calculer un produit scalaire : $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{j} = (\alpha - 1) \times 0 + 2 \times 1 + \alpha \times 0 = 2$.

On constate que les vecteurs $\vec{j}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux, donc $\vec{j}$ n'est pas un vecteur normal au plan (ABC) : cette partie de l'affirmation est donc fausse.

Affirmation 2 : Fausse.

En interprétant le système de représentation paramétrique, la droite (d) est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On rappelle : $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Pour que les droites soient parallèles, il faudrait que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient proportionnels, or, ici, ils ont la même ordonnée, donc ils devraient être égaux.

Or, si on choisit α égal à 1, les altitudes seront égales, mais pas les abscisses, si on choisit α égal à 2, alors les abscisses seront égales, mais pas les altitudes, et, pour tout autre réel α , les abscisses et altitudes seront différentes entre les deux vecteurs.

Quel que soit le réel α , les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc non colinéaires, et les droites ne sont pas parallèles : l'affirmation est donc fausse.

Affirmation 3 : Vraie.

O étant l'origine du repère, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ sont celles du point A, donc celles de $\overrightarrow{AO}$ sont : $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On rappelle $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a donc, dans le repère orthonormé : $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 \times 1 + (-1) \times 0 + 0 \times 0 = -1$.
 Par ailleurs, on a : $AO = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, et $AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$.
 1. On a donc aussi : $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = AO \times AB \times \cos(\widehat{OAB}) = \sqrt{2} \cos(\widehat{OAB})$.
 En égalant les deux expressions du produit scalaire, il vient : $-1 = \sqrt{2} \cos(\widehat{OAB})$,
 ce qui équivaut à : $\cos(\widehat{OAB}) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.
 On reconnaît ici l'opposé du cosinus d'un angle de $\frac{\pi}{4}$, ce qui est donc le cosinus d'un angle de mesure $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, soit effectivement 135° .

Affirmation 4 : Fausse.

Avec les coordonnées données pour H et la représentation paramétrique de (d), pour avoir $x_H = 1 + t$, il faut avoir $t = 0$, et donc les ordonnées et altitudes ne correspondront pas : le point H n'est pas sur la droite (d), donc il n'est pas le projeté orthogonal de A sur (d).

Affirmation 5 : Vraie

Soit t un réel quelconque et M_t le point de paramètre t sur la droite (d).

La distance OM_t est donnée par :

$$OM_t = \sqrt{(1+t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2} = \sqrt{1+2t+t^2+4t^2+t^2} = \sqrt{6t^2+2t+1}.$$

$$\text{On a donc : } OM_t = 1 \iff \sqrt{6t^2+2t+1} = 1$$

$$\iff 6t^2+2t+1 = 1$$

$$\iff 6t^2+2t = 0$$

$$\iff 2t(3t+1) = 0$$

$$\iff 2t = 0 \quad \text{ou} \quad 3t+1 = 0$$

$$\iff t = 0 \quad \text{ou} \quad t = -\frac{1}{3}$$

L'équation a deux solutions, il y a donc exactement deux points de la droite (d) qui sont sur la sphère : les points de paramètre 0 et $-\frac{1}{3}$, l'affirmation est vraie.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 5

Asie 12 juin 2025 - sujet 2

D'après la représentation paramétrique donnée le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur di-

recteur de (d) et d'après l'équation cartésienne de P, $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

$\vec{n} = 6\vec{u}$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc (d) est orthogonale à P.

$$2x_H + 3y_H + 6z_H - 6 = 2 \times (-6) + 3 \times 2 + 6 \times 2 - 6 = 0 \text{ donc } H \in P.$$

$$H(-6; 2; 2) \in (d) \text{ s'il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} -6 = -8 + \frac{1}{3}t \\ 2 = -1 + \frac{1}{2}t \\ -4 = -4 + t \end{cases} \iff \begin{cases} -18 = -24 + t \\ 4 = -2 + t \\ 2 = -4 + t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6 = t \\ 6 = t \\ 6 = t \end{cases}$$

Conclusion : **l'affirmation 1 est vraie.**

Affirmation 2 :

$$\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD} = -9 \times (-3) + 2 \times 2 + 2 \times 0 = 31$$

Or par définition $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{CH}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos(\widehat{DCH})$

$$\text{On a } \|\overrightarrow{CH}\| = \sqrt{(-9)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{89} \text{ et } \|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{donc } \cos(\widehat{DCH}) = \frac{\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CH}\| \times \|\overrightarrow{CD}\|} = \frac{31}{\sqrt{89} \times \sqrt{13}}$$

$$\text{donc l'angle } \widehat{DCH} \text{ mesure } \arccos\left(\frac{31}{\sqrt{89} \times \sqrt{13}}\right) \approx 24,3^\circ \text{ donc l'affirmation 2 est fausse.}$$

Affirmation 3 : $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P ; $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P' .

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires donc les plans P et P' ne sont pas parallèles et sont donc sécants, leur intersection est une droite.

$A(3; 0; 0) \in \Delta$ (obtenu avec $t = 0$)

$$2x_A + 3y_A + 6z_A - 6 = 2 \times 3 + 3 \times 0 + 6 \times 0 - 6 = 0 \text{ donc } A \in P \text{ et } x_A - 2y_A + 3z_A - 3 = 3 - 2 \times 0 + 3 \times 0 - 3 = 0 \text{ donc } A \in P'$$

Donc l'intersection des plans P et P' est une droite contenant A . Pour déterminer si cette droite est Δ , soit on prend un autre point, soit on montre qu'un vecteur directeur de Δ est orthogonal à $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

$B(0; 0; 1) \in \Delta$ (obtenu avec $t = 1$)

$$2x_B + 3y_B + 6z_B - 6 = 2 \times 0 + 3 \times 0 + 6 \times 1 - 6 = 0 \text{ donc } B \in P \text{ et } x_B - 2y_B + 3z_B - 3 = 0 - 2 \times 0 + 3 \times 1 - 3 = 0 \text{ donc } B \in P' \text{ donc l'affirmation 3 est vraie.}$$

Affirmation 4 : $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de la droite (CD) est

$$\text{représentation paramétrique : } \begin{cases} x = 3 - 3s \\ y = 2s \\ z = 0 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

pour $s = \frac{31}{13}$ on retrouve les coordonnées de J donc $J \in (CD)$.

$$\text{de plus } \overrightarrow{HJ} \begin{pmatrix} \frac{24}{13} \\ \frac{36}{13} \\ -2 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{24}{13} \times (-3) + \frac{36}{13} \times 2 + (-2) \times 0 = 0$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{HJ}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux donc J est bien le projeté orthogonal de H sur (CD) donc **l'affirmation 4 est vraie.**

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 6

Centres étrangers 12 juin 2025 - sujet 1

1. Les droites (AB) et (d) sont : sécantes non perpendiculaires.

Un vecteur directeur de la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

est donc aussi un vecteur directeur de la droite (AB).

Un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u}' \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et (d) ne sont pas parallèles.

Le repère est orthonormé, on peut donc utiliser les coordonnées des vecteurs pour calculer le produit scalaire.

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 2 \times 3 + 0 \times 2 - 1 \times (-5) = 11 \neq 0$$

donc les droites (AB) et (d) ne sont pas perpendiculaires.

Une équation paramétrique de la droite (AB) de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par le point A(-3; 1; 4) est :

$$\begin{cases} x = -3 + 2s \\ y = 1 + 2s \\ z = 4 - s \end{cases} \quad \text{où } s \in \mathbb{R}.$$

Les deux droites sont sécantes si et seulement si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} -3 + 2s = -6 + 3t \\ 1 + 2s = 1 \\ 4 - s = 9 - 5t \end{cases} \iff \begin{cases} 2s - 3t = -3 \\ s = 0 \\ s - 5t = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} -3t = -3 \\ s = 0 \\ -5t = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ s = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Le système admet une unique solution donc les droites sont sécantes.

2. La droite(AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ soit le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

La droite (AB) est donc orthogonal au plan $\mathcal{P}$.

3. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}'$ est $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires donc les plans ne sont pas parallèles.

On est dans un repère orthonormé, on peut donc utiliser les coordonnées pour calculer le produit scalaire.

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 4 \times 2 + 4 \times 1 - 2 \times (-6) = 8 + 4 - 12 = 0$$

Les vecteurs normaux sont orthogonaux donc les plans sont perpendiculaires.

4. La valeur de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré est 51° .

On a : $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On est dans un repère orthonormé donc on peut utiliser les coordonnées pour calculer les longueurs et le produit scalaire.

Calculons le produit scalaire de ces deux vecteurs de deux manières différentes :

d'une part : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 4 + 0 \times 4 - 5 \times (-2) = 22$

d'autre part :

$$AC = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{34} \text{ et } AB = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\text{On a donc } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 6\sqrt{34} \cos(\widehat{BAC})$$

$$\text{D'où : } 22 = 6\sqrt{34} \cos(\widehat{BAC}), \text{ donc } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{22}{6\sqrt{34}}$$

$$\text{D'où } \widehat{BAC} \approx 51^\circ$$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 7

Centres étrangers 13 juin 2025 - sujet 2

1. a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car $\frac{-3}{-1} \neq \frac{1}{3}$.

Les points A , B et C ne sont pas alignés.

- b. D'après la question précédente, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base du plan (ABC) . Avec $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, on calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}$:

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 + 1 - 4 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + 3 - 4 = 0$. $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc il est normal à ce plan (ABC) .

- c. $\vec{n}$ étant normal au plan (ABC) , une équation cartésienne de ce plan est de la forme : $-x + y + 4z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

$$A(1; 0; 3) \in (ABC) \text{ donc } -1 + 0 + 12 + d = 0 \iff d = -11.$$

$$\text{Donc } (ABC) : -x + y + 4z - 11 = 0.$$

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x - 3y + 2z - 9 = 0$ et le plan $\mathcal{P}'$ d'équation cartésienne $x - y - z + 2 = 0$.

2. a. Le vecteur $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$, le vecteur $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}'$. Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires car $\frac{3}{1} \neq \frac{2}{-1}$. Donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont ni parallèles ni confondus. Ils sont donc sécants. Leur intersection est donc une droite (d) .

- b. $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3 + 3 - 2 = 4 \neq 0$ donc les plans ne sont pas perpendiculaires.

(d) est la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ dont les vecteurs normaux sont

respectivement $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour montrer que $\vec{u}$ dirige (d) , il suffit de prouver que ce vecteur est contenu dans chacun des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, soit $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}' = 0$

Or, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 1 \times (-3) = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}' = 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$.

Ainsi, (d) est bien dirigée par $\vec{u}$.

3. On remplace les coordonnées de M dans les deux équations de plans :

$$— 6 - 3 + 6 - 9 = 12 - 12 = 0 \text{ donc } M \in \mathcal{P};$$

$$— 2 - 1 - 3 + 2 = 4 - 4 = 0 \text{ donc } M \in \mathcal{P}'.$$

La droite (d) passe donc par M et a pour vecteur directeur $(d) : \vec{u}$ donc

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

4. On cherche l'intersection de (ABC) et de (d) . On résout le système :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \\ -x + y + 4z - 11 = 0 \end{cases} \quad . \text{ S'il admet une infinité de solutions alors } (d) \subset (ABC).$$

On remplace x , y et z dans la dernière équation :

$-x + y + 4z - 11 = 0 \Rightarrow -(2 + t) + 1 + t + 4 \times 3 - 11 = 0 \iff 0 = 0$. La dernière équation est vérifiée quelque soit la valeur de t . Donc ce système admet une infinité de solutions. $(d) \subset (ABC)$

Donc la droite (d) appartient aux trois plans (ABC) , $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Reprenons les trois

vecteurs normaux des trois plans : $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{n}_1$ ne sont pas colinéaires, de même pour $\vec{u}$ et $\vec{n}_2$. Le plan (ABC) n'est donc confondu ni avec $\mathcal{P}$ ni avec $\mathcal{P}'$. Ces trois plans sont simplement sécants, d'intersections (d) .

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 8

Métropole 17 juin 2025 - sujet 1

1. **Affirmation 1 : Vraie.**

La lecture de la représentation paramétrique donnée indique que la droite représentée :

— passe (pour le paramètre $t = 0$) par le point de coordonnées $(3 ; 2 ; -1)$, autrement dit par B;

— et qu'elle est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Comme on a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 2 - 0 \\ -1 - 5 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, on remarque que $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{u}$, donc la droite dont on a la représentation paramétrique est dirigée par un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Ainsi, la représentation paramétrique donnée est celle d'une droite passant par B et dirigée par $\overrightarrow{AB}$: c'est bien la droite (AB).

Affirmation 2 : Fausse.

Comme O est l'origine du repère, on a $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont clairement non colinéaires, et donc O, A et B définissent bien un plan. Le repère est orthonormal, donc on peut calculer des produits scalaires à l'aide des coordonnées :

On a bien : $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 5 \times (-1) + (-2) \times 0 + 1 \times 5 = -5 + 0 + 5 = 0$ et $\overrightarrow{n}$ est donc bien orthogonal à $\overrightarrow{OA}$,

par contre, on a : $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{OB} = 5 \times 3 + (-2) \times 2 + 1 \times (-1) = 15 - 4 - 1 = 10 \neq 0$ et $\overrightarrow{n}$ n'est donc pas orthogonal à $\overrightarrow{OB}$.

Ainsi, $\overrightarrow{n}$ n'est pas orthogonal au plan (OAB), car il n'est pas orthogonal à deux vecteurs définissant une base de ce plan.

2. Affirmation 3 : Fausse.

Par lecture des représentations paramétriques, les deux droites d et d' sont dirigées

respectivement par $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v'} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont clairement non colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles (ni confondues, ni strictement parallèles). Elles peuvent donc être soit sécantes, soit non coplanaires.

Cherchons s'il existe un couple $(k ; s)$ tel que le point de paramètre k sur d soit confondu avec le point de paramètre s sur d' , pour cela, résolvons :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 15 + k = 1 + 4s \\ 8 - k = 2 + 4s \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{cases} &\iff \begin{cases} k = -14 + 4s \\ 8 - (-14 + 4s) = 2 + 4s \\ -6 + 2(-14 + 4s) = 1 - 6s \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} k = -14 + 4s \\ 8 + 14 - 4s = 2 + 4s \\ -6 - 28 + 8s = 1 - 6s \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} k = -14 + 4s \\ 8s = 20 \\ 14s = 35 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} k = -14 + 4s \\ s = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \\ s = \frac{35}{14} = \frac{5}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} s = 2,5 \\ s = 2,5 \\ k = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système a une solution, donc les deux droites ont un point commun, le point qui a comme coordonnées $(11 ; 12 ; -14)$, c'est le point de paramètre $k = -4$ sur d et c'est aussi le point de paramètre $s = 2,5$ sur d' .

Elles sont donc sécantes en ce point, et donc sont coplanaires.

3. Affirmation 4 : Vraie.

Le repère est orthonormé, donc par lecture de l'équation de plan, P admet comme

vecteur normal $\vec{n'}$ de coordonnées : $\vec{n'} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, la droite Δ , passant par C et orthogonale à P aura pour représentation para-

métrique : $\begin{cases} x = 2 + l \\ y = -1 - l \\ z = 2 + l \end{cases}$ avec $l \in \mathbb{R}$.

Si on appelle H le projeté orthogonal de C sur P , alors $H = P \cap \Delta$. Donc H sera le point de Δ dont le paramètre fait que les coordonnées paramétriques vérifient l'équation de P .

On résout donc : $(2 + l) - (-1 - l) + (2 + l) + 1 = 0 \iff 3l + 6 = 0$

$$\iff 3l = -6$$

$$\iff l = -2$$

H est donc le point de paramètre $l = -2$ sur Δ , donc ses coordonnées sont :

$H(0 ; 1 ; 0)$.

La distance CH vaut donc : $CH = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - (-1))^2 + (0 - 2)^2}$

$$= \sqrt{4 + 4 + 4}$$

$$= \sqrt{4 \times 3}$$

$$= \sqrt{4} \times \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

La distance entre C et P , c'est-à-dire la distance de C à son projeté orthogonal sur P est donc bien égale à $2\sqrt{3}$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 9

Polynésie 17 juin 2025 - sujet 1

1. Le sol est le plan P_0 d'équation $z = 0$ donc l'avion touchera le sol lorsque $z = 0$, c'est à dire $11 - 4t = 0$ soit $t = \frac{11}{4}$.

Les coordonnées du point S sont donc : $\begin{cases} x = -11 + 5 \times \frac{11}{4} = \frac{11}{4} \\ y = -5 + \frac{11}{4} = -\frac{9}{4} \\ z = 0 \end{cases}$

S'il ne dévie pas de sa trajectoire, les coordonnées du point S en lequel l'avion Bêta touchera le sol sont : $\left(\frac{11}{4}; -\frac{9}{4}; 0\right)$.

2. a. L'avion Alpha transmet à la tour sa position en $A(-7; 1; 7)$ et sa trajectoire est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite d_A caractérisant la trajectoire

$$\text{de l'avion Alpha est donc : } \begin{cases} x = -7 + 2s \\ y = 1 - s \\ z = 7 - 3s \end{cases} \quad \text{où } s \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

- b. Les deux avions entreront en collision si leur deux trajectoires se coupent, c'est à dire si les droites d_A et d_B sont sécantes.

Cherchons s'il existe un couple $(t; s)$ tel que le point de paramètre t sur d_B soit confondu avec le point de paramètre s sur d_A , pour cela, résolvons :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -11 + 5t = -7 + 2s \\ -5 + t = 1 - s \\ 11 - 4t = 7 - 3s \end{cases} &\iff \begin{cases} -11 + 5(6 - s) = -7 + 2s \\ t = 6 - s \\ 11 - 4(6 - s) = 7 - 3s \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -11 + 30 - 5s = -7 + 2s \\ t = 6 - s \\ 11 - 24 + 4s = 7 - 3s \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 26 = 7s \\ t = 6 - s \\ 7s = 20 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} s = \frac{26}{7} \\ t = 6 - s \\ s = \frac{20}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Le système n'a pas de solution, donc les deux avions ne peuvent pas rentrer en collision.

3. a. L'avion Alpha passe par la position $E(-3; -1; 1)$ s'il existe un réel s tel que le point de paramètre s sur d_A ait pour coordonnées $(-3; -1; 1)$, pour cela, résolvons :

$$\begin{cases} -3 = -7 + 2s \\ -3 = 1 - s \\ 1 = 7 - 3s \end{cases} \iff \begin{cases} 4 = 2s \\ -4 = -s \\ -6 = -3s \end{cases} \iff \begin{cases} s = 2 \\ s = 2 \\ s = 2 \end{cases}$$

Le point $E(-3; -1; 1)$ correspond au point de paramètre $s = 2$ donc l'avion Alpha passe par le point E.

- b. Le plan P_E est perpendiculaire à la droite d_A dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan P_E .

Une équation cartésienne du plan P_E est donc de la forme : $2x - y - 3z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus, le point E appartient au plan P_E donc les coordonnées du point E vérifient l'équation du plan P_E , d'où : $2x_E - y_E - 3z_E + d = 0$ soit $2 \times (-3) - (-1) - 3 \times 1 + d = 0$;

on a donc $-6 + 1 - 3 + d = 0 \iff d = 8$

Conclusion : l'équation cartésienne du plan P_E est bien : $2x - y - 3z + 8 = 0$.

- c. Déterminons les coordonnées du point F, intersection du plan P_E et de la droite d_B .

Les coordonnées des points d'intersection sont solutions du système

$$\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = -5 + t \\ z = 11 - 4t \\ 2x - y - 3z + 8 = 0 \end{cases}$$

On cherche donc t qui vérifie $2(-11 + 5t) - (-5 + t) - 3(11 - 4t) + 8 = 0$ c'est-à-dire :

$$-22 + 10t + 5 - t - 33 + 12t + 8 = 0 \iff 21t = 42 \iff t = \frac{42}{21} = 2.$$

$$\text{On en déduit } \begin{cases} x = -11 + 5t = -11 + 5 \times 2 = -1 \\ y = -5 + t = -5 + 2 = -3 \\ z = 11 - 4t = 11 - 4 \times 2 = 11 - 8 = 3 \end{cases}$$

Le point d'intersection du plan P_E et de la droite d_B est le point F(-1 ; -3 ; 3).

- d. Le repère est orthonormé on peut donc utiliser les coordonnées pour calculer les distances.

$$EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 + (z_F - z_E)^2}$$

$$EF = \sqrt{(-1 - (-3))^2 + (-3 - (-1))^2 + (3 - 1)^2}$$

$$EF = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (2)^2}$$

$$EF = \sqrt{4 + 4 + 4}$$

$$EF = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

d'où $EF \approx 3,464$ km soit $EF \approx 3646$ m à 1 m près.

4. Si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au même instant, la distance les séparant est de 3646m soit environ $\frac{3646}{1215} \approx 1,97$ mille nautique.
Or $1,97 < 3$ donc leur distance de sécurité n'est pas respectée.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 10

Métropole 18 juin 2025 - sujet 2

Partie A

1. Les droites sont sécantes s'il existe un point dont les coordonnées vérifient les équations paramétriques des deux droites, donc s'il existe deux réels t et s donnant les mêmes coordonnées avec les deux systèmes d'équations, soit :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t = s \\ y = 2 + t = \frac{3}{2} + s \\ z = 3 - t = 3 - 2s \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{2} + 2t = s \\ 2 + t = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 2t \\ 3 - t = 3 - 2(\frac{3}{2} + 2t) \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{2} + 2t = s \\ 2 + t = 3 + 2t \\ 3 - t = -4t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{3}{2} + 2t = s \\ -1 = t \\ 3t = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{2} = s \\ -1 = t \\ t = -1 \end{cases}$$

Ces équations sont compatibles : les équations paramétriques de d et de (d') donnent respectivement avec $t = -1$ et $s = -\frac{1}{2}$ les mêmes coordonnées $(-\frac{1}{2}; 1; 4)$ du point commun à ces deux droites.

2. a. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : leurs premières coordonnées sont égales mais pas les autres

Or $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 - 6 + 4 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 2 + 0 = 0$.

Conclusion $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est un vecteur normal à ce plan.

b. Le résultat précédent montre que :

$$M(x; y; z) \in (ABC) \iff 1x + 2y + 4z + d = 0, d \in \mathbb{R}.$$

$$\text{En particulier } C(1; 1; 1) \in (ABC) \iff 1 + 2 + 4 + d = 0, d \in \mathbb{R} \iff d = -7.$$

$$\text{Finalement : } M(x; y; z) \in (ABC) \iff x + 2y + 4z - 7 = 0.$$

3. A, B et C définissant un plan, il suffit de montrer que S n'appartient pas à ce plan :

$$S(-\frac{1}{2}; 1; 4) \notin (ABC) \iff -\frac{1}{2} + 2 + 16 - 7 \neq 0 \iff \frac{21}{2} \neq 0 \text{ qui est bien vraie.}$$

4. a. Si H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC), alors $\overrightarrow{SH}$ est un vecteur normal au plan (ABC), donc colinéaire au vecteur $\vec{n}$.

$$\text{Or } \overrightarrow{SH} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Avec } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ on a bien } \vec{n} = -2\overrightarrow{SH}.$$

D'autre part on a ;

$$H(-1; 0; 2) \in (ABC) \iff -1 + 2 \times 0 + 4 \times 2 - 7 = 0 \text{ qui est vraie.}$$

Conclusion : le point H(-1 ; 0 ; 2) est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).

b. De $\overrightarrow{SH} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ on en déduit que $SH^2 = \frac{1}{4} + 1 + 4 = \frac{1}{4} + \frac{20}{4} = \frac{21}{4}$, d'où $SH = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Comme H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) on sait que la distance SH est la plus petite distance de S au plan. Pour tout autre point M distinct de H du plan (ABC), [SM] est l'hypoténuse du triangle rectangle SHM donc le côté le plus long de ce triangle et en particulier $SM > SH$, soit $SM > \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

1. Si $M(x; y; z)$, avec $\overrightarrow{CS} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, on a

$$\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CS} \iff \begin{cases} x-1 = -\frac{3}{2}k \\ y-1 = 0k \\ z-1 = 3k \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - \frac{3}{2}k \\ y = 1 \\ z = 1 + 3k \end{cases}$$

2. (MAB) est rectangle en M si :

(AM) et (BM) sont perpendiculaires soit si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

Avec $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2}k + 1 \\ \frac{1}{2} - 2 \\ 1 + 3k - 1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 2 - \frac{3}{2}k \\ -1 \\ 3k \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2}k - 1 \\ \frac{1}{2} + 1 \\ 1 + 3k - 2 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}k \\ \frac{3}{2} \\ 3k - 1 \end{pmatrix}$ le

produit scalaire s'écrit :

$$-\frac{3}{2}k \left(2 - \frac{3}{2}k \right) - 2 + 3k(3k - 1) = 0 \iff -3k + \frac{9}{4}k^2 - 2 + 9k^2 + \frac{9}{4}k^2 - 2 + 9k^2 - 3k = 0 \iff 9k^2 + 36k^2 - 24k - 8 = 0 \iff 45k^2 - 24k - 8 = 0.$$

Pour cette équation du second degré, on a

$$\Delta = 24^2 - 4 \times 45 \times (-8) = 2016 > 0.$$

L'équation a deux solutions :

$$k_1 = \frac{24 + \sqrt{2016}}{90} \approx 0,765 \text{ et } k_2 = \frac{24 - \sqrt{2016}}{90} \approx -0,232.$$

Seul $k_1 \in [0; 1]$.

Conclusion : il existe un seul point M_1 du segment [CS] tel que M_1AB est un triangle rectangle en M_1 .

Rem. Si on remplace k par la valeur trouvée ci-dessus, on trouve que $AB^2 = 14$, $AM_1^2 = 7$ et $BM_1^2 = 7$.

Le triangle M_1AB est un triangle rectangle ($7 + 7 = 14$), mais aussi isocèle.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 11

Polynésie 18 juin 2025 - sujet 2

1. On détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ont des coordonnées qui sont clairement non proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, et donc les trois points A, B et C ne sont pas alignés : ils déterminent bien un plan.

2. Comme le repère est orthonormal, en utilisant les coordonnées des vecteurs précédents, qui sont non nuls, on va calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times (-1) + 1 \times (-2) + 5 \times 0 = 2 - 2 + 0 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls, mais leur produit scalaire l'est, donc les droites (AB) et (AC) sont orthogonales, et donc le triangle ABC est bien rectangle en A.

3. a. Calculons le produit scalaire de $\vec{u}$ avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, ces deux vecteurs formant une base du plan (ABC).

$$- \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-2) + (-1) \times 1 + 1 \times 5 = -4 - 1 + 5 = 0;$$

$$- \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 1 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0;$$

$\vec{u}$ est donc orthogonal à deux vecteurs formant une base de (ABC), il est donc orthogonal à (ABC).

Toute droite dirigée par $\vec{u}$, et donc Δ , est donc orthogonale à (ABC).

- b. $\vec{u}$ est donc un vecteur normal au plan (ABC), d'après la question précédente. Par propriété, on en déduit qu'une équation de (ABC) est de la forme :

$$2x - y + z + d = 0 \quad \text{où } d \text{ est un réel.}$$

$$A \in (ABC) \iff 2x_A - y_A + z_A + d = 0$$

$$\iff 2 \times 1 - 3 + 0 + d = 0$$

$$\iff -1 + d = 0$$

$$\iff d = 1$$

Une équation de (ABC) est donc bien $2x - y + z + 1 = 0$.

- c. Δ contient D(-2 ; 2 ; 1) et est dirigée par $\vec{u}$, donc, par propriété, une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

4. Considérons M_t , le point de paramètre t sur la droite Δ .

$$M_t \in (ABC) \iff 2x_{M_t} - y_{M_t} + z_{M_t} + 1 = 0$$

$$\iff 2(-2 + 2t) - (2 - t) + (1 + t) + 1 = 0$$

$$\iff -4 + 4t - 2 + t + 1 + t + 1 = 0$$

$$\iff 6t - 4 = 0$$

$$\iff t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Δ n'a qu'un seul point sur (ABC) (c'est normal, comme elle est orthogonale au plan, elle est sécante au plan), c'est le point de paramètre $\frac{2}{3}$ dans la représentation, c'est-à-dire que c'est le point de coordonnées $\left(-2 + 2 \times \frac{2}{3}; 2 - \frac{2}{3}; 1 + \frac{2}{3}\right)$, soit $\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

On reconnaît les coordonnées du point H. H est donc l'intersection de Δ et (ABC), c'est donc l'intersection du plan (ABC) avec la droite passant par D et orthogonale à (ABC) : H est le projeté orthogonal de D sur (ABC).

5. a. On est dans un repère orthonormé :

$$\begin{aligned} DH &= \sqrt{\left(-\frac{2}{3} - (-2)\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{\sqrt{4 \times 6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

On arrive bien à la distance annoncée : $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

- b. Pour le tétraèdre ABCD, on va choisir comme base le triangle ABC, rectangle en A, et la hauteur correspondante, est donc la distance de H au plan (ABC), c'est-à-dire la distance DH.

Pour calculer B , l'aire de la base, on va utiliser comme base de ABC la longueur AB, et comme hauteur correspondante, la longueur AC (car ABC est rectangle en A).

$$\begin{aligned}\text{Donc : } B &= \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2} \times \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 0^2}}{2} = \frac{\sqrt{30} \times \sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{150}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{6}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Le volume du tétraèdre est donc : } V &= \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2}\sqrt{6} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{10}{3}\end{aligned}$$

Le volume du tétraèdre est donc de $\frac{10}{3} \approx 3,33$.

6. Par lecture de la représentation paramétrique de d , on peut dire que la droite d est

$$\text{dirigée par : } \vec{u}' \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

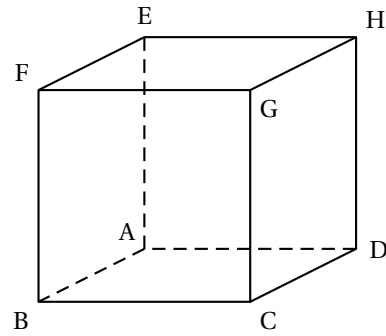
$$\begin{aligned}\text{Comme le repère est orthonormé, on a : } \vec{u} \cdot \vec{u}' &= 2 \times (-2) + (-1) \times -3 + 1 \times 1 \\ &= -4 + 3 + 1 = 0\end{aligned}$$

$\vec{u}'$ est orthogonal à $\vec{u}$ qui est lui-même un vecteur normal à (ABC). On en déduit que $\vec{u}'$ est un vecteur du plan (ABC). Ainsi, la droite d est une droite parallèle au plan (ABC).

Remarque : bien que ça ne soit pas demandé ici, on peut préciser : d passe par le point E de coordonnées (1;0;1). Ces coordonnées ne vérifiant pas l'équation de (ABC), on en déduit que E n'appartient pas au plan, et donc que d est strictement parallèle à (ABC) (elle n'est pas incluse dans le plan).

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 12

Asie 5 septembre 2025 - sujet 1



Le but de l'exercice est d'étudier un exemple de droite d'Euler.

On considère un cube ABCDEFGH de côté une unité.

L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

On note I le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [BG].

1. On donne les coordonnées des points A, B, G, I et J :

$$A(0, 0, 0); B(1, 0, 0); G(1, 1, 1); I\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right); J\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

2. a. La droite (AJ) est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AJ}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AJ}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{AM} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \\ z_M - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et celles de } \overrightarrow{AJ} \text{ sont } \begin{pmatrix} x_J - x_A \\ y_J - y_A \\ z_J - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AJ} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = k \\ y = \frac{k}{2} \\ z = \frac{k}{2} \end{cases}$$

$$\text{La droite (AJ) a donc pour représentation paramétrique } \begin{cases} x = k \\ y = \frac{k}{2} \\ z = \frac{k}{2} \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ est la représentation paramétrique d'une droite pas-}$$

sant par le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0, 0)$, c'est-à-dire le point I, et ayant le

vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

$$\overrightarrow{IG} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_G - x_I \\ y_G - y_I \\ z_G - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ est une représentation paramétrique de la droite (IG).}$$

c. Les droites (AJ) et (IG) sont sécantes si et seulement si on peut trouver un

couple de réels (k, t) tel que $\begin{cases} k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}k = t \\ \frac{1}{2}k = t \end{cases}$. On résout ce système.

$$\begin{cases} k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}k = t \\ \frac{1}{2}k = t \end{cases} \iff \begin{cases} k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ k = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ k = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{2}t = \frac{1}{2} \\ k = 2t \end{cases} \\ \iff \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc les droites (AJ) et (IG) sont sécantes. Pour $k = \frac{2}{3}$, on a $\begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}k = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}k = \frac{1}{3} \end{cases}$

Le point S d'intersection des droites (AJ) et (IG) a donc pour coordonnées $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

3. a. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(0; -1; 1)$.

$\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{AG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \times 1 + (-1) \times 0 + 1 \times 0 = 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{AB}$.
- $\vec{n} \cdot \vec{AG} = 0 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{AG}$.
- Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AG}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABG).

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABG), donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABG).

- b. Le plan (ABG) est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $\vec{AM}$ et $\vec{n}$ soient orthogonaux, c'est-à-dire tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

$$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff x \times 0 + y \times (-1) + z \times 1 = 0 \iff -y + z = 0$$

Le plan (ABG) a pour équation cartésienne : $-y + z = 0$.

- c. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par le point K de coordonnées $(\frac{1}{2}; 0; 1)$ est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

S'il existe, le point d'intersection de la droite (d) et du plan (ABG), est solution

$$\text{du système : } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -t \\ z = 1 + t \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

Il faut donc que : $-(-t) + (1 + t) = 0$ soit $2t + 1 = 0$ ou encore $t = -\frac{1}{2}$.

Pour $t = -\frac{1}{2}$, on a $x = \frac{1}{2}$, $y = -t = \frac{1}{2}$ et $z = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Donc la droite (d) coupe le plan (ABG) au point L de coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

- d. On calcule les distances LA, LB et LG.

$$\begin{aligned} LA^2 &= (x_A - x_L)^2 + (y_A - y_L)^2 + (z_A - z_L)^2 \\ &= \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ \text{donc } LA &= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ } LB^2 &= (x_B - x_L)^2 + (y_B - y_L)^2 + (z_B - z_L)^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ \text{donc } LB &= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ } LG^2 &= (x_G - x_L)^2 + (y_G - y_L)^2 + (z_G - z_L)^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ \text{donc } LG &= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Donc le point L est équidistant des points A, B et G.

4. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BG}$ donc le triangle ABG est rectangle en B.

5. a. Points remarquables du triangle ABG.

- (AJ) et (IG) sont deux médianes du triangle ABG et elles se coupent en S ; donc le point S est le centre de gravité du triangle ABG.
- Le point L est équidistant des points A, B et G donc c'est le centre du cercle circonscrit au triangle ABG.
- Le triangle ABG est rectangle en B donc B est son orthocentre.

b. $\overrightarrow{BS}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-1 \\ \frac{1}{3}-0 \\ \frac{1}{3}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 \\ \frac{1}{2}-0 \\ \frac{1}{2}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BL}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BS}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont colinéaires et donc les points B, S et L sont alignés.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 13

Métropole 9 septembre 2025 - sujet 1

Partie A

- Le point M est défini par $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$, donc il appartient à la droite (AB), et donc au plan (FAB). On en déduit que la droite (FM) est une droite incluse dans le plan (FAB).
— Le plan (FAB) contient la face ABFE du cube. Comme les faces du cube sont des carrés, on en déduit que la droite (FG) est perpendiculaire à la droite (EF) (via le carré EFGH) et à la droite (FB) (via le carré BCGF).
Ainsi, (FG) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (FAB) : on en déduit que (FG) est orthogonale au plan (FAB).

- Puisque (FG) est orthogonale à (FAB), elle est donc également orthogonale à toute droite du plan (FAB), notamment la droite (FM).
 - Comme F est un point d'intersection entre (FB) et (FM), les droites sont orthogonales et sécantes, on peut donc conclure que les droites sont bien perpendiculaires.
2. — On a déjà établi que M est sur la droite (AB), avec : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AB}$;
- Comme ABCDEFGH est un cube, on a notamment : $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$;
 - On en déduit donc : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{HG}$;
 - Les droites (AM) et (HG) sont dirigées par des vecteurs directeurs colinéaires, donc elles sont parallèles, et donc coplanaires ;
 - cela implique que les quatre points A, M, H et G sont également coplanaires.

Partie B

Le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace : les vecteurs de base sont deux à deux orthogonaux et de même norme, car ils sont basés sur les arêtes consécutives d'un cube.

On a alors les coordonnées : A(0 ; 0 ; 0) ; B(1 ; 0 ; 0) ; C(1 ; 1 ; 0) ; D(0 ; 1 ; 0) ; E(0 ; 0 ; 1) ; F(1 ; 0 ; 1) ; G(1 ; 1 ; 1) ; H(0 ; 1 ; 1) et M(2 ; 0 ; 0).

1. On a : $\overrightarrow{GM} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

et, comme A est l'origine du repère, les coordonnées de H sont aussi celles du vecteur $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ces coordonnées sont clairement non proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. a. (GM) passe par le point G de coordonnées (1 ; 1 ; 1) et est dirigée par $\overrightarrow{GM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de (GM) est donc :

$$\begin{cases} x = x_G + t\overrightarrow{GM} \\ y = y_G + t\overrightarrow{GM} \\ z = z_G + t\overrightarrow{GM} \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

- b. Cherchons s'il est possible qu'un point de paramètre t sur (GM) ait les mêmes coordonnées qu'un point de paramètre k sur (AH). Pour cela, résolvons le système :

$$S: \begin{cases} 1+t=0 \\ 1-t=k \\ 1-t=k \end{cases} \quad \text{on a : } S \iff \begin{cases} t=-1 \\ k=1-(-1) \\ k=1-(-1) \end{cases} \quad \text{Soit } S \iff \begin{cases} t=-1 \\ k=2 \\ k=2 \end{cases}$$

On en déduit que seul un point est commun aux deux droites, c'est le point de paramètre $t = -1$ sur (GM), qui est aussi le point de paramètre $k = 2$ sur (AH).

Qu'on utilise une représentation paramétrique ou l'autre pour trouver les coordonnées de N, on a bien : $N(1+(-1) ; 1-(-1) ; 1-(-1))$ c'est-à-dire $N(0 ; 2 ; 2)$.

3. a. On a : $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormal, on peut calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 2 \times 0 + 0 \times 2 + 0 \times 2 = 0$.

Les vecteurs sont donc orthogonaux, donc les droites (AM) et (AN) sont orthogonales (et sécantes en A), donc perpendiculaires :

Le triangle AMN est bien rectangle en A.

- b. Le repère est orthonormal donc on peut aussi calculer des longueurs avec les coordonnées :

$$AM = \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2, \quad AN = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Avec [AM] pour base, la hauteur correspondante est [AN] puisque le triangle est rectangle en A.

$$\text{On a donc : } \mathcal{A}_{AMN} = \frac{AM \times AN}{2} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

4. a. J est le centre de BCGF, donc notamment le milieu de [BG] :

$$J = \left(\frac{x_B + x_G}{2}; \frac{y_B + y_G}{2}; \frac{z_B + z_G}{2} \right), \quad \text{soit } J \left(\frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{0+1}{2} \right).$$

Finalement, les coordonnées de J sont : J(1 ; 0,5 ; 0,5).

b. On a : $\overrightarrow{FJ} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0,5-0 \\ 0,5-1 \end{pmatrix}$ soit : $\overrightarrow{FJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$.

$$\text{Vérifions : } \overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \times 2 + 0,5 \times 0 + (-0,5) \times 0 = 0.$$

$$\text{et, par ailleurs : } \overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \times 0 + 0,5 \times 2 + (-0,5) \times 2 = 0.$$

Donc $\overrightarrow{FJ}$ est orthogonal à deux vecteurs formant une base de (AMN) : c'est bien un vecteur normal au plan (AMN).

- c. Puisque $\overrightarrow{FJ}$ est normal à (AMN), on en déduit qu'(AMN) admet une équation de la forme : $0 \times x + 1 \times y + (-1) \times z + d = 0$, soit $y - z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

Comme A(0 ; 0 ; 0) est sur (AMN), ses coordonnées doivent vérifier l'équation, donc :

$$0 - 0 + d = 0 \iff d = 0.$$

Finalement, une équation de (AMN) est $y - z = 0$.

$$\text{En testant l'appartenance de J à (AMN) : } y_J - z_J = 0,5 - 0,5 = 0$$

Les coordonnées de J vérifient l'équation du plan, donc J appartient au plan (AMN).

Comme $\overrightarrow{FJ}$ est orthogonal au plan et que J est dans le plan, J est bien le projeté orthogonal de F sur (AMN).

5. Pour déterminer le volume du tétraèdre AMNF, on choisit comme base le triangle AMN, la hauteur correspondante étant [FJ].

$$\mathcal{V}_{AMNF} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times FJ \quad \text{où} \quad FJ = \sqrt{0^2 + 0,5^2 + 0,5^2} = \sqrt{0,5} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{On a donc : } \mathcal{V}_{AMNF} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}.$$

Pour la pyramide BCGFM, la base (seule face non triangulaire) le carré BCGF (carré de côté 1, donc d'aire 1), la hauteur étant la distance entre M et le plan (BCG).

Comme on a déjà établi que M est un point de (AB), et que ABCDEFGH est un cube, on en déduit que (BM) est perpendiculaire au plan (BCG) et que B est donc

le projeté orthogonal de M sur (BCG). La distance entre M et (BCG) est donc $BM = AB = 1$.

$$\mathcal{V}_{\text{BCGFM}} = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}.$$

Donc on a bien : $\mathcal{V}_{\text{AMNF}} = 2 \times \mathcal{V}_{\text{BCGFM}}$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 14

Métropole 10 septembre 2025 - sujet 2

1. a. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On constate que $\frac{-5}{2} \neq \frac{-4}{5}$. Comme les coordonnées des vecteurs ne sont pas proportionnelles, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et A, B et C ne sont pas alignés.

- b. D appartient au plan (ABC) si et seulement si les coordonnées de D vérifient l'équation cartésienne du plan (ABC).

$29 \times (-3) + 30 \times (-4) - 17 \times 6 = -309 \neq 35$. Les coordonnées de D ne vérifient pas l'équation cartésienne du plan (ABC), donc les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

2. a. Les coordonnées du milieu de [AB] sont : $\frac{4+(-1)}{2}$; $\frac{-1+1}{2}$; $\frac{3+(-2)}{2}$ soit $\frac{3}{2}$; 0 ; $\frac{1}{2}$.

- b. Un vecteur normal au plan P_1 médiateur du segment [AB] est le vecteur $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

donc une équation de P_1 est $5x - 2y + 5z = k$ avec k tel que les coordonnées du milieu de [AB] vérifient l'équation c'est-à-dire si

$$5 \times \frac{3}{2} - 2 \times 0 + 5 \times \frac{1}{2} = k = 10$$

Ainsi $5x - 2y + 5z = 10$ est une équation cartésienne de P_1 .

3. a.

$$\begin{aligned} MC^2 &= (x-0)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 10z + 16 + 25 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 10z + 41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MD^2 &= (x-(-3))^2 + (y-(-4))^2 + (z-6)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y - 12z + 9 + 16 + 36 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y - 12z + 61 \end{aligned}$$

M appartient à P_2 est équivalent à $MC^2 = MD^2$.

$$\begin{aligned}
MC^2 = MD^2 &\iff MC^2 - MD^2 = 0 \\
&\iff x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 10z + 41 \\
&\quad - x^2 - y^2 - z^2 - 6x - 8y + 12z - 61 = 0 \\
&\iff -6x - 16y + 2z - 20 = 0 \\
&\iff -6x - 16y + 2z = 20 \\
&\iff -3x - 8y + z = 10
\end{aligned}$$

On obtient l'équation cartésienne de P_2 : $-3x - 8y + z = 10$.

b. Un vecteur normal à P_1 est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Un vecteur normal à P_2 est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

On remarque que $\frac{5}{-2} \neq \frac{-3}{-2}$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leur coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Comme les vecteurs normaux à P_1 et P_2 ne sont pas colinéaires, alors les plans P_1 et P_2 sont sécants.

4. $\forall t \in \mathbb{R} \quad 5 \times (-2 - 1,9t) - 2 \times t + 5 \times (4 + 2,3t) = -10 - 9,5t - 2t + 20 + 11,5t = 10$

Tout point de Δ appartient à P_1 .

$\forall t \in \mathbb{R} \quad -3 \times (-2 - 1,9t) - 8 \times t + (4 + 2,3t) = 6 + 5,7t - 8t + 4 + 2,3t = 10$

Tout point de Δ appartient à P_2 .

Δ est donc la droite d'intersection de P_1 et P_2 .

5. D'après la représentation paramétrique de Δ , un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\vec{\delta}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 19 \\ -10 \\ 23 \end{pmatrix}$.

Le plan P_3 admet un vecteur normal $\vec{n}_3$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix}$.

La droite Δ et le plan P_3 ne sont pas sécants si et seulement si un vecteur directeur de Δ est orthogonal à un vecteur normal au plan P_3 .

On calcule le produit scalaire des deux vecteurs précités :

$\vec{\delta} \cdot \vec{n}_3 = 19 \times 8 + (-10) \times (-10) + 23 \times (-4) = 160 \neq 0$

Le produit scalaire n'est pas nul, les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux, Δ et P_3 sont donc sécants.

6. On considère le point H équidistant des points A, B, C, D. Comme AH = BH, H appartient à P_1 . Comme DH = CH, H appartient à P_2 . Ainsi H appartient à l'intersection des deux plans, la droite Δ . Comme AH = CH, H appartient au plan P_3 . Ainsi H est l'intersection de Δ et de P_3 .

Le point équidistant des sommets d'un tétraèdre est l'intersection des plans médiateurs de ses arêtes.

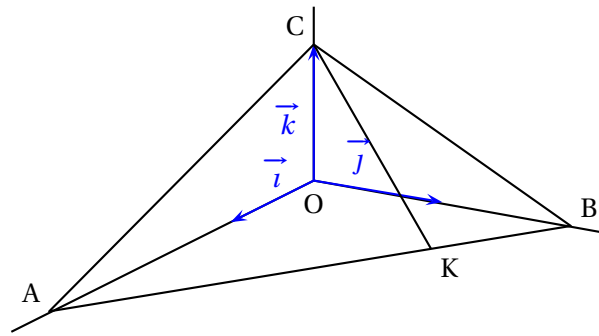
On peut déterminer les coordonnées de H.

Il suffit de résoudre l'équation :

$8(-2 - 1,9t) - 10t - 4(4 + 2,3t) = -15$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 15

Amérique du Sud 13 novembre 2025 - sujet 1



L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2\sqrt{3}; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 1)$ et $K(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 0)$.

1. La droite (CK) est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CK}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{CM} = t \cdot \overrightarrow{CK}$ où $t \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{CM} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_M - x_C \\ y_M - y_C \\ z_M - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - 1 \end{pmatrix} \text{ et celles de } \overrightarrow{CK} \text{ sont } \begin{pmatrix} x_K - x_C \\ y_K - y_C \\ z_K - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CM} = t \cdot \overrightarrow{CK} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{3}{2}t \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

La droite (CK) a donc pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{3}{2}t \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2. Soit $M(t)$ un point de la droite (CK) paramétrée par un réel t . Le point M a donc pour coordonnées $(\frac{\sqrt{3}}{2}t, \frac{3}{2}t, -t + 1)$

$$\begin{aligned} OM(t)^2 &= (x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2 + (z_M - z_O)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 + \left(\frac{3}{2}t\right)^2 + (-t + 1)^2 \\ &= \frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{4}t^2 + t^2 - 2t + 1 = 4t^2 - 2t + 1 \end{aligned}$$

Donc : $OM(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$.

3. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = OM(t)$.

a. $f(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$ donc $f'(t) = \frac{8t - 2}{2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}$

On étudie le signe de $f'(t)$ sur $\mathbb{R}$.

t	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$8t - 2$	$-$	0	$+$
$2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}$	$+$		$+$
$f'(t)$	$-$	0	$+$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, \frac{1}{4}]$, et strictement croissante sur l'intervalle $[\frac{1}{4}, +\infty[$.

b. On en déduit que f atteint son minimum pour $t = \frac{1}{4}$.

4. Le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK) est le point M de la droite (CK) tel que la distance OM soit minimale; le point de la droite (CK) réalisant ce minimum correspond donc à $t = \frac{1}{4}$.

C'est donc le point de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4}, \frac{3}{2} \times \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} + 1\right)$ soit $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}\right)$ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK); on l'appelle H.

5. On montre que H appartient au plan (ABC).

- $\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} 0 - 2\sqrt{3} \\ 2 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ donc les points A, K et B sont alignés donc $K \in (AB)$.

- On a : $\left. \begin{array}{l} K \in (AB) \\ (AB) \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow K \in (ABC) \Rightarrow (CK) \subset (ABC)$
- On a : $\left. \begin{array}{l} H \in (CK) \\ (CK) \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow H \in (ABC)$

Donc H est un point du plan (ABC).

On montre que H est l'orthocentre du triangle ABC.

- $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{\sqrt{3}}{8} \times (-2\sqrt{3}) + \frac{3}{8} \times 2 + \left(-\frac{1}{4}\right) \times 0 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{CK} \perp \overrightarrow{AB}$ donc $(CK) \perp (AB)$.

Comme $H \in (CK)$, on en déduit que $(CH) \perp (AB)$.

- $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{8} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{8} - 0 \\ \frac{3}{4} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{8}\sqrt{3} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{BC}$ sont $\begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 2 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{15}{8}\sqrt{3} \times 0 + \frac{3}{8} \times (-2) + \frac{3}{4} \times 1 = 0 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$ donc $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ donc $(AH) \perp (BC)$.

(AH) et (CH) sont donc deux hauteurs du triangle (ABC) donc H est l'orthocentre de ce triangle.

6. **a.** On démontre que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).

- On sait que $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{CK}$.

- $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{\sqrt{3}}{8} \times (-2\sqrt{3}) + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{4} \times 0 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc c'est un vecteur normal au plan (ABC). Donc la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).

- b. D'après le cours, si le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (a, b, c) est normal à un plan $\mathcal{P}$, alors ce plan a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{OH} \left(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4} \right)$ est un vecteur normal au plan (ABC), donc le plan (ABC) a une équation de la forme $\frac{\sqrt{3}}{8}x + \frac{3}{8}y + \frac{3}{4}z + d = 0$ c'est-à-dire $x\sqrt{3} + 3y + 6z + 8d = 0$.

On détermine la valeur de d en exprimant que le point A appartient au plan (ABC).

$$\begin{aligned} A \in (ABC) &\iff x_A\sqrt{3} + 3y_A + 6z_A + 8d = 0 \iff 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 3 \times 0 + 6 \times 0 + 8d = 0 \\ &\iff 6 + 8d = 0 \iff 8d = -6 \end{aligned}$$

Le plan (ABC) a pour équation : $x\sqrt{3} + 3y + 6z - 6 = 0$.

7. (CK) est une hauteur du triangle (ABC) donc l'aire de ce triangle est égale à $\frac{1}{2} CK \times AB$.

- Le vecteur $\overrightarrow{CK}$ a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -1 \right)$ donc :
 $CK^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^2 + (-1)^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 1 = 4$ donc $CK = 2$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2\sqrt{3}, 2, 0)$ donc :
 $AB^2 = (-2\sqrt{3})^2 + (2)^2 + (0)^2 = 12 + 4 + 0 = 16$ donc $AB = 4$.

L'aire du triangle (ABC) est donc égale, en unités d'aire, à : $\frac{1}{2} \times 2 \times 4$ soit 4.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 16

Amérique du Sud 14 novembre 2025 - sujet 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point.

Une réponse fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans toutes les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé.

1. • Δ_1 a pour vecteur directeur $\delta_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et Δ_2 a pour vecteur directeur $\delta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$: les

premières coordonnées ne sont pas égales, les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, les droites Δ_1 et Δ_2 ne sont pas parallèles;

En remplaçant respectivement dans les équations paramétriques s par 2 et t par 1, on trouve que le point de coordonnées $(-2; 6; 1)$ appartient bien aux deux droites.

2. a. $M(x = 1 + 2t; y = 3 - t; z = 1 + 2t) \in d$ appartient à P si ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de P , donc si

$$4(1+t) + 2(3-t) - (1+2t) + 3 = 0 \iff 4 + 4t + 6 - 2t - 1 - 2t + 3 = 0 \iff 0t + 12 = 0 \iff 0t = -12 : \text{cette équation n'a pas de solution : cela signifie que la droite } d \text{ est parallèle strictement au plan } P.$$

3. On considère les points $A(3; 2; 1)$, $B(7; 3; 1)$, $C(-1; 4; 5)$ et $D(-3; 3; 5)$.

Commençons par la deuxième affirmation : on a

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Il reste donc la première affirmation que l'on peut démontrer :

A, B, C et D sont coplanaires, c'est-à-dire si par exemple D appartient au plan (ABC) et dans ce cas si $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ (car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas des vecteurs colinéaires).

Avec $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, l'égalité vectorielle précédente se traduit par le système :

$$\begin{cases} -6 &= 4x - 4y \\ 1 &= x + 2y \\ 4 &= 4y \end{cases} \iff \begin{cases} -6 &= 4x - 4 \\ 1 &= x + 2 \\ 1 &= y \end{cases} \iff \begin{cases} -2 &= 4x \\ -1 &= x \\ 1 &= y \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{2} &= x \\ -1 &= x \\ 1 &= y \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution. Donc le point D n'appartient pas au plan défini par les points A, B et C ou encore A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

4. a. $R(1; 1; -2) \in (Q) \iff 3 \times 1 + -2 \times 1 - 2 + 1 = 0 \iff 3 - 2 - 2 + 1 = 0$ qui est vraie;

$R(1; 1; -2) \in (Q') \iff 4 \times 1 + 1 \times 1 - (-2) + 3 = 0 \iff 10 = 0$ qui est fausse : la première affirmation est fausse;

- b. (Q) a pour vecteur normal $\vec{q} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; (Q') a pour vecteur normal $\vec{q'} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\vec{q} \cdot \vec{q'} = 3 \times 4 - 2 \times 1 + 1 \times (-1) = 12 - 2 - 1 = 9 \neq 0$: les vecteurs normaux ne sont pas orthogonaux, les plans (Q) et (Q') ne sont pas perpendiculaires.

- c. Les points communs aux deux plans sont les points dont les coordonnées vérifient les équations de ces deux plans donc le système :

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 1 &= 0 \\ 4x + y - z + 3 &= 0 \end{cases}$$

On peut poser $x = t$, avec $t \in \mathbb{R}$ et on obtient le système aux deux inconnues y et z suivant :

$$\begin{cases} x &= t \\ 3x - 2y + z + 1 &= 0 \\ 4x + y - z + 3 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= t \\ -2y + z &= -3t - 1 \\ y - z &= -4t - 3 \end{cases}$$

La somme membre à membre des deux dernières équations donne

$$-y = -7t - 4 = 0 \iff y = 7t + 4;$$

enfin la deuxième équation $-2y + z = -3t - 1$ donne $z = 2y - 3t - 1 = 2(7t + 4) - 3t - 1 = 14t + 8 - 3t - 1 = 11t + 7$.

Conclusion : les points communs aux deux plans sont les points dont les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 7t + 4 \\ z &= 11t + 7 \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R} : \text{c'est l'équation de la droite}$$

contenant le point $K(0; 4; 7)$ et dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$. : la troisième affirmation est vraie.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 17

Nouvelle-Calédonie 20 novembre 2025 - sujet 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(4; -4; 4), \quad B(5; -3; 2), \quad C(6; -2; 3), \quad D(5; 1; 1)$$

1. On a : $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5-4 \\ -3-(-4) \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{CB} = \begin{pmatrix} 5-6 \\ -3-(-2) \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc : $\vec{AB} \cdot \vec{CB} = 1 \times (-1) + 1 \times (-1) - 2 \times (-1) = -1 - 1 + 2 = 0$.

Puisque leur produit scalaire est nul, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CB}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en B.

2. D'après la question précédente, les points A, B et C étant non alignés, ils définissent bien un plan. Leurs coordonnées vérifient donc toute équation cartésienne du plan ainsi défini.

Or on a : $4 - (-4) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$, donc les coordonnées de A vérifient l'équation $x - y - 8 = 0$.

De même $5 - (-3) - 8 = 5 + 3 - 8 = 0$ et $6 - (-2) - 8 = 6 + 2 - 8 = 0$, donc les coordonnées de B et C vérifient également l'équation $x - y - 8 = 0$.

Donc $x - y - 8 = 0$ est bien une équation cartésienne du plan (ABC).

3. a. On sait que si $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à un plan, alors ce plan a une

équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$. Or on a vu à la question précédente que $x - y - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC), donc

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal au plan (ABC).}$$

Puisque d est orthogonale au plan (ABC), le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d . De plus, la droite d passe par le point D(5 ; 1 ; 1).
Donc une représentation paramétrique de d est :

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- b.** Puisque la droite d est orthogonale au plan (ABC) et passe par D, le projeté orthogonal H de D sur (ABC) est le point d'intersection de la droite D et du plan (ABC). Les coordonnées $(x ; y ; z)$ du point H vérifient donc à la fois la représentation paramétrique de d et l'équation cartésienne de (ABC). Elles sont donc solution du système :

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \\ x - y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5 + t - (1 - t) - 8 = 0 \Leftrightarrow 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow 2t = 4 \Leftrightarrow t = 2$$

$$\begin{cases} x = 5 + 2 = 7 \\ y = 1 - 2 = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Les coordonnées du projeté orthogonal H de D sur (ABC) sont donc :

$$\boxed{H(7 ; -1 ; 1)}$$

c. $DH = \sqrt{(7-5)^2 + (-1-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$

- 4. a.** La pyramide ABCD admet pour base le triangle ABC et pour hauteur le segment [DH]. On a donc $V = \frac{1}{3} \times \text{aire}(ABC) \times DH$.

Puisque ABC est rectangle en B, on a :

$$\begin{aligned} \text{aire}(ABC) &= \frac{AB \times CB}{2} = \frac{\|\vec{AB}\| \times \|\vec{CB}\|}{2} \\ &= \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \times \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{1+1+4} \times \sqrt{1+1+1}}{2} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2} = \boxed{2}$$

Le volume de la pyramide ABCD est 2.

- b. La distance du point A au plan (BCD) est la longueur de la hauteur issue de A de la pyramide ABCD. Soit x cette distance. On a alors $V = \frac{1}{3} \times \text{aire (BCD)} \times x$.
Donc :

$$\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{42}}{2} \times x = 2 \iff x\sqrt{42} = 2 \times 3 \times 2 \iff x = \frac{12}{\sqrt{42}} = \frac{2 \times 6}{\sqrt{6} \times \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \boxed{\frac{2\sqrt{42}}{7}}$$

La distance du point A au plan (BCD) est $\frac{2\sqrt{42}}{7}$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 18

Nouvelle-Calédonie 21 novembre 2025 - sujet 2

1. Dans un cube toutes les faces sont des carrés de même côté, donc les diagonales de chaque face ont même longueur.

Or dans le triangle HAC, chaque côté est une diagonale d'une face ([HA] est une diagonale de ADHE, [AC] est une diagonale de ABCD et [CH] est une diagonale de CDHG). Les trois côtés du triangle HAC ont donc même longueur $\sqrt{2}$, c'est donc un triangle équilatéral.

Or les angles aux sommets d'un triangle équilatéral mesurent 60° , donc HAC n'est pas rectangle.

L'affirmation 1 est **FAUSSE**.

2. Les droites (DH) et (BF) sont des arêtes opposées du cube, elles sont donc parallèles, et donc coplanaires. Donc (BF) est une droite du plan (DFH).

Comme I est un point de (BF) il appartient au plan (DFH). Donc les droites (DI) et (HF) sont coplanaires.

Puisque (BD) est la droite parallèle à (HF) passant par D (arêtes opposées), et que B et I sont distincts, d'après l'axiome d'Euclide, la droite (DI) n'est pas parallèle à (HF). Or si deux droites sont coplanaires, elles sont soit parallèles soit sécantes. Donc (DI) et (HF) sont sécantes.

L'affirmation 2 est **VRAIE**.

3. Si le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (FAC) alors il est orthogonal à tout vecteur de ce plan.

On calcule donc le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{FC}$, puisque deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

$$\vec{FC} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{FC} &= \sin(\alpha) \times 0 + \sin(\pi - \alpha) \times 1 + \sin(-\alpha) \times (-1) \\ &= \sin(\pi - \alpha) - \sin(-\alpha) \\ &= \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \\ &= \boxed{2\sin(\alpha) \neq 0} \quad \text{puisque } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{u}$ n'est donc pas orthogonal au vecteur $\vec{FC}$. Donc, puisqu'il existe un vecteur de (FAC) qui n'est pas orthogonal à $\vec{u}$, $\vec{u}$ n'est pas un vecteur normal à (FAC).

L'affirmation 3 est **FAUSSE**.

4. Un cube possède 8 sommets.

Pour former un segment, on doit choisir 2 sommets distincts parmi ces 8 sommets. L'ordre n'a pas d'importance (le segment reliant A à B est le même que celui reliant B à A).

On utilise donc une combinaison :

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = \frac{56}{2} = 28.$$

Il existe **28 segments** pouvant relier deux sommets distincts d'un cube.

L'affirmation 4 est **FAUSSE**.