

2025

ANNALES DU BAC

MATHÉMATIQUES

FONCTIONS

Exercices extraits du site de l'APMEP

PAR VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

SUJETS ET CORRIGÉS
72 PAGES

SOMMAIRE

• Exercice 1 (Amérique du Nord 22 mai 2025 - sujet 2)	page 3
Solution de l'exercice 1	page 33
• Exercice 2 (Amérique du Nord - sujet 2 secours - 22 mai 2025)	page 4
Solution de l'exercice 2	page ??
• Exercice 3 (Asie 11 juin 2025 - sujet 1)	page 5
Solution de l'exercice 3	page 39
• Exercice 4 (Asie 12 juin 2025 - sujet 2)	page 6
Solution de l'exercice 4	page 41
• Exercice 5 (Centres étrangers 12 juin 2025 - sujet 1)	page 8
Solution de l'exercice 5	page ??
• Exercice 6 (Centres étrangers 13 juin 2025 - sujet 2)	page 9
Solution de l'exercice 6	page 42
• Exercice 7 (Métropole 17 juin 2025 - sujet 1)	page 11
Solution de l'exercice 7	page 44
• Exercice 8 (Polynésie 17 juin 2025 - sujet 1)	page 13
Solution de l'exercice 8	page 46
• Exercice 9 (Métropole 18 juin 2025 - sujet 2)	page 16
Solution de l'exercice 9	page 48
• Exercice 10 (Métropole 18 juin 2025 - sujet 2)	page 19
Solution de l'exercice 10	page 51
• Exercice 11 (Polynésie 18 juin 2025 - sujet 2)	page 20
Solution de l'exercice 11	page 53
• Exercice 12 (Polynésie 2 septembre 2025 - sujet 1)	page 21
Solution de l'exercice 12	page ??
• Exercice 13 (Polynésie 2 septembre 2025 - sujet 1)	page 23
Solution de l'exercice 13	page 56
• Exercice 14 (Métropole 9 septembre 2025 - sujet 1)	page 25
Solution de l'exercice 14	page 59
• Exercice 15 (Métropole 10 septembre 2025 - sujet 2)	page 26
Solution de l'exercice 15	page 61
• Exercice 16 (Amérique du Sud 13 novembre 2025 - sujet 1)	page 28
Solution de l'exercice 16	page 63
• Exercice 17 (Amérique du Sud 14 novembre 2025 - sujet 2)	page 29
Solution de l'exercice 17	page 67
• Exercice 18 (Nouvelle-Calédonie 20 novembre 2025 - sujet 1)	page 31
Solution de l'exercice 18	page 69
• Exercice 19 (Nouvelle-Calédonie 21 novembre 2025 - sujet 2)	page 32
Solution de l'exercice 19	page ??

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ par

$$f(x) = e^x \sin(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; \pi]$,

$$f'(x) = e^x [\sin(x) + \cos(x)].$$

- b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$
2. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.
- c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $e^x \sin(x) \geq x$.
3. Justifier que le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

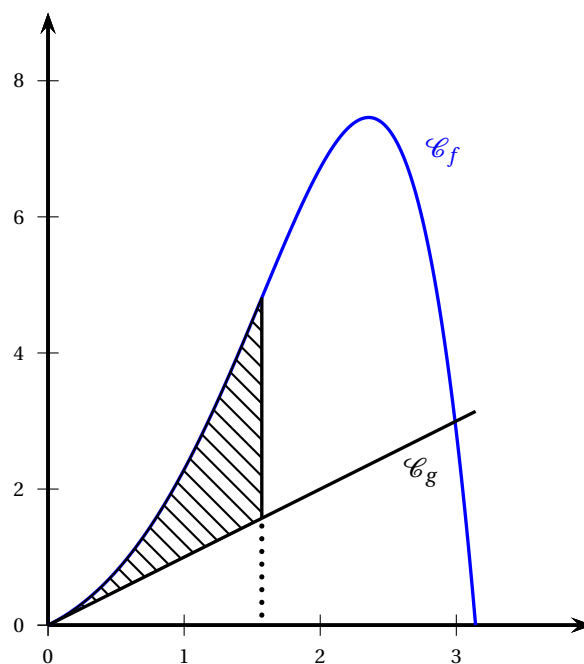
$$I = 1 + J \quad \text{et} \quad I = e^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En déduire que $I = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.

Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.



EXERCICE 2

Amérique du Nord - sujet 2 secours - 22 mai 2025

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x e^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f , c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f' .

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x , calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x - 2) e^{-x}$$

4. Étudier la convexité de la fonction f .

5. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
6. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
Donner un encadrement de α , au centième près.
8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ .

Partie B : Calcul d'aire

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n x e^{-x} dx$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n .
2.
 - a. Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n .
 - b. Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3

Asie 11 juin 2025 - sujet 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

et on appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.
 - a. Montrer que $g'(x) = f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b. Pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}.$$

2.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
 - b. Interpréter graphiquement ce résultat.
3.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

- b.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
- c.** Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.
- 4.** On pose $I = \int_1^2 f(x) dx$.
- a.** Calculer I .
- b.** Interpréter graphiquement le résultat.
- 5.** On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et que :

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(x - 3\sqrt{x} + 3)}{8x^2\sqrt{x}}.$$

- a.** En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- b.** Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

EXERCICE 4

Asie 12 juin 2025 - sujet 2

Dans un laboratoire, on étudie une réaction chimique dans un réacteur fermé, sous certaines conditions. Le traitement numérique des données expérimentales a permis de modéliser l'évolution de la température de cette réaction chimique en fonction du temps.

L'objectif de cet exercice est d'étudier cette modélisation.

La température est exprimée en degré Celsius et le temps est exprimé en minute.

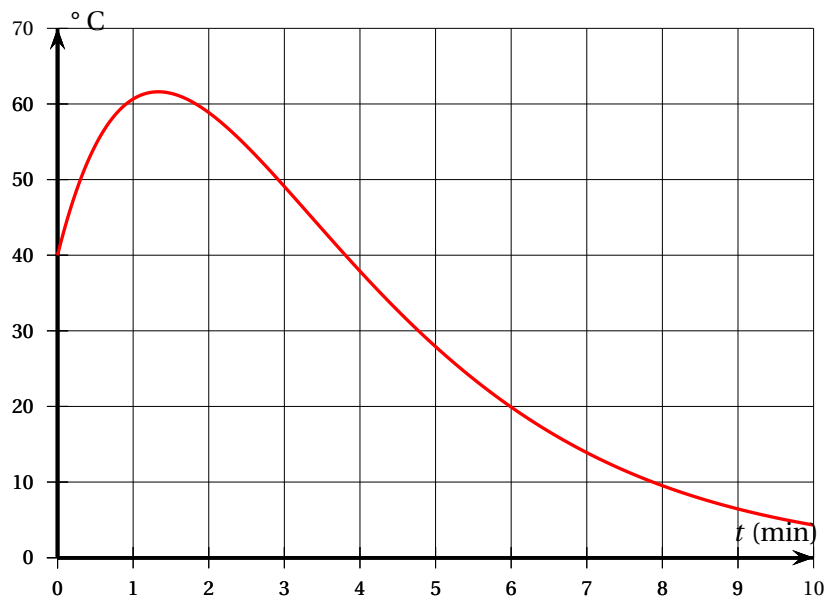
Dans tout l'exercice, on se place sur l'intervalle de temps $[0 ; 10]$.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un repère orthogonal du plan, on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction température en fonction du temps sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

- 1.** Déterminer, par lecture graphique, au bout de combien de temps la température redescend à sa valeur initiale à l'instant $t = 0$.



On appelle f la fonction température représentée par la courbe ci-dessus.

On précise que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

On admet que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(t) = (at + b)e^{-0,5t}$ où a et b sont deux constantes réelles.

2. On admet que la valeur exacte de $f(0)$ est 40. En déduire la valeur de b .
3. On admet que f vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + 0,5y = 60e^{-0,5t}$. Déterminer la valeur de a .

Partie B : Étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 10]$ par

$$f(t) = (60t + 40)e^{-0,5t}$$

1. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 10]$, on a : $f'(t) = (40 - 30t)e^{-0,5t}$.
2.
 - a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les images des valeurs présentes dans le tableau.
 - b. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive sur l'intervalle $]0 ; 10]$.
 - c. Donner une valeur approchée de α au dixième près et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. On définit la température moyenne, exprimée en degré Celsius, de cette réaction chimique entre deux temps t_1 et t_2 , exprimés en minute, par

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

- a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^4 f(t) dt = 320 - \frac{800}{e^2}$$

- b. En déduire une valeur approchée, au degré Celsius près, de la température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes.

EXERCICE 5

Centres étrangers 12 juin 2025 - sujet 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 4 \ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.

- Déterminer la limite de la fonction f en -1 .
- Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $] -1 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$

- Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$.
- On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$ par $h(x) = f(x) - x$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2	$m \approx 2,364$	6,5
$h(x)$	$h(2)$	$M \approx 2,265$	$h(6,5)$

Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2 ; 6,5]$.

- On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```
from math import *

def f(x) :
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25

def bornes(n) :
    p = 1/10**n
    x = 6
    while f(x)-x > 0 :
        x = x + p
    return (x-p, x)
```


On rappelle qu'en langage Python :

- la commande $\log(x)$ renvoie la valeur $\ln x$;
 - la commande $c**d$ renvoie la valeur de c^d .
- a. Donner les valeurs renvoyées par la commande `bornes(2)`.
On donnera les valeurs arrondies au centième.
- b. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ .
3. On rappelle que le réel α , défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2; 6,5]$.
Justifier que $\ell = \alpha$.

EXERCICE 6

Centres étrangers 13 juin 2025 - sujet 2

Partie A

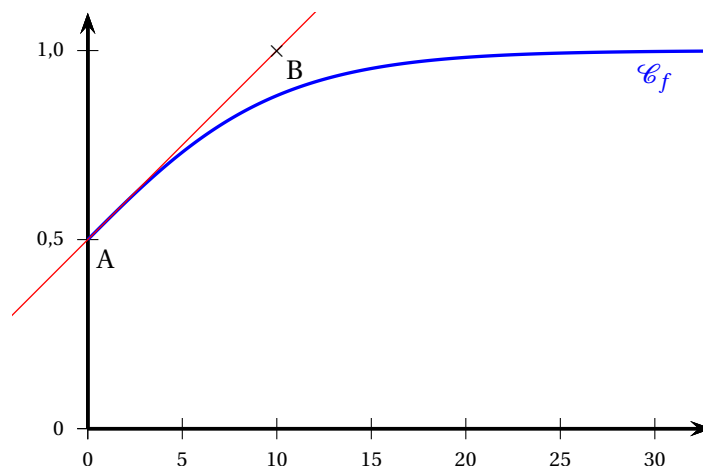
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{a + e^{-bx}}$$

où a et b sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

La fonction f admet pour représentation graphique la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :



On considère les points A(0; 0,5) et B(10; 1).

On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée de $f(10)$.
2. On admet que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Justifier que $a = 1$.
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
5.
 - a. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de la constante b .
 - b. En déduire la valeur de b .

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0,97$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel α par deux nombres entiers consécutifs.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Partie C

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(x) = \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 40]$, c'est-à-dire :

$$I = \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{1}{1 + e^{-0,2t}} dt.$$

On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millièmes.

EXERCICE 7

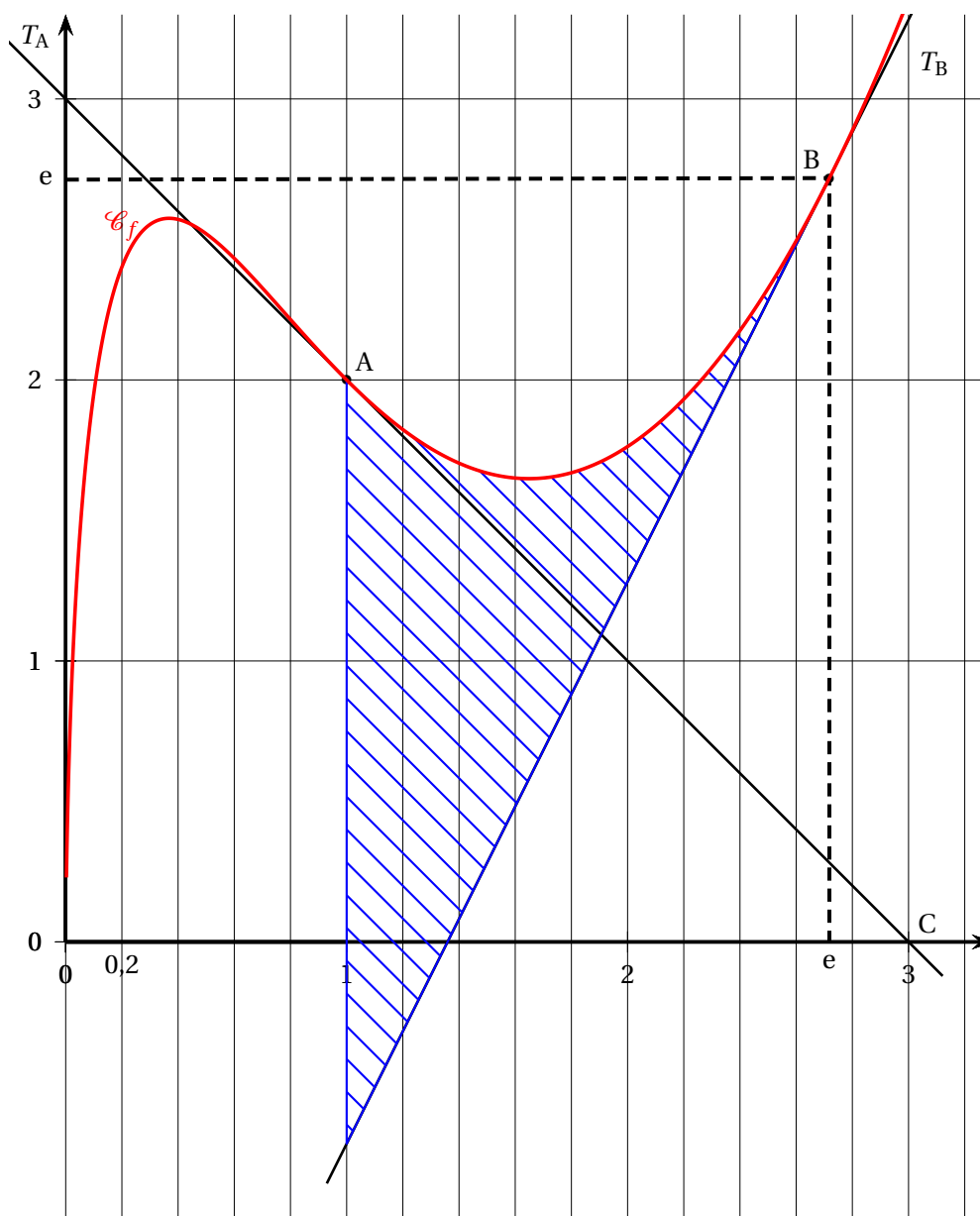
Métropole 17 juin 2025 - sujet 1

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f , notée $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $]0; 3]$;
- la droite T_A , tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(1; 2)$;
- la droite T_B tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $B(e; e)$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3; 0)$.



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0; 3]$?
3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Partie B : étude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
En déduire que $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.
3. On admet que pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.
 - a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x}(4 \ln x + 1)$.
 - b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
 - c. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - e$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la tangente T_B , et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

On admet que $\int_1^e x(\ln x)^2 \, dx = \frac{e^2 - 1}{4}$.

En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unité d'aire.

EXERCICE 8

Polynésie 17 juin 2025 - sujet 1

On munit le plan d'un repère orthonormé.

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f_0(x) = e^{-x} \quad \text{et, pour } n \geq 1, f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

Pour tout entier naturel n , on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n .

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geq 1$

On considère un entier naturel $n \geq 1$.

1. a. On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$f'_n(x) = (n - x)x^{n-1} e^{-x}.$$

- b. Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous :

x	0	n	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
f_n	0	$\left(\frac{n}{e}\right)^n$	0

2. Justifier par le calcul que le point $A(1 ; e^{-1})$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_n$.

Partie B : Étude des intégrales $\int_0^1 f_n(x) dx$ pour $n \geq 0$

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur $[0;1]$ et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

- Sur le graphique en ANNEXE, on a représenté les courbes $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_{10}$ et $\mathcal{C}_{100}$.
 - Donner une interprétation graphique de I_n .
 - Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?
- Calculer I_0 .
- a. Soit n un entier naturel.
Démontrer que pour tout $x \in [0 ; 1]$,

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n.$$

- b. En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

- Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera ℓ .
- En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}.$$

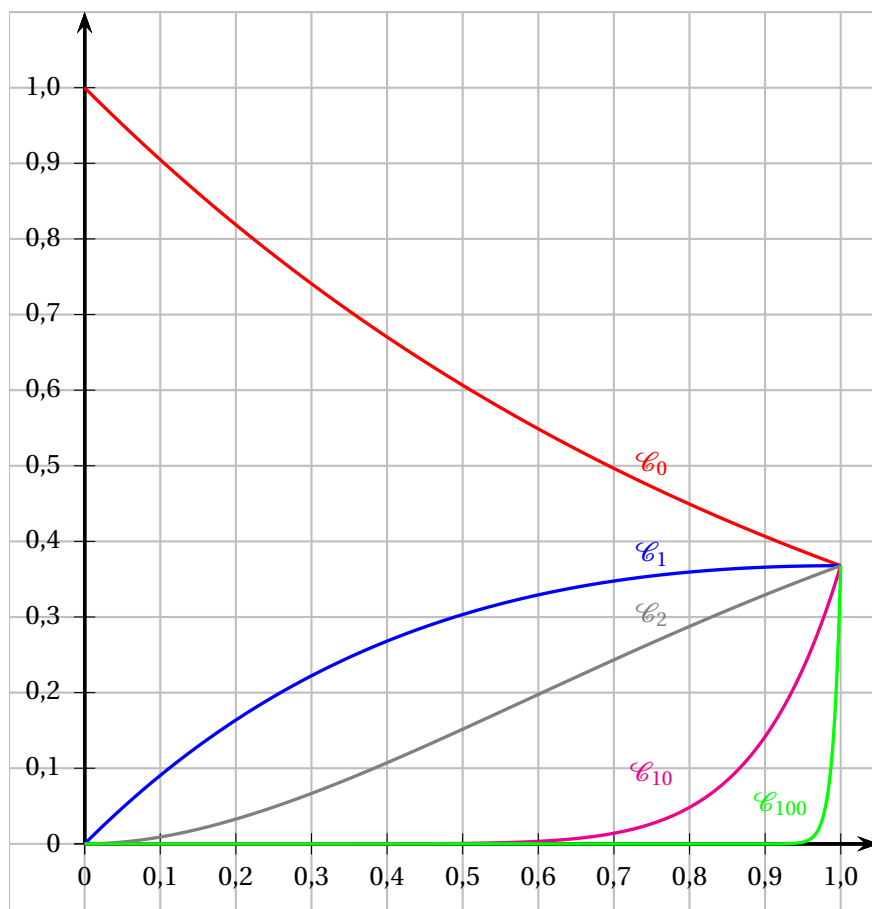
- a. Démontrer que si $\ell > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.
b. Démontrer que $\ell = 0$. On pourra utiliser la question 6. a.

On donne ci-dessous le script de la fonction `mystere`, écrite en langage Python.
On a importé la constante `e`.

```
def mystere(n):  
    I = 1 - 1/e  
    L = [I]  
    for i in range(n):  
        I = (i + 1)*I - 1/e  
        L.append(I)  
    return L
```

7. Que renvoie `mystere(100)` dans le contexte de l'exercice?

ANNEXE : exercice 3



EXERCICE 9

Métropole 18 juin 2025 - sujet 2

L'objet de cet exercice est l'étude de l'arrêt d'un chariot sur un manège, à partir du moment où il entre dans la zone de freinage en fin de parcours.

On note t le temps écoulé, exprimé en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.

On modélise la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage, exprimée en mètre, en fonction de t , à l'aide d'une fonction notée d définie sur $[0 ; +\infty[$.

On a ainsi $d(0) = 0$.

Par ailleurs, on admet que cette fonction d est dérivable sur son ensemble de définition.

On note d' sa fonction dérivée.

Partie A

Sur la figure (Fig. 2) ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_d$ de la fonction d ;
- la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_d$ au point A d'abscisse 4,7 ;
- l'asymptote Δ à $\mathcal{C}_d$ en $+\infty$.

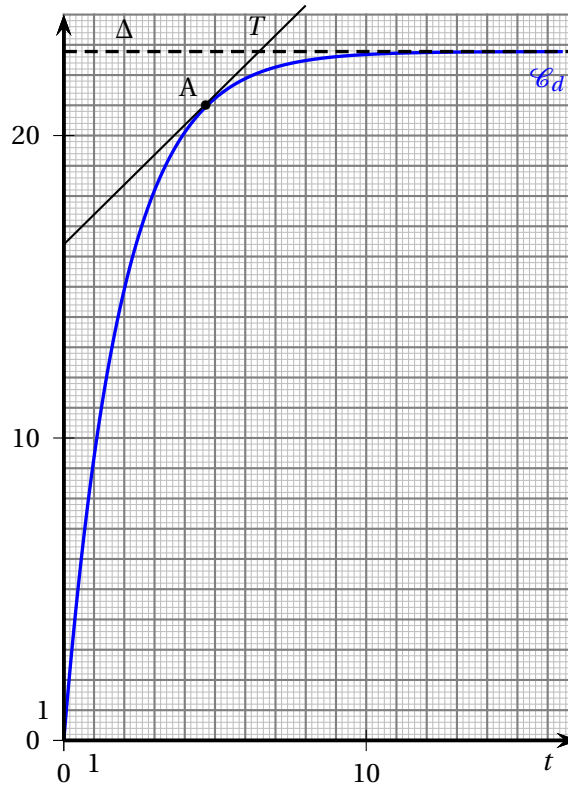


Fig.2

Dans cette partie, aucune justification n'est attendue.

Avec la précision que permet le graphique, répondre aux questions ci-dessous.
D'après ce modèle :

1. Au bout de combien de temps le chariot aura-t-il parcouru 15 m dans la zone de freinage?
2. Quelle longueur minimale doit-être prévue pour la zone de freinage?
3. Que vaut $d'(4,7)$? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On rappelle que t désigne le temps écoulé, en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.

On modélise la vitesse instantanée du chariot, en mètre par seconde (m.s^{-1}), en fonction de t , par une fonction v définie sur $[0 ; +\infty[$.

On admet que :

- la fonction v est dérivable sur son ensemble de définition, et on note v' sa fonction dérivée;

- la fonction v est une solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + 0,6y = e^{-0,6t},$$

où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y .

On précise de plus que, lors de son arrivée sur la zone de freinage, la vitesse du chariot est égale à 12 m.s^{-1} , c'est-à-dire $v(0) = 12$.

1. a. On considère l'équation différentielle

$$(E'): \quad y' + 0,6y = 0.$$

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') sur $[0; +\infty[$.

- Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = t e^{-0,6t}$.
Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E) .
- En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0; +\infty[$.
- En déduire que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :

$$v(t) = (12 + t) e^{-0,6t}.$$

2. Dans cette question, on étudie la fonction v sur $[0; +\infty[$.

- Montrer que pour tout réel $t \in [0; +\infty[$, $v'(t) = (-6,2 - 0,6t) e^{-0,6t}$.
- En admettant que :

$$v(t) = 12 e^{-0,6t} + \frac{1}{0,6} \times \frac{0,6t}{e^{0,6t}},$$

déterminer la limite de v en $+\infty$.

- Étudier le sens de variation de la fonction v et dresser son tableau de variation complet. Justifier.
 - Montrer que l'équation $v(t) = 1$ admet une solution unique α , dont on donnera une valeur approchée au dixième.
3. Lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde, un système mécanique se déclenche permettant son arrêt complet.
Déterminer au bout de combien de temps ce système entre en action. Justifier.

Partie C

On rappelle que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$v(t) = (12 + t) e^{-0,6t}.$$

On admet que pour tout réel t dans l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$d(t) = \int_0^t v(x) dx.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la distance parcourue par le chariot entre les instants 0 et t est donnée par :

$$d(t) = e^{-0,6t} \left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}.$$

2. On rappelle que le dispositif d'arrêt se déclenche lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde.

Déterminer, selon ce modèle, une valeur approchée au centième de la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage avant le déclenchement de ce dispositif.

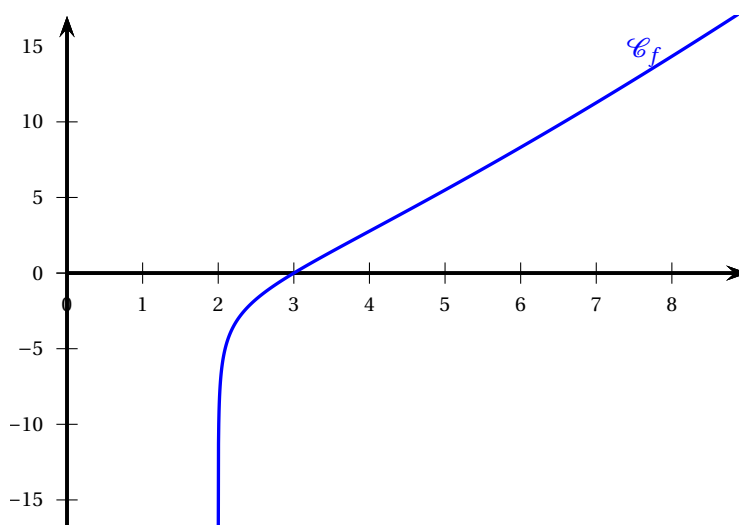
EXERCICE 10

Métropole 18 juin 2025 - sujet 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x - 2).$$

Une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2; +\infty[$.
3. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$.
Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1.?
4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2; +\infty[$:

$$f'(x) = \ln(x - 2) + \frac{x}{x - 2}.$$

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2 ; +\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.

a. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2 ; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

b. On admet que $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} g(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2 ; +\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g .

c. En déduire que, pour tout x appartenant à $]2 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2 ; +\infty[$.

6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2 ; +\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f .

7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3?

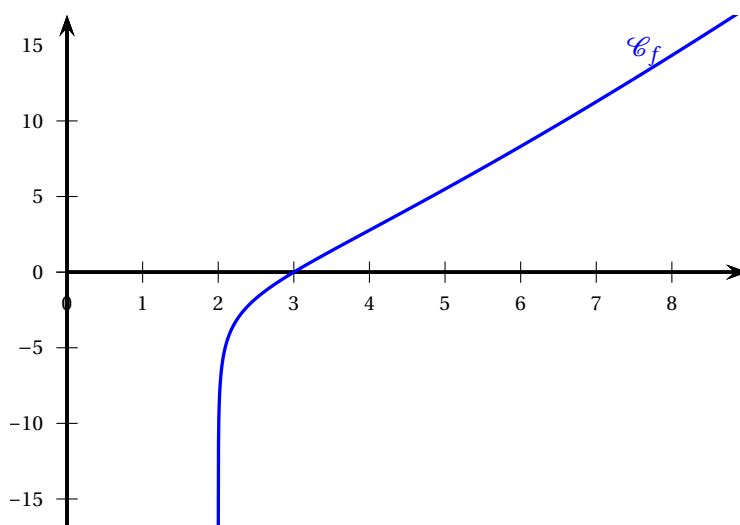
EXERCICE 11

Polynésie 18 juin 2025 - sujet 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x-2).$$

Une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2 ; +\infty[$.

3. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$.

Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1.?

4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2 ; +\infty[$:

$$f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}.$$

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2 ; +\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.

a. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2 ; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

b. On admet que $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} g(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2 ; +\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g .

c. En déduire que, pour tout x appartenant à $]2 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2 ; +\infty[$.

6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2 ; +\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f .

7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3?

EXERCICE 12

Polynésie 2 septembre 2025 - sujet 1

On étudie l'évolution de la population d'une espèce animale au sein d'une réserve naturelle.

Les effectifs de cette population ont été recensés à différentes années. Les données collectées sont présentées dans le tableau suivant :

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100

Pour anticiper l'évolution de cette population, la direction de la réserve a choisi de modéliser le nombre d'individus en fonction du temps.

Pour cela, elle utilise une fonction, définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, dont la variable x représente le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2000.

Dans son modèle, l'image de 0 par cette fonction vaut 50, ce qui correspond au nombre d'individus en l'an 2000.

Partie A. Modèle 1

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0,05y - 0,5 \quad (E_1)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) avec la condition initiale $y(0) = 50$.
2. Comparer les résultats du tableau avec ceux que l'on obtiendrait avec ce modèle.

Partie B. Modèle 2

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0,05y(1 - 0,00125y)$$

On note f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.

Pour toute la suite de l'exercice, on pourra utiliser ces résultats sans les démontrer, sauf pour la question 5.

	Instruction	Résultat
1	$f(x) := \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$	$f(x) = \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$
2	$f'(x) := \text{Dérivée}(f(x))$	$f'(x) = \frac{600e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^2}$
3	$f''(x) := \text{Dérivée}(f'(x))$	$f''(x) = \frac{30e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^3} (15e^{-0,05x} - 1)$
4	Résoudre $(15e^{-0,05x} - 1 \geq 0)$	$x \leq 20 \ln(15)$

1. Démontrer que la fonction f vérifie $f(0) = 50$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 0,05f(x)(1 - 0,00125f(x))$$

On admet que cette fonction f est l'unique solution de (E_2) prenant la valeur initiale de 50 en 0.

2. Avec ce nouveau modèle f , estimer l'effectif de cette population en 2050. Arrondir le résultat à l'unité.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire quant à la courbe C ? Interpréter cette limite dans le cadre de ce problème concret.
4. Justifier que la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
5. Démontrer le résultat obtenu en ligne 4 du logiciel.

6. On admet que la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an, est modélisée par la fonction f' .
- Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe C .
 - La direction de la réserve affirme :
« Au vu de ce modèle, la vitesse de croissance de la population de cette espèce va augmenter pendant un peu plus de cinquante ans, puis va diminuer ». La direction a-t-elle raison? Justifier.
-

EXERCICE 13

Polynésie 2 septembre 2025 - sujet 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2 + \ln(u_n^2 - 3).$$

On admet que cette suite est bien définie.

Partie A : Exploitation de programmes Python

- Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour que `suite(k)` qui prend en paramètre un entier naturel k , renvoie la liste des k premières valeurs de la suite (u_n) .

Remarque : On précise que, pour tout réel strictement positif a , $\log(a)$ renvoie la valeur du logarithme népérien de a .

```
def suite(k):  
    L = []  
    u = 5  
    for i in range(.....):  
        L.append(u)  
        u=.....  
    return(.....)
```

- On a exécuté `suite(9)` ci-dessous. Émettre deux conjectures : l'une sur le sens de variation de la suite (u_n) et l'autre sur son éventuelle convergence.

```
>>> suite(9)  
[ 5, 5.091042453358316, 5.131953749864703,  
5.150037910978289, 5.157974010229213, 5.1614456706362954,  
5.162962248594583, 5.163624356938671, 5.163913344065642]
```

3. On a ensuite créé la fonction `mystere(n)` donnée ci-dessous et exécuté `mystere(10000)`, ce qui a renvoyé 1.

Cet affichage contredit-il la conjecture émise sur le sens de variation de la suite (u_n) ? Justifier.

```
def mystere(n):
    L = suite(n)
    c = 1
    for i in range(n - 1):
        if L[i] > L[i + 1]:
            c = 0
    return c
```

```
>>> mystere(10000)
1
```

Partie B : Étude de la convergence de la suite (u_n)

On considère la fonction g définie sur $[2; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 + \ln(x^2 - 3)$$

On admet que g est dérivable sur $[2; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction g est croissante sur $[2; +\infty[$.
2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6.$$

- b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie C : Étude de la valeur de la limite

On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2 + \ln(x^2 - 3) - x.$$

On admet que f est dérivable sur $[2; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

On donne le tableau de variations de f suivant. On ne demande aucune justification.

x	2	3	$+\infty$
$f(x)$	0	$\ln(6) - 1$	$-\infty$

1. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[2; +\infty[$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.
b. Donner la valeur exacte de α et une valeur approchée à 10^{-3} près de β .
2. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .
Justifier que $f(\ell) = 0$ et déterminer ℓ .

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + 0,4y = e^{-0,4t}$$

où y est une fonction de la variable réelle t .

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(t) = t e^{-0,4t}$.
Vérifier que u est solution de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = f(t) - u(t)$.
Soit (H) l'équation différentielle $y' + 0,4y = 0$.
 - a. Démontrer que si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) alors la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

On admettra que la réciproque est vraie.

 - b. Résoudre l'équation différentielle (H).
 - c. En déduire les solutions de (E).
 - d. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

Partie B

On s'intéresse à la glycémie chez une personne venant de prendre un repas.

La glycémie en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$, en fonction du temps t , exprimé en heure, écoulé depuis la fin du repas, est modélisée par la fonction f définie sur $[0; 6]$ par :

$$f(t) = (t + 1) e^{-0,4t}.$$

1.
 - a. Montrer que, pour tout $t \in [0; 6]$, $f'(t) = (-0,4t + 0,6) e^{-0,4t}$.
 - b. Étudier les variations de f sur $[0; 6]$ puis dresser son tableau de variations sur cet intervalle.
2. Une personne est en hypoglycémie lorsque sa glycémie est inférieure à $0,7 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$.
 - a. Démontrer que sur l'intervalle $[0; 6]$ l'équation $f(t) = 0,7$ admet une unique solution que l'on notera α .
 - b. Au bout de combien de temps après avoir pris son repas cette personne est-elle en hypoglycémie?
On exprimera ce temps à la minute près.
3. On souhaite déterminer la glycémie moyenne en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^6 f(t) dt = -23,75 e^{-2,4} + 8,75.$$

- b. Calculer la glycémie moyenne en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.
- c. En remarquant que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E), expliquer comment on aurait pu obtenir ce résultat autrement.
-

EXERCICE 15

Métropole 10 septembre 2025 - sujet 2

On considère la fonction f définie sur $]0; 8]$ par

$$f(x) = \frac{10 \ln(-x^2 + 7x + 9)}{x}$$

Soit C_f la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2 + 7x + 8 \geq 0$.
2. En déduire que pour tout $x \in]0; 8]$, on a $f(x) \geq 0$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

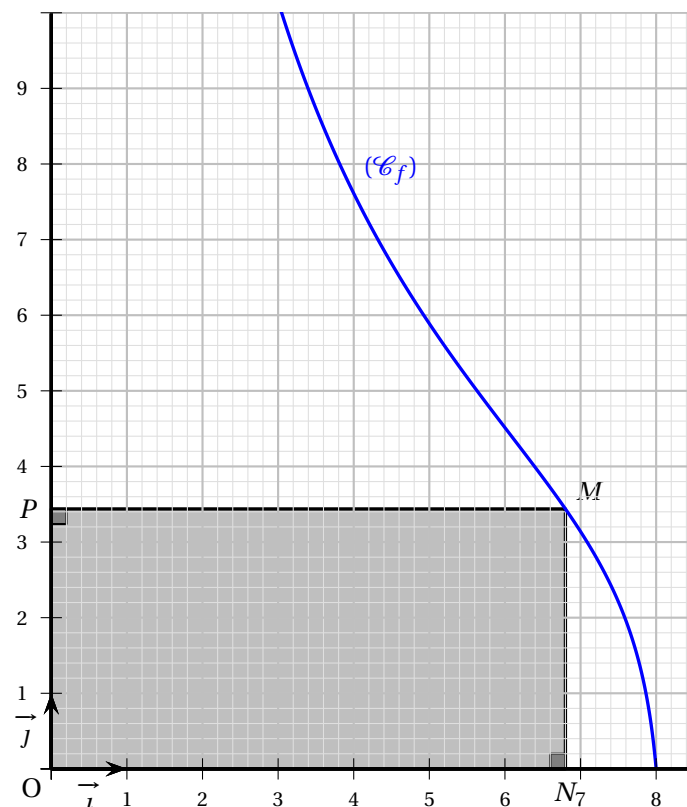
Partie B

La courbe C_f est représentée ci-dessous.

Soit M le point de C_f d'abscisse x avec $x \in]0; 8]$.

On appelle N et P les projetés orthogonaux du point M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'aire $\mathcal{A}(x)$ du rectangle $ONMP$.



1. Donner les coordonnées des points N et P en fonction de x .
2. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 8]$,

$$\mathcal{A}(x) = 10 \ln(-x^2 + 7x + 9)$$

3. Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire du rectangle $ONMP$ est maximale? Si elle existe, déterminer cette position.

Partie C

On considère un réel strictement positif k .

On souhaite déterminer la plus petite valeur de x , approchée au dixième, appartenant à $[3,5; 8]$ pour laquelle l'aire $\mathcal{A}(x)$ devient inférieure ou égale à k .

Pour ce faire, on considère l'algorithme ci-dessous.

Pour rappel, en langage Python, $\ln(x)$ s'écrit `log(x)`.

```

1  from math import *
2
3  def A(x) :
4      return 10*log (- 1* x**2 + 7*x + 9)
5
6  def pluspetitevaleur(k) :
7      x = 3.5
8      while A(x)..... :
9          x = x + 0.1
10     return .....
```

1. Recopier et compléter les lignes 8 et 10 de l'algorithme.
2. Quel nombre renvoie alors l'instruction `pluspetitevaleur(30)` ?
3. Que se passe-t-il lorsque $k = 35$? Justifier.

EXERCICE 16

Amérique du Sud 13 novembre 2025 - sujet 1

On se propose d'étudier la concentration dans le sang d'un médicament ingéré par une personne pour la première fois. Soit t le temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion de ce médicament.

On admet que la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre de sang, est modélisée par une fonction f de la variable t définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Partie A : lectures graphiques



On a représenté ci-dessus la courbe représentative de la fonction f . Avec la précision permise par le graphique, donner sans justification :

1. Le temps écoulé depuis l'instant de l'ingestion de ce médicament et l'instant où la concentration de médicament dans le sang est maximale selon ce modèle.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \geq 1$.
3. La convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

Partie B : détermination de la fonction f

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = 5e^{-t},$$

d'inconnue y , où y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On admet que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

1. Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.

2. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $u(t) = at e^{-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer la valeur du réel a telle que la fonction u soit solution de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. La personne n'ayant pas pris ce médicament auparavant, on admet que $f(0) = 0$.
Déterminer l'expression de la fonction f .

Partie C : étude de la fonction f

Dans cette partie, on admet que f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 5te^{-t}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation complet.
3. Démontrer qu'il existe deux réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 1$.
On donnera une valeur approchée à 10^{-2} des réels t_1 et t_2 .
4. Pour une concentration du médicament supérieure ou égale à 1 gramme par litre de sang, il y a un risque de somnolence.
Quelle est la durée en heures et minutes du risque de somnolence lors de la prise de ce médicament?

Partie D : concentration moyenne

La concentration moyenne du médicament (en gramme par litre de sang) durant la première heure est donnée par :

$$T_m = \int_0^1 f(t) dt$$

où f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 5te^{-t}$.

Calculer cette concentration moyenne.

On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près.

EXERCICE 17

Amérique du Sud 14 novembre 2025 - sujet 2

Partie A : dénombrement

On considère l'ensemble des nombres entiers relatifs **non nuls** compris entre -30 et 30 ; cet ensemble peut s'écrire ainsi : $\{-30 ; -29 ; -28 ; \dots -1 ; 1 ; \dots ; 28 ; 29 ; 30\}$. Il comporte 60 éléments.

On choisit dans cet ensemble successivement et sans remise un entier relatif a puis un entier relatif c .

1. Combien de couples $(a ; c)$ différents peut-on ainsi obtenir?

On considère l'évènement M : « l'équation $ax^2 + 2x + c = 0$ possède deux solutions réelles distinctes », où a et c sont les entiers relatifs précédemment choisis.

2. Montrer que l'évènement M a lieu si et seulement si $ac < 1$.
3. Expliquer pourquoi l'évènement contraire $\overline{M}$ comporte 1 740 issues.
4. Quelle est la probabilité de l'évènement M ? On arrondira le résultat à 10^{-2} .

Partie B : équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): y' + 10y = (30x^2 + 22x - 8) e^{-5x+1} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y' + 10y = 0$.
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1}.$$

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la fonction dérivée de la fonction f .

Justifier que f est une solution particulière de (E) .

3. Donner l'expression de toutes les solutions de (E) .

Partie C : étude de fonction

On propose d'étudier dans cette partie la fonction f rencontrée à la partie B question 2. On rappelle que, pour tout réel x , $f(x) = (6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f . On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$
2. En utilisant la partie A, montrer que $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points (les coordonnées de ces points ne sont pas attendues).
3. En utilisant les parties A et B, montrer que $\mathcal{C}_f$ possède deux tangentes horizontales.
4. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f .
5. Déterminer en justifiant le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 1$.
6. Pour tout réel m strictement supérieur à 0,2, on définit I_m par $I_m = \int_{0,2}^m f(x) dx$.
 - a. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \left(-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125} \right) e^{-5x+1}$$

est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

- b. Existe-t-il une valeur de m pour laquelle $I_m = 0$?
Interpréter graphiquement ce résultat.

On considère n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{1-x}.$$

On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0 ; 1]$ et on note f'_n sa fonction dérivée.

Partie A

Dans cette partie on étudie le cas où $n = 1$.

On étudie donc la fonction f_1 définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f_1(x) = x e^{1-x}.$$

1. Montrer que $f'_1(x)$ est strictement positive pour tout réel x de $[0 ; 1[$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
3. En déduire que l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

On admet que $u_1 = e - 2$.

1. a. Justifier que pour tout $x \in [0 ; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

- b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

- c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

- b. On considère le script Python ci-dessous définissant la fonction `suite()` :

```

from math import exp

def suite():
    u = ...
    for n in range (1, ...):
        u = ...
    return

```

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction `suite(n)` renvoie la valeur de $\int_0^1 x^8 e^{1-x} dx$.

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

- b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 19

Nouvelle-Calédonie 21 novembre 2025 - sujet 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

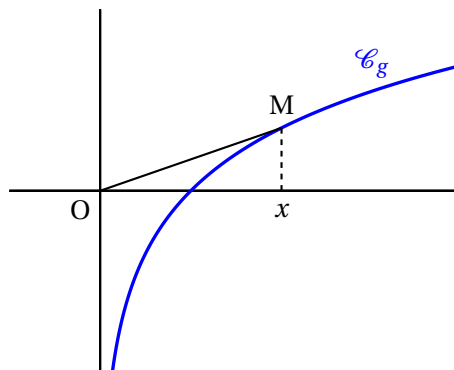
3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α , sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
b. Donner un encadrement du réel α d'amplitude 0,01.
c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x)$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé d'origine O . On considère un réel x strictement positif et le point M de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x . On note OM la distance entre les points O et M .

- a. Exprimer la quantité OM^2 en fonction du réel x .
- b. Montrer que, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la quantité OM^2 admet un minimum en α .
- c. La valeur minimale de la distance OM , lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0 ; +\infty[$, est appelée distance du point O à la courbe $\mathcal{C}_g$. On note d cette distance. Exprimer d à l'aide de α .



ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 1

Amérique du Nord - sujet 2 - 22 mai 2025

PARTIE A

1. a. Pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; \pi]$:

$$f'(x) = e^x \times \sin(x) + e^x \times \cos(x) = e^x (\sin(x) + \cos(x)).$$
- b. Par connaissance des fonctions trigonométriques, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geq 0$ et $\sin(x) \geq 0$
On précise que d'une part, $\sin(x) = 0$ seulement pour $x = 0$, et $\cos(0) = 1$, et d'autre part, $\cos(x) = 0$ seulement pour $x = \frac{\pi}{2}$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, donc les fonctions sinus et cosinus ne s'annulent pas en même temps.
La somme de deux réels positifs, dont l'un au moins est strictement positif est strictement positive, donc :
pour tout réel x de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) + \sin(x) > 0$.
D'autre part, pour tout réel x , $e^x > 0$
donc pour tout réel x de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) > 0$ en tant que produit de deux facteurs strictement positifs,
donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. a. L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est :
 $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = f'(0)x + f(0)$.
 $f(0) = e^0 \sin(0) = 1 \times 0 = 0$; (donné dans l'énoncé)
 $f'(0) = e^0 (\sin(0) + \cos(0)) = 1 \times (0 + 1) = 1$ (donné dans l'énoncé)
L'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donc
 $y = 1x + 0$ soit $y = x$.
- b. En anticipant la question 3., on va étudier la convexité de la fonction sur $[0; \pi]$.
Pour tout réel x de l'intervalle $[0; \pi]$:
 $f''(x) = e^x (\sin(x) + \cos(x)) + e^x (\cos(x) - \sin(x))$
 $= e^x (\sin(x) + \cos(x) + \cos(x) - \sin(x))$
 $= 2e^x \cos(x)$
On a le tableau de signes suivant :
- | | | | |
|-------------------|---|-----------------|-------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π |
| signe de $f''(x)$ | + | 0 | - |
- donc pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f''(x) > 0$
d'où la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- c. La courbe représentative d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier ici, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, d'équation $y = x$ (d'après la question précédente).
On a donc, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $e^x \sin(x) \geq x$.
3. On a vu précédemment que la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en $x = \frac{\pi}{2}$ donc le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx.$$

1. $x \mapsto e^x \sin(x)$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = e^x & \text{et} & u'(x) = e^x \\ v'(x) = \sin(x) & \text{et} & v(x) = -\cos(x) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = \left[u(x) v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

$$\text{d'où } I = \left[-\cos(x) e^x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (-\cos(x)) dx$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}} + \cos(0) e^0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$$

$$= 0 + 1 + J$$

$$= 1 + J$$

$x \mapsto e^x \sin(x)$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = \sin(x) & \text{et} & u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = e^x & \text{et} & v(x) = e^x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = \left[u(x) v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

$$\text{d'où } I = \left[\sin(x) e^x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}} + \sin(0) e^0 - J$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - J$$

On a donc bien :

$$I = 1 + J \quad \text{et} \quad I = e^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En ajoutant les deux équations précédentes on obtient : $2I = 1 + J + e^{\frac{\pi}{2}} - J$.

$$\text{d'où } I = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}.$$

3. D'après la question **Partie A 2.c.** pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$e^x \sin(x) \geq x \text{ c'est à dire } f(x) \geq g(x).$$

L'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ est donc égale à l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \sin(x) - x) dx$.

$$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \sin(x) - x) dx$$

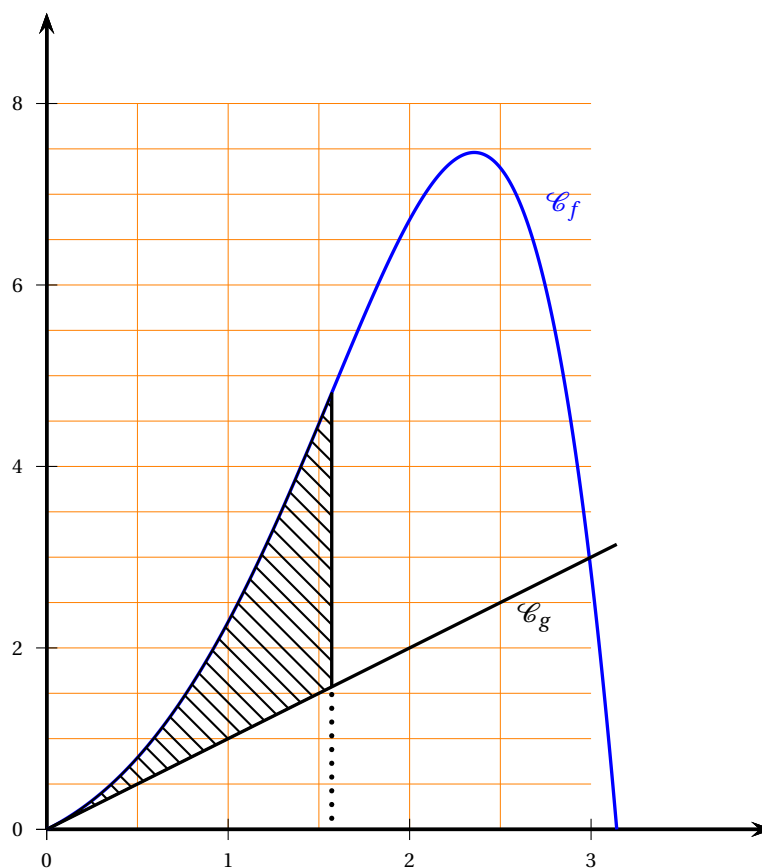
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$= I - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + 0$$

$$= \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8}$$

$$\text{L'aire cherchée est donc } \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8} \text{ u.a. } (\approx 1,67 \text{ u. a.})$$



ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 2

Amérique du Nord - sujet 2 secours - 22 mai 2025

Partie A : Étude de la fonction f

1. — Déterminons la limite quand x tend vers $-\infty$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x(e^{-x} + 2) - 1.$$

Avec $y = -x$, par composition, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$.

Donc, par limite de la somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + 2 = +\infty$.

Par limite du produit, il vient : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{-x} + 2) = -\infty$.

Enfin, par limite de la somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{-x} + 2) - 1 = -\infty$.

- Déterminons la limite quand x tend vers $+\infty$:

D'après la propriété des croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Par limite de l'inverse : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$.

Par ailleurs, 2 étant positif : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty$.

Par limite de la somme on en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} + 2x - 1 = +\infty$.

2. On a admis que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est la somme d'une fonction affine et d'un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) + 2 = (1 - x)e^{-x} + 2.$$

3. On a admis que f' est dérivable :

Pour tout réel x , on a :

$$f''(x) = -1 \times e^{-x} + (1 - x) \times (-e^{-x}) + 0 = (-1 - (1 - x))e^{-x} = (x - 2)e^{-x}.$$

On arrive bien à l'expression annoncée.

4. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc $f''(x)$ est du signe de $(x - 2)$.

— Sur l'intervalle $] -\infty ; 2]$, $(x - 2) \leq 0$, donc f'' est à valeurs négatives et donc f est **concave** sur $] -\infty ; 2]$.

— Sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, $(x - 2) \geq 0$, donc f'' est à valeurs positives et donc f est **convexe** sur $[2 ; +\infty[$.

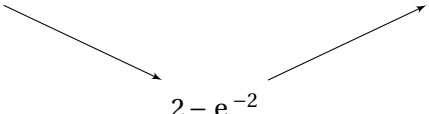
5. — Sur l'intervalle $] -\infty ; 2]$, f est concave, donc f' est décroissante.

— Sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, f est convexe, donc f' est croissante.

f' atteindra donc un minimum pour $x = 2$. On a :

$$f'(2) = (1 - 2)e^{-2} + 2 = 2 - e^{-2}$$

On peut donc établir le tableau de variations (sans limites, car non attendues ici) de f' .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$
variations de f'			

6. Comme on a $-2 < 0$, on en déduit, par croissance de la fonction exponentielle :

$$e^{-2} \leq e^0.$$

$$e^{-2} \leq e^0 \Rightarrow e^{-2} \leq 1$$

$$\Rightarrow -e^{-2} \geq -1 \quad \text{car } -1 < 0$$

$$\Rightarrow 2 - e^{-2} \geq 2 - 1$$

$$\Rightarrow 2 - e^{-2} \geq 1$$

Le minimum de f' est donc un réel supérieur à 1, donc strictement positif.

On en déduit que f' est donc une fonction à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, en conséquence, f est effectivement une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7. f est une fonction **continue** (car dérivable) et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. De plus 0 est une **valeur intermédiaire** entre $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

En vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, on en déduit qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

Par exploration à la calculatrice, on peut donner pour α l'encadrement au centième près suivant : $0,37 < \alpha < 0,38$.

8. Pour tout x réel, on a :

$$f(x) - (2x - 1) = x e^{-x}.$$

Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, on en déduit que cette différence entre l'ordonnée $f(x)$ d'un point sur C_f et celle $2x - 1$ du point partageant la même abscisse sur Δ est du signe de x .

Sur $\mathbb{R}^-$, la différence est donc négative, et on en déduit que la courbe C_f est **au-dessous** de la droite Δ .

Sur $\mathbb{R}^+$, au contraire, la différence est positive, et donc la courbe C_f est **au-dessus** de la droite Δ .

Partie B : Calcul d'aire

1. Pour tout x réel, on pose : $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x$.

On a donc, pour tout x réel : $v'(x) = 1$ et, par exemple : $u(x) = -e^{-x}$.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_1^n x e^x dx \\
&= \int_1^n v(x) \times u'(x) dx \\
&= \left[u(x) \times v(x) \right]_1^n - \int_1^n v'(x) \times u(x) dx \quad \text{c'est la formule d'intégration par parties} \\
&= \left[-e^{-x} \times x \right]_1^n - \int_1^n 1 \times (-e^{-x}) dx \\
&= \left(-ne^{-n} \right) - \left(-e^{-1} \right) + \int_1^n e^{-x} dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale.} \\
&= e^{-1} - ne^{-n} + \left[-e^{-x} \right]_1^n \\
&= e^{-1} - ne^{-n} + \left(-e^{-n} - (-e^{-1}) \right) \\
&= 2e^{-1} - (n+1)e^{-n}
\end{aligned}$$

On arrive donc à l'expression : $I_n = 2e^{-1} - (n+1)e^{-n}$.

2. a. Le domaine décrit est donc situé entre la courbe C_f et la droite Δ , pour les abscisses comprises entre 1 et n . Le nombre n étant choisi entier naturel non nul, l'ensemble des abscisses concernées est donc inclus dans $\mathbb{R}^+$, où la courbe C_f est au-dessus de la droite Δ , d'après la question A. 8., c'est-à-dire que :

$$\forall x \in [1; n], \quad 2x - 1 \leq f(x).$$

Pour obtenir l'aire de D_n , il faut donc intégrer la différence $f(x) - (2x - 1)$, entre 1 et n (car $1 \leq n$).

Comme, pour tout x réel, on a : $f(x) - (2x - 1) = xe^{-x}$, l'aire de D_n (exprimée en unité d'aire) est donc bien égale à I_n .

- b. On a, pour tout n entier naturel : $I_n = 2e^{-1} - (n+1)e^{-n} = 2e^{-1} - ne^{-n} - e^{-n}$.

Avec le même raisonnement que celui tenu à la question A. 1., on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ne^{-n} = 0.$$

$$\text{On a également : } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0.$$

$$\text{On a donc, par limite de la somme : } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 2e^{-1}.$$

On est donc dans la situation d'un domaine dont le périmètre tend vers $+\infty$, puisqu'il s'étend sur une amplitude en abscisse qui tend vers $+\infty$, mais dont la surface reste majorée.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 3

Asie 11 juin 2025 - sujet 1

On considère f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et on appelle C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^{\sqrt{x}}$

a. La fonction g est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$, donc $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = f(x).$$

b. La fonction f est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$, donc $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \times 2 \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{e^{\sqrt{x}} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{\frac{\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}.$$

2. a. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sqrt{x}} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{x} = 0$ avec $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

b. Donc C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

3. a. D'après les croissances comparées, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$ donc par composition de limites (en posant $u(x) = \sqrt{x}$) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. $\forall x \in]0; +\infty[$, $e^{\sqrt{x}} > 0$ et $4x\sqrt{x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $\sqrt{x} - 1$.
 $\sqrt{x} - 1 \geq 0 \iff \sqrt{x} \geq 1 \iff x \geq 1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{e}{2}$	$+\infty$

c. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$ à valeurs dans $\left[\frac{e}{2}; +\infty\right[$. Or $2 \in \left[\frac{e}{2}; +\infty\right[$ (car $\frac{e}{2} < 2$) donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution notée α dans $[1; +\infty[$.

À la calculatrice : $\alpha \approx 4,6$.

4. $I = \int_1^2 f(x) dx.$

a. $\forall x \in [1; 2]$, $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}}$. En remarquant que la dérivée de la fonction g est la fonction f , donc g est une primitive de f .

$$\text{Donc } I = \int_1^2 f(x) dx = [g(x)]_1^2 = [e^{\sqrt{x}}]_1^2 = e^{\sqrt{2}} - e$$

b. L'aire du domaine $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ est égale à $e^{\sqrt{2}} - e$.

I est donc l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

5. $\forall x \in]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(x - 3\sqrt{x} + 3)}{8x^2\sqrt{x}}$

a. On pose $\forall x \in]0; +\infty[$, $X = \sqrt{x}$.

$$x - 3\sqrt{x} + 3 = X^2 - 3X + 3.$$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$ donc $\forall X \in]0; +\infty[$, $X^2 - 3X + 3 > 0$ donc $\forall x \in]0; +\infty[$, $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$.

b. $\forall x \in]0; +\infty[, e^{\sqrt{x}} > 0$ et $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ et $8x^2\sqrt{x} > 0$ donc $f''(x) > 0$.

La fonction f est convexe sur $]0; +\infty[$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 4

Asie 12 juin 2025 - sujet 2

Partie A

- Par lecture graphique : La température initiale est $f(0) = 40$ et on observe que la température redescend à cette valeur pour $t \approx 3,8$ minutes.
- $f(t) = (at + b)e^{-0,5t}$ donc $f(0) = (a \times 0 + b) \times e^0 = b$ or $f(0) = 40$ donc $b = 40$.
- f est dérivable sur $[0; 10]$ comme produit de fonctions dérivables.
 $f = uv$ avec $u(t) = at + b$ et $v(t) = e^{-0,5t}$ donc $f' = u'v + v'u$ avec $u'(t) = a$ et $v'(t) = -0,5e^{-0,5t}$
donc pour tout $t \in [0; 10]$, $f'(t) = ae^{-0,5t} + (at + 40) \times (-0,5e^{-0,5t}) = (-0,5at + a - 20)e^{-0,5t}$
donc pour tout $t \in [0; 10]$, $f'(t) + 0,5f(t) = (-0,5at + a - 20)e^{-0,5t} + 0,5(at + 40)e^{-0,5t} = ae^{-0,5t}$
 f est solution de l'équation différentielle (E) donc $ae^{-0,5t} = 60e^{-0,5t} \Rightarrow a = 60$.

Partie B

- Pour tout $t \in [0; 10]$, $f'(t) = (-0,5at + a - 20)e^{-0,5t}$ avec $a = 60$ on obtient $f'(t) = (40 - 30t)e^{-0,5t}$
- Pour tout $t \in [0; 10]$, $e^{-0,5t} > 0$ donc $f'(t)$ a le même signe que $40 - 30t$.
 $40 - 30t \geq 0 \iff -30t \geq -40 \iff t \leq \frac{4}{3}$ On en déduit le tableau de signes de $f'(t)$ et le tableau de variations de f sur $[0; 10]$

y	0	$\frac{4}{3}$	10
Signes de $f'(t)$	+	0	-
Variations de f	40	$120e^{-\frac{2}{3}}$	$640e^{-5}$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(60 \times \frac{4}{3} + 40\right)e^{-0,5 \times \frac{4}{3}} = 120e^{-\frac{2}{3}} \approx 61,6; f(0) = 40 \text{ et } f(10) = 640e^{-5} \approx 4,31$$

- Sur $\left]0; \frac{4}{3}\right]$, $f(f) > 40$ donc l'équation $f(t) = 40$ n'a pas de solution.
Sur $\left[\frac{4}{3}; 10\right]$: d'après les valeurs approchées calculées dans la question précédentes, $f(\frac{4}{3}) > 40$ et $f(10) < 40$ donc $40 \in \left[\frac{4}{3}; 10\right]$

de plus f est continue (car dérivable) et strictement décroissante donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α dans $\left[\frac{4}{3}; 10\right]$
donc l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive sur $[0; 10]$ ‘

c. À l'aide de la calculatrice on trouve $\alpha \approx 3,8$

Interprétation : La température revient à sa valeur initiale de 40°C après environ 3,8 minutes.

3. a. $\int_0^4 f(t) dt = \int_0^4 (60t + 40) e^{-0,5t} dt.$

On pose $u(t) = 60t + 40$ et $v'(t) = e^{-0,5t}$ alors $u'(t) = 60$ et $v(t) = -2e^{-0,5t}$.

les fonctions u et v sont dérivables et leurs fonctions dérivées sont continues donc d'après la formules d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^4 (60t + 40) e^{-0,5t} dt &= [(60t + 40)(-2e^{-0,5t})]_0^4 - \int_0^4 -2 \times 60 e^{-0,5t} dt = \\ &= [(-120t - 80) e^{-0,5t}]_0^4 + 120 \int_0^4 e^{-0,5t} dt = -560e^{-2} + 80 + 120[-2e^{-0,5t}]_0^4 = \\ &= -560e^{-2} + 80 + 120(-2e^{-2} + 2) = -560e^{-2} + 80 - 240e^{-2} + 240 = 320 - 800e^{-2} = \\ &= 320 - \frac{800}{e^2} \end{aligned}$$

b. La température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes est :

$$\frac{1}{4} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{4} \left(320 - \frac{800}{e^2} \right) = 80 - \frac{200}{e^2} \approx 52,9$$

Donc la température moyenne est environ 53°C sur les 4 premières minutes.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 5

Centres étrangers 12 juin 2025 - sujet 1

Partie A :

1. D'une part : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} x + 1 = 0^+ \\ \lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty \end{cases}$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow -1} 4 \ln(x + 1) = -\infty$

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2}{25} = -\frac{1}{25}$
donc par somme $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$

2. f est dérivable sur $] -1 ; +\infty[$.

f est de la forme $4 \ln(u) - v$ avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = \frac{x^2}{25}$.

On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{2x}{25}$

Or $f' = 4 \frac{u'}{u} - v'$ donc :

Pour tout x appartenant à l'intervalle $] -1; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = 4 \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{25} = \frac{4 \times 25 - (x+1)2x}{25(x+1)} = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$

3. Pour tout x appartenant à l'intervalle $] -1; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$

$25(x+1) > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $100 - 2x - 2x^2$, fonction polynôme du second degré donc le coefficient dominant (-2) est négatif.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 100 \times (-2) = 804 > 0$$

$100 - 2x - 2x^2 = 0$ admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{804}}{2(-2)} = \frac{-1 + \sqrt{201}}{2} \approx 6,6$$

$$\text{et } x_2 = \frac{2 + \sqrt{804}}{2(-2)} = \frac{-1 - \sqrt{201}}{2} \approx -7,6 < -1$$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	-1	x_1	$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	-
variations de f		$f(x_1)$	

$[2; 6,5] \subset] -1; x_1[$ donc f est strictement croissante sur $[2; 6,5]$.

4. $h(2) = f(2) - 2 = 4 \ln(2+1) - \frac{2^2}{25} - 2 \approx 2,23$.

Sur l'intervalle $[2; m]$ la fonction h est strictement croissante, or $h(2) > 0$ donc sur $[2; m]$, $h(x) > 0$ et l'équation $h(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[m; 6,5]$, la fonction h est strictement décroissante et continue.

$$h(m) = M \approx 2,265 > 0$$

$$\text{et } h(6,5) = 4 \ln(6,5+1) - \frac{6,5^2}{25} - 6,5 \approx -0,13 < 0$$

0 est donc une valeur intermédiaire entre $h(m)$ et $h(6,5)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotone, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[m; 6,5]$.

Finalement, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2; 6,5]$.

5. a. Avec la calculatrice on trouve que les valeurs renvoyées par la commande bornes (2) sont : (6.36, 6.37)

b. Dans le contexte de l'exercice, un encadrement de α est $6,36 < \alpha < 6,37$.

Partie B :

1. Pour tout entier naturel n , on pose P_n , l'affirmation : « $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6,5$. ».

Initialisation : On a, d'une part : $u_0 = 2$,

Et, d'autre part : $u_1 = f(u_0) = f(2) \approx 4,23$

Donc $2 \leq u_0 \leq u_1 \leq 6,5$

Pour $n = 0$, l'affirmation P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n naturel, tel que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire :

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6,5.$$

On veut montrer que cela implique que l'affirmation P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6,5$

Or la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$ donc :

$$f(2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(6,5)$$

$$\text{or } f(2) \approx 4,23 > 2 \text{ et } f(6,5) \approx 6,37 < 6,5$$

donc, par définition de la suite u , $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6,5$

c'est l'inégalité P_{n+1}

Conclusion : L'affirmation est vraie au rang 0, et, pour tout rang naturel non nul, sa véracité est héréditaire, donc, en vertu du principe de démonstration par récurrence, on peut vérifier l'inégalité P_n pour tout entier naturel n .

2. Pour tout entier n , $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite u est croissante,
de plus pour tout entier n , $u_n \leq 6,5$ donc la suite u est majorée,
or toute suite croissante et majorée est convergente, donc la suite (u_n) converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leq 6,5$.

3. La suite u est une suite convergente vers une limite ℓ de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f fonction continue. D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ ou $h(x) = 0$

On sait de plus que cette limite appartient à l'intervalle $[2 ; 6,5]$ et que sur cet intervalle l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α on a donc $\ell = \alpha$.

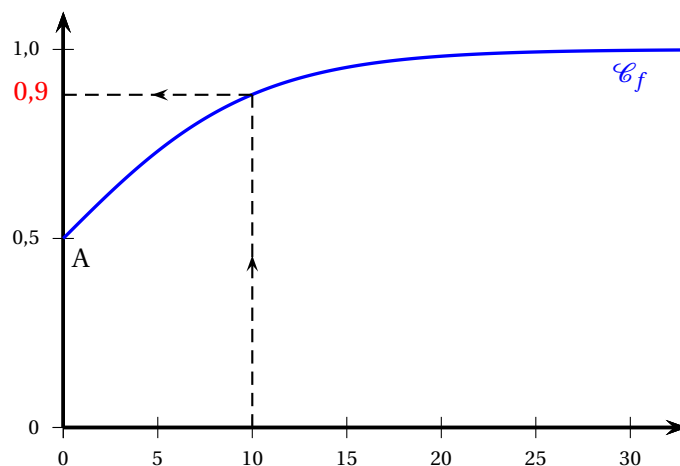
On rappelle que le réel α , défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 6

Centres étrangers 13 juin 2025 - sujet 2

Partie A

1. $1970 - 1960 = 10$. Donc on lit $f(10)$.



Dans la limite de précision du graphique, $f(10) \approx 0,9$.

2. Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.
3. $f(0) = \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{a+1} = \frac{1}{2} \iff a+1 = 2 \iff a = 1$.
4. Soit m ce coefficient directeur. $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0,5}{10} = 0,05$.
5. a. La fonction f est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$. $f(t)$ est de la forme $\frac{1}{u(t)}$, de dérivée $-\frac{u'(t)}{u^2(t)}$. Donc en posant $u(t) = a + e^{-bt}$, $u'(t) = -be^{-bt}$
Donc $\forall t \in [0; +\infty[$, $f'(t) = -\frac{-be^{-bt}}{(1 + e^{-bt})^2} = \frac{be^{-bt}}{(1 + e^{-bt})^2}$.
- b. Le nombre dérivée de f en 0 est égale à la pente de la droite (AB) , tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Donc $f'(0) = 0,05$ donc $\frac{b}{2^2} = 0,05$ donc $b = 4 \times 0,05 = 0,2$.

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que le taux d'équipement en réfrigérateurs est représenté par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(t) = \frac{1}{1 + e^{-0,2t}}$.

1. $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,2t} = 0$ (par composition). Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$.
2. La fonction f est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$, de la forme $\frac{1}{u(t)}$, de dérivée $-\frac{u'(t)}{u^2(t)}$.
Donc en posant $u(t) = 1 + e^{-0,2t}$, $u'(t) = -0,2e^{-0,2t}$, $\forall t \in [0; +\infty[$, $f'(t) = -\frac{-0,2e^{-0,2t}}{(1 + e^{-0,2t})^2}$
soit $f'(t) = \frac{0,2e^{-0,2t}}{(1 + e^{-0,2t})^2}$.
 $\forall t \in [0; +\infty[$, $0,2e^{-0,2t} > 0$ et $(1 + e^{-0,2t})^2 > 0$ donc $f'(t) > 0$ donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.
3. On a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$.
La fonction f est continue strictement croissante sur $[0; +\infty[$ à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
Or $0,97 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,97$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; +\infty[$.
4. Avec la calculatrice $\alpha \approx 17,4$ donc $\alpha \in]17; 18[$.

Partie C

1. $\forall t \in [0; +\infty[$, $f(t) = \frac{1}{1 + e^{-0,2t}}$. En multipliant numérateur et dénominateur par $e^{0,2t}$, on obtient : $f(t) = \frac{e^{0,2t}}{e^{0,2t}(1 + e^{-0,2t})} = \frac{e^{0,2t}}{e^{0,2t} + 1} = \frac{e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}}$.
2. f est de la forme $\frac{u'(t)}{u(t)}$, de primitive $\ln(u(t))$ (avec u fonction strictement positive car les deux termes du quotient sont strictement positifs) en posant $u(t) = 1 + e^{0,2t}$ et $u'(t) = 0,2e^{0,2t}$.

En écrivant $f(t) = \frac{e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}} = \frac{1}{0,2} \times \frac{0,2e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}} = 5 \times \frac{0,2e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}}$,

on détermine la fonction F , une primitive de f : $F(t) = 5 \ln(1 + e^{0,2t})$ pour $t \in [0 ; +\infty[$.

$$\begin{aligned} 3. \quad I &= \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{1}{1 + e^{-0,2t}} dt = \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}} dt = \frac{1}{40} [5 \ln(1 + e^{0,2t})]_0^{40} = \\ &= \frac{5}{40} (\ln(e^8 + 1) - \ln(2)) \\ &= \frac{1}{8} (\ln(e^8 + 1) - \ln(2)) = \frac{1}{8} \ln\left(\frac{e^8 + 1}{2}\right) \approx 0,913 \end{aligned}$$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 7

Métropole 17 juin 2025 - sujet 1

Partie A : Lectures graphiques

1. Le nombre dérivé $f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à C_f au point $A(1 ; 2)$.

La tangente T_A passe par le point $C(3 ; 0)$ son coefficient directeur est donc égal à

$$\frac{0 - 2}{3 - 1} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Donc $f'(1) = -1$.

2. $f'(x) = 0$ lorsque la tangente à la courbe est horizontale.
L'équation $f'(x) = 0$ admet donc 2 solutions dans l'intervalle $]0 ; 3]$ ce qui correspond à deux extremums de la fonction.
3. Graphiquement, sur l'intervalle $[0 ; 0,5]$ le graphe de la fonction semble concave donc on en déduit : $f''(0,2) < 0$.

Partie B : Étude de la fonction f

1. $2X^2 - 3X + 2 = 0$ est une équation du second degré. Déterminons son discriminant Δ :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0$$

Le discriminant est négatif donc cette équation n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

C_f coupe l'axe des abscisses à l'abscisse x est équivalent à $f(x) = 0$ soit

$$x(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2) = 0.$$

Or $x > 0$ donc $f(x) = 0 \iff 2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$

Posons pour $x > 0$, $X = \ln(x)$, l'équation devient : $2X^2 - 3X + 2 = 0$ or on vient de démontrer que cette équation n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$ donc C_f ne coupe pas l'axe des abscisses

$$2. f(x) = x(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2) = x(\ln x)^2 \left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2} \right).$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

d'où, d'une part : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty$

et, d'autre part $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\ln x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\ln x)^2} = 0 \end{cases}$ donc, par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{3}{\ln(x)} + \frac{2}{(\ln(x))^2} = 2$.

Et finalement, par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$3. \quad a. f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1.$$

Non demandé : f est dérivable comme produit de sommes de fonctions de x dérivables sur $]0; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 + x(4\ln x \times \frac{1}{x} - 3\frac{1}{x}) = 2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 + 4\ln x - 3 = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1.$$

On sait que u étant une fonction de x dérivable $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

Donc pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$:

$$f''(x) = 2 \times 2\ln x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - 0 = \frac{1}{x}(4\ln x + 1).$$

b. Pour déterminer la convexité de f , déterminons le signe de $f''(x)$.

Sur $]0; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $4\ln x + 1$

$$4\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{4}$$

$$\iff x = e^{-\frac{1}{4}}$$

$$4\ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -\frac{1}{4}$$

$$\iff x > e^{-\frac{1}{4}}$$

Donc $f''(x) \geq 0 \iff x \in [e^{-\frac{1}{4}}; +\infty[$: la fonction f est convexe sur cet intervalle.

D'où :

x	0	$e^{-\frac{1}{4}}$	$+\infty$
signe de $f''(x)$		- 0 +	

La fonction f est concave sur l'intervalle $]0; e^{-\frac{1}{4}}]$ et convexe sur l'intervalle $[e^{-\frac{1}{4}}; +\infty[$.

La valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion est $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0,779$.

c. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[e^{-\frac{1}{4}}; +\infty[$ or $e^{-\frac{1}{4}} < 1$

donc la fonction f est convexe sur l'intervalle $[1; +\infty[$

et donc sur cet intervalle, la courbe C_f est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier T_B .

Partie C : Calcul d'aire

1. L'équation réduite de la tangente T_B au point d'abscisse e est : $y = f'(e)(x - e) + f(e)$

$$f'(e) = 2(\ln e)^2 + \ln e - 1 = 2 \times 1 + 1 - 1 = 2;$$

$$f(e) = e(2(\ln e)^2 - 3\ln e + 2) = e(2 \times 1^2 - 3 + 2) = e \times 1 = e. \text{ (Ceci est dans l'énoncé mais pas clairement!)}$$

La tangente T_B a donc pour équation réduite $y = 2x - e$.

2. $x \mapsto x \ln x$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = \ln x & \text{et} & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x & \text{et} & v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues car dérivables sur $[1; e]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[1; e]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = \left[u(x) v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \int_1^e x \ln x dx &= \left[\ln x \times \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \left[\frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} \right] dx \\ &= \left(\ln e \times \frac{e^2}{2} \right) - \left(\ln 1 \times \frac{1^2}{2} \right) - \int_1^e \frac{x}{2} dx \\ &= 1 \times \frac{e^2}{2} - 0 - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{2e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f , la tangente T_B , et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

Sur l'intervalle $[1; e]$, la courbe C_f est au-dessus de la tangente T_B donc l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f , la tangente T_B , et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$ est égale, en unité d'aires, à $\int_1^e [f(x) - 2x + e] dx$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^e [f(x) - 2x + e] dx \\ &= \int_1^e [2x(\ln x)^2 - 3x \ln x + 2x - 2x + e] dx \\ &= 2 \int_1^e x(\ln x)^2 dx - 3 \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e e dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= 2 \times \frac{e^2 - 1}{4} - 3 \times \frac{e^2 + 1}{4} + [ex]_1^e \\ &= \frac{2e^2 - 2 - 3e^2 - 3}{4} + e^2 - e \\ &= \frac{-e^2 - 5}{4} + \frac{4e^2 - 4e}{4} \\ &= \frac{3e^2 - 5 - 4e}{4}. \end{aligned}$$

Soit une aire d'environ 1,57 unités d'aire.

La valeur exacte de $\mathcal{A}$ est $\frac{3e^2 - 4e - 5}{4}$ u.a.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 8

Polynésie 17 juin 2025 - sujet 1

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geq 1$

1. a. On dérive un produit de deux fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$. Soit x un réel positif :

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= nx^{n-1} \times e^{-x} + x^n \times (-e^{-x}) = (nx^{n-1} - x^n) e^{-x} \\ &= (n \times x^{n-1} - x \times x^{n-1}) e^{-x} = (n - x) x^{n-1} e^{-x} \end{aligned}$$

- b. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad e^{-x} > 0;$$

Sur $[0; +\infty[$, x est donc positif, et donc x^{n-1} est positif aussi;

Ainsi, $f'_n(x)$ est du signe du facteur $(n - x)$.

On a $n - x > 0 \iff n > x$, donc c'est pour cela que l'on a bien $f'_n(x) > 0$ sur $[0; n]$, de façon immédiate, $f'_n(n) = 0$ et, par élimination, $f'_n(x) < 0$ sur $]n; +\infty[$.

Le signe de $f'_n(x)$ est donc justifié.

Par conséquent, on en déduit les variations de f_n : sur $[0; n]$, f'_n est à valeurs positives, ne s'annulant que de façon isolée (pour $x = n$), donc f_n est strictement croissante sur $[0; n]$.

Sur $[n; +\infty[$, f'_n est à valeurs négatives, ne s'annulant que de façon isolée (pour $x = n$), donc f_n est strictement décroissante sur $[n; +\infty[$.

On calcule les images de 0 et n par f_n :

- $f_n(0) = 0^n \times e^{-0} = 0 \times 1 = 0$;
- $f_n(n) = n^n \times e^{-n} = n^n \times \frac{1}{e^n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$;

Enfin, calculons la limite de f_n quand x tend vers $+\infty$:

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f_n(x) = x^n e^{-x} = \frac{x^n}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x^n}}$$

La propriété des croissances comparées dit que, pour tout n naturel non nul :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty;$$

$$\text{Par limite du quotient, on en déduit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^n}} = 0.$$

La courbe $\mathcal{C}_n$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

On a ainsi justifié tous les éléments de ce tableau de variations.

2. Pour n entier naturel non nul, on a : $f_n(1) = 1^n \times e^{-1} = 1 \times e^{-1} = e^{-1}$.

Cela confirme que la courbe $\mathcal{C}_n$ contient bien le point $A(1; e^{-1})$.

Partie B : Étude des intégrales $\int_0^1 f_n(x) dx$ pour $n \geq 0$

1. a. La fonction f_0 est à valeurs positives sur $[0; 1]$, donc I_0 correspond à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par : la courbe $\mathcal{C}_0$, l'axe des abscisses, et les deux droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
- b. De la même façon, chaque intégrale I_n est la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses, et les deux droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Graphiquement, on conjecture que chacune de ces surface est incluse dans celles correspondant à un entier n plus petit, donc les aires sont de plus en plus petites, et la suite (I_n) semble décroître, en étant minorée par 0, la suite serait convergente, vers une limite positive, proche de 0, ou vers 0, en effet, l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_{100}$ est déjà très faible.

$$\begin{aligned}
2. \text{ On a : } I_0 &= \int_0^1 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^1 \\
&= (-e^{-1}) - (-e^{-0}) = -e^{-1} + e^0 \\
&= 1 - e^{-1}
\end{aligned}$$

3. a. Soit n un entier naturel.

$$x \in [0; 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \times x^n \leq x \times x^n \leq 1 \times x^n, \quad \text{car } x^n \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

On arrive bien à l'inégalité demandée.

b. Soient n un entier naturel et x un réel de $[0; 1]$. En multipliant l'inégalité précédente par e^{-x} , qui est un nombre réel supérieur à zéro, il vient :

$$0 \leq x^{n+1} e^{-x} \leq x^n e^{-x} \quad \text{soit} \quad 0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$

Comme on intègre entre 0 et 1, avec $0 < 1$, par positivité de l'intégrale, on en déduit :

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{soit} \quad 0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

4. D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel n , simultanément :

$$- 0 \leq I_n, \quad \text{donc la suite } (I_n) \text{ est minorée par } 0;$$

$$- I_{n+1} \leq I_n, \quad \text{donc la suite } (I_n) \text{ est décroissante};$$

La suite étant décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente, vers une limite ℓ supérieure ou égale à 0.

5. Soit n un entier naturel n .

$$\text{On pose : } \begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$$

Toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur $[0; 1]$, on a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^1 f_{n+1}(x) dx = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx = \int_0^1 u(x) \times v'(x) dx \\
&= \left[u(x) \times v(x) \right]_0^1 - \int_0^1 u'(x) \times v(x) dx \quad \text{formule d'intégration par parties} \\
&= \left[x^{n+1} \times (-e^{-x}) \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times (-e^{-x}) dx \\
&= (-1^{n+1} \times e^{-1}) - (-0^{n+1} \times e^{-0}) + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx \quad \text{par linéarité} \\
&= (n+1)I_n - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

On arrive bien à la relation de récurrence annoncée.

6. a. Supposons que la limite ℓ est supérieure à zéro.

$$\text{Alors, par limite du produit, on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_n = +\infty$$

$$\text{Puis par limite de la somme : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_n - \frac{1}{e} = +\infty.$$

Soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = +\infty$, autrement dit, la suite de terme général I_{n+1} **diverge** vers $+\infty$.

Or la suite de terme général I_{n+1} a la même limite que la suite de terme général I_n , qui elle **converge** vers un réel positif ℓ (dont on peut dire qu'il est inférieur à $I_0 = 1 - e^{-1}$).

L'unicité de la limite est donc en contradiction avec ces résultats.

b. Dans la question précédente, on a fait une supposition non étayée : on a supposé $\ell > 0$. Cette supposition conduisant à une contradiction, cela démontre, par l'absurde que l'on a $\ell \leq 0$.

Comme on savait, depuis la question 4., que ℓ est un réel positif, on peut donc en déduire que l'on a : $\ell = 0$.

La suite (I_n) converge donc vers 0.

7. Ici, l'appel `mystère(100)` renvoie une liste (stockée dans la variable `L`) contenant les valeurs (approchées) des 101 premiers termes de la suite, de I_0 à I_{100} .

En effet, `I` est initialisée (ligne 2) à la valeur I_0 , puis `L` est initialisée (ligne 3) en tant que liste contenant la valeur I_0 .

Ensuite, on rentre dans un boucle à $n = 100$ répétitions (pour `i` allant de 0 à 99), et dans chaque exécution, la variable `I` est mise à jour (ligne 5) en utilisant la relation de récurrence de la suite (I_n) , donc passe de la valeur d'un terme à la valeur du terme suivant dans la suite (I_n) . Cette nouvelle valeur est ensuite ajoutée à la fin de la liste `L` (ligne 7).

En sortie de boucle, on a donc appliqué 100 fois la relation de récurrence, donc la variable `I` contient bien la valeur (approchée de) $I_{0+100} = I_{100}$, qui a été la dernière ajoutée à la liste `L`.

Remarque ⚠

Si on fait effectivement tourner le script Python donné dans l'énoncé, les résultats sont manifestement faux à partir de $n = 18$ puisque les valeurs trouvées deviennent négatives!

Les calculs se font avec une valeur approchée de e et les erreurs se cumulent assez rapidement.

Les calculs effectués sur tableur ne donnent pas de meilleurs résultats.

En revanche, si on calcule les aires sous la courbe avec GeoGebra, les résultats semblent corrects, et la suite des intégrales tend effectivement vers 0.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 9

Polynésie 18 juin 2025 - sujet 2

1. Par lecture graphique, il semble que :

- la fonction f est strictement croissante sur son ensemble de définition ;
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$, $\mathcal{C}_f$ semblant présenter une asymptote d'équation $x = 2$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Résolvons l'équation sur $]2 ; +\infty[$:

$$f(x) = 0 \iff x \ln(x - 2) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou bien } \ln(x - 2) = 0 \quad \text{d'après la règle du produit nul}$$

$$\iff \ln(x - 2) = 0 \quad \text{car } x > 2 \text{ donc } x \neq 0$$

$$\iff \exp(\ln(x - 2)) = \exp(0) \quad \text{car } \exp \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}$$

$$\iff x - 2 = 1$$

$$\iff x = 3$$

L'équation a une unique solution : $x = 3$.

3. On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x - 2 = 0^+$ et donc, en posant $y = x - 2$, par composition, on en déduit :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \ln(x - 2) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \ln(y) = -\infty.$$

Par ailleurs, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x = 2$, donc, par limite du produit : $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} [x \times \ln(x - 2)] = -\infty$.

Cela confirme à la fois la conjecture sur la limite en 2 (en effet, comme f n'est définie que sur $]2; +\infty[$, la limite en 2 est la limite à droite en 2), et cela confirme aussi la conjecture sur l'asymptote d'équation $x = 2$, qui est l'interprétation graphique de cette limite.

4. Si $u : x \mapsto x - 2$ alors $u' : x \mapsto 1$.

Ainsi $x \mapsto \ln(x - 2)$ est la composée $\ln \circ u$ et donc se dérive en :

$$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{x - 2}.$$

On dérive un produit de fonctions dérivables sur $]2; +\infty[$.

Pour tout réel strictement supérieur à 2, on a :

$$f'(x) = 1 \times \ln(x - 2) + x \times \frac{1}{x - 2} = \ln(x - 2) + \frac{x}{x - 2}.$$

On arrive bien à l'expression annoncée pour $f'(x)$.

5. a. On a : $g'(x) = f''(x) = \frac{1}{x - 2} + \frac{1 \times (x - 2) - x \times 1}{(x - 2)^2}$

$$= \frac{1}{(x - 2)} + \frac{-2}{(x - 2)^2} = \frac{x - 2}{(x - 2)^2} + \frac{-2}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{x - 4}{(x - 2)^2}$$

On arrive bien à la forme demandée.

- b. $g'(x)$ est le quotient de $(x - 4)$ par $(x - 2)^2$.

Le dénominateur étant le carré d'un réel non nul, il est strictement positif, donc $g'(x)$ a le signe de $(x - 4)$. On peut donc établir le tableau de variations suivant :

x	2	4	$+\infty$
signe de $x - 4$		-	0
signe de $g'(x)$		-	0
variations de g		$+\infty$	$+\infty$

$$\text{On a : } g(4) = f'(4) = \ln(4 - 2) + \frac{4}{4 - 2} = \ln(2) + \frac{4}{2} = 2 + \ln(2).$$

- c. En observant le tableau de variations précédent, on a :

$$2 > 1 \implies \ln(2) > 0 \text{ donc on a } g(4) \geq 2 > 0.$$

Donc, les variations de g indiquent que g atteint un minimum égal à $g(4) > 0$, pour $x = 4$.

On en déduit que la fonction g est à valeurs strictement positives sur $]2; +\infty[$.

- d. Puisque g est la fonction dérivée f' , on en déduit que f' est à valeurs strictement positives sur $]2; +\infty[$, et donc que f est strictement croissante sur $]2; +\infty[$.

6. On a établi les variations de $g = f'$ à la question 5. b. :

— sur $]2; 4]$, f' est décroissante, donc f est concave;

— sur $]4; +\infty[$, f' est croissante, donc f est convexe.

f change de convexité en $x = 4$, donc le point de coordonnées $(4; f(4))$, est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

On a $f(4) = 4 \times \ln(4 - 2) = 4 \ln(2) = \ln(2^4) = \ln(16)$.

Les coordonnées exactes du point d'inflexion sont donc $(4; \ln(16))$.

7. $\mathcal{C}_f$ admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 au point d'abscisse x si et seulement si $f'(x) = 3$, ou encore $g(x) = 3$.

On a $g(4) = 2 + \ln(2) \approx 2,7$. On a donc :

- Sur $]2; 4]$, g est strictement décroissante, et continue (car dérivable), et 3 est une valeur strictement comprise entre $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = +\infty$ et $g(4) = 2 + \ln(2) \approx 2,7$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, il existe une unique solution à l'équation $g(x) = 3$ dans l'intervalle $]2; 4]$, notée α ;
- De façon analogue, sur $]4; +\infty[$, g est strictement croissante, et continue (car dérivable), et 3 est une valeur strictement comprise entre $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) \approx 2,7$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Il existe aussi une unique solution à l'équation $g(x) = 3$ dans l'intervalle $]4; +\infty[$, notée β ;

Ainsi, l'équation $f'(x) = 3$ équivalente à $g(x) = 3$ admet exactement deux solutions α et β sur $]2; +\infty[$.

Il y a donc exactement deux valeurs de x (α et β) pour lesquelles la tangente à $\mathcal{C}_f$ a un coefficient directeur égal à 3.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 10

Polynésie 2 septembre 2025 - sujet 1

On étudie l'évolution de la population d'une espèce animale au sein d'une réserve naturelle. Les effectifs de cette population ont été recensés à différentes années. Les données collectées sont présentées dans le tableau suivant :

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100

Pour anticiper l'évolution de cette population, la direction de la réserve a choisi de modéliser le nombre d'individus en fonction du temps. Pour cela, elle utilise une fonction, définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, dont la variable x représente le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2000. Dans son modèle, l'image de 0 par cette fonction vaut 50, ce qui correspond au nombre d'individus en l'an 2000.

Partie A. Modèle 1

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante : $y' = 0,05y - 0,5$ (E_1)

1. On résout l'équation différentielle (E_1) avec la condition initiale $y(0) = 50$.

- L'équation différentielle $y = ay$ a pour solutions les fonctions y vérifiant $y(x) = C e^{ax}$ où C est un réel quelconque.
Donc l'équation différentielle $y = 0,05y$ a pour solutions les fonctions y vérifiant $y(x) = C e^{0,05x}$ où C est un réel quelconque.
- On cherche une solution particulière constante k à l'équation (E_1).
On a donc $0 = 0,05k - 0,5$ donc $k = 10$.
- Les solutions de l'équation (E_1) sont donc les fonctions y définies par $y(x) = C e^{-0,05x} + 10$ où $C \in \mathbb{R}$.
- On cherche la solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 50$.
On a donc $C e^0 + 10 = 50$ donc $C = 40$.

La solution de l'équation différentielle (E_1) vérifiant $y(0) = 50$ est la fonction y définie par $y(x) = 40 e^{0,05x} + 10$.

2. On compare les résultats du tableau avec ceux que l'on obtiendrait avec ce modèle.

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100
x	0	5	10	15
$y(x)$	50	61,36	75,95	94,68

Partie B. Modèle 2

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante : $y' = 0,05y(1 - 0,00125y)$ (E_2).

On note f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$,
et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.

	Instruction	Résultat
1	$f(x) := \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$	$f(x) = \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$
2	$f'(x) := \text{Dérivée}(f(x))$	$f'(x) = \frac{600e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^2}$
3	$f''(x) := \text{Dérivée}(f'(x))$	$f''(x) = \frac{30e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^3} (15e^{-0,05x} - 1)$
4	Résoudre ($15e^{-0,05x} - 1 \geq 0$)	$x \leq 20 \ln(15)$

1. On a d'une part : $f(0) = \frac{800}{1+15e^0} = \frac{800}{16} = 50$

D'autre part :

- $0,05f(x) = \frac{0,05 \times 800}{1+15e^{-0,05x}} = \frac{40}{1+15e^{-0,05x}}$
- $0,00125f(x) = \frac{0,00125 \times 800}{1+15e^{-0,05x}} = \frac{1}{1+15e^{-0,05x}}$
- $1 - 0,00125f(x) = 1 - \frac{1}{1+15e^{-0,05x}} = \frac{1+15e^{-0,05x} - 1}{1+15e^{-0,05x}} = \frac{15e^{-0,05x}}{1+15e^{-0,05x}}$
- $0,05f(x)(1 - 0,00125f(x)) = \frac{40}{1+15e^{-0,05x}} \times \frac{15e^{-0,05x}}{1+15e^{-0,05x}} = \frac{40 \times 15e^{-0,05x}}{(1+15e^{-0,05x})^2}$

$$= \frac{600e^{-0,05x}}{(1+15e^{-0,05x})^2} = f'(x) \text{ d'après le tableau}$$

On admet que cette fonction f est l'unique solution de (E_2) prenant la valeur initiale de 50 en 0.

2. Avec ce nouveau modèle f , l'effectif de cette population en 2050 peut être estimé à $f(50)$ soit environ 358.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -0,05x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,05x} = 0$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1+15e^{-0,05x} = 1$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{800}{1+15e^{-0,05x}} = 800$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 800$, ce qui prouve que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = 800$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

4. Sur $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{600e^{-0,05x}}{(1+15e^{-0,05x})^2}$.

Or pour tout réel X , on sait que $e^X > 0$, donc $e^{-0,05x} > 0$ pour tout x .
 $(1+15e^{-0,05x})^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

On en conclut que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.

5. On résout l'inéquation $15e^{-0,05x} - 1 \geq 0$.

$$15e^{-0,05x} - 1 \geq 0 \iff 15e^{-0,05x} \geq 1 \iff e^{-0,05x} \geq \frac{1}{15} \iff -0,05x \geq \ln\left(\frac{1}{15}\right)$$

$$\iff x \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{15}\right)}{-0,05} \iff x \leq \frac{-\ln(15)}{-0,05} \iff x \leq 20 \ln(15)$$

6. On admet que la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an, est modélisée par la fonction f' .

a. Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$, on détermine le signe de la dérivée seconde $f''(x)$.

D'après le tableau : $f''(x) = \frac{30e^{-0,05x}}{(1+15e^{-0,05x})^3} (15e^{-0,05x} - 1)$.

D'après ce qui a été vu précédemment, $f''(x)$ est du signe de $(15e^{-0,05x} - 1)$.

x	0	$20 \ln(15)$	$+\infty$
$15e^{-0,05x} - 1$	+	0	-
$f''(x)$	+	0	-
	f convexe		f concave

En $x = 20 \ln(15)$, $f''(x)$ s'annule et change de signe, donc la courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion.

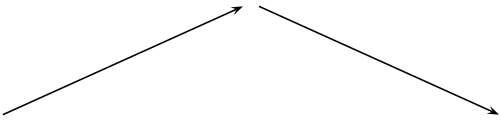
Si $x = 20 \ln(15)$, $15e^{-0,05x} - 1 = 0$ donc $15e^{-0,05 \times 20 \ln(15)} = 1$

$$f(20 \ln(15)) = \frac{800}{1 + 15e^{-0,05 \times 20 \ln(15)}} = \frac{800}{1 + 1} = 400$$

Donc le point de coordonnées $(20 \ln(15), 400)$ est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

- b. La direction de la réserve affirme : « Au vu de ce modèle, la vitesse de croissance de la population de cette espèce va augmenter pendant un peu plus de cinquante ans, puis va diminuer ».

On établit le tableau de variations de la fonction f' qui modélise la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an.

x	0	$20 \ln(15)$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
f'			

Or $20 \ln(15) \approx 54,2$ donc la direction a raison.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 1 I

Métropole 9 septembre 2025 - sujet 1

Partie A

1. Dérivons la fonction u : $\forall t \in \mathbb{R}, u'(t) = 1 \times e^{-0,4t} + t \times (-0,4) e^{-0,4t}$
 $= e^{-0,4t} - 0,4t e^{-0,4t}$
 $= (1 - 0,4t) e^{-0,4t}$

Vérifions que u est solution de (E) :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, u'(t) + 0,4u(t) &= (1 - 0,4t) e^{-0,4t} + 0,4 \times t e^{-0,4t} \\ &= e^{-0,4t} - 0,4t e^{-0,4t} + 0,4t e^{-0,4t} \\ &= e^{-0,4t} \end{aligned}$$

Donc u est bien solution de (E).

2. a. Soit $g = f - u$ avec g solution de (H).

Comme g est une solution de (H), on a : $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) + 0,4g(t) = 0$.

Or $g = f - u$, donc $g' = f' - u'$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) + 0,4g(t) = 0 &\iff f'(t) - u'(t) + 0,4(f(t) - u(t)) = 0 \\
&\iff f'(t) - u'(t) + 0,4f(t) - 0,4u(t) = 0 \\
&\iff f'(t) + 0,4f(t) = u'(t) + 0,4u(t) \\
&\iff f'(t) + 0,4f(t) = e^{-0,4t}
\end{aligned}$$

La dernière équivalence se justifie car u étant une solution particulière de (E), on a bien : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) + 0,4u(t) = e^{-0,4t}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Donc f est solution de (E).

b. L'équation (H) : $y' + 0,4y = 0$ est de la forme $y' = -0,4y$.

Les solutions sont les fonctions de la forme : $g : t \mapsto C e^{-0,4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

c. D'après les questions précédentes, f est solution de (E) si et seulement si $g = f - u$ est solution de (H).

Donc si et seulement si on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) - u(t) = C e^{-0,4t}$

Les solutions de (E) sont les fonction f telles que : $f : t \mapsto t e^{-0,4t} + C e^{-0,4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

C'est-à-dire les fonction f telles que : $f : t \mapsto (t + C) e^{-0,4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

d. Ici, on introduit une condition initiale, on veut avoir : $f(0) = 1$.

$$f(0) = 1 \iff (0 + C) e^0 = 1$$

$$\iff C = 1$$

Donc la fonction f cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = (t + 1) e^{-0,4t}$.

Partie B

On remarque que la fonction f présentée est la solution que nous avons identifiée à la partie A.

1. a. f étant une solution de l'équation (E) sur $[0 ; 6]$, on a :

$$f' + 0,4f = e^{-0,4t} \iff f' = -0,4f + e^{-0,4t}$$

$$\begin{aligned}
\text{Et donc : } \forall t \in [0 ; 6] : \quad f'(t) &= -0,4f(t) + e^{-0,4t} \\
&= -0,4(t + 1) e^{-0,4t} + e^{-0,4t} \\
&= (-0,4t - 0,4 + 1) e^{-0,4t} \\
&= (-0,4t + 0,6) e^{-0,4t}
\end{aligned}$$

Remarque : on peut aussi obtenir cette expression en dérivant l'expression donnée pour f avec les formules classiques de dérivation.

b. Étude du signe de $f'(t)$ sur $[0 ; 6]$:

La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc $e^{-0,4t} > 0$ pour tout t , donc le signe de $f'(t)$ est celui de $-0,4t + 0,6$.

$$-0,4t + 0,6 > 0 \iff -0,4t > -0,6$$

$$\iff t < \frac{-0,6}{-0,4} \quad \text{car } -0,4 < 0$$

$$\iff t < 1,5$$

Tableau de variations :

x	0	1,5	6
signe de $f'(x)$	+	0	-
variations de f			

Avec $f(0) = 1$, $f(1,5) = 2,5e^{-0,6} \approx 1,37$ et $f(6) = 7e^{-2,4} \approx 0,63$.

2. a. Sur $[0 ; 1,5]$, f est strictement croissante avec $f(0) = 1 > 0,7$: l'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.

Sur $[1,5 ; 6]$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante et 0,7 est une valeur intermédiaire entre $f(1,5) \approx 1,37$ et $f(6) \approx 0,63$.

D'après le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(t) = 0,7$ admet une unique solution α sur $[1,5 ; 6]$.

Finalement, l'équation $f(t) = 0,7$ admet bien une unique solution sur $[0 ; 6]$.

- b. Par approximations successives, ou en utilisant le solveur de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 5,62$ heures (on donne une approximation au centième près, car la précision attendue est à la minute, qui est un soixantième d'heure).

$0,62 \times 60 \approx 37$ minutes.

La personne est en hypoglycémie au bout de 5 heures et 37 minutes après le repas.

3. a. Calcul de $\int_0^6 f(t) dt = \int_0^6 (t+1)e^{-0,4t} dt$.

On pose, pour tout t dans $[0 ; 6]$: $u(t) = t+1$ et $v'(t) = e^{-0,4t}$

puis $u'(t) = 1$ et $v(t) = \frac{1}{-0,4} e^{-0,4t} = -2,5e^{-0,4t}$.

Les fonctions u , u' , v et v' sont continues sur $[0 ; 6]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^6 (t+1)e^{-0,4t} dt &= \int_0^6 u(t)v'(t) dt \\ &= \left[u(t)v(t) \right]_0^6 - \int_0^6 u'(t)v(t) dt \\ &= \left[(t+1) \times (-2,5e^{-0,4t}) \right]_0^6 - \int_0^6 1 \times (-2,5e^{-0,4t}) dt \\ &= \left[-2,5(t+1)e^{-0,4t} \right]_0^6 + 2,5 \int_0^6 e^{-0,4t} dt \\ &= (-2,5 \times 7e^{-2,4}) - (-2,5 \times 1 \times e^0) + 2,5 \left[-2,5e^{-0,4t} \right]_0^6 \\ &= -17,5e^{-2,4} + 2,5 + 2,5 \left[(-2,5e^{-2,4}) - (-2,5e^0) \right] \\ &= -17,5e^{-2,4} + 2,5 - 6,25e^{-2,4} + 6,25 \\ &= -23,75e^{-2,4} + 8,75 \end{aligned}$$

- b. La glycémie moyenne pendant la période de six heures est donc donnée par la valeur moyenne de la fonction f (qui donne la glycémie instantanée en fonction du temps) sur l'intervalle $[0 ; 6]$ (le temps étant mesuré en heures).

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{6-0} \int_0^6 f(t) dt &= \frac{1}{6} (-23,75e^{-2,4} + 8,75) \\ &= \frac{95e^{-2,4} + 35}{24} \quad (\text{ceci est la valeur exacte}) \\ &\approx 1,099 \quad \text{valeur approchée au millième} \end{aligned}$$

La glycémie moyenne lors des six heures suivant le repas est donc d'environ $1,10 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$.

- c. Comme f est solution de (E), on a : $f' + 0,4f = e^{-0,4t}$.

En définissant, comme à la question 3. a., les fonctions v' et v par :

$v'(t) = e^{-0,4t}$ et $v(t) = -2,5e^{-0,4t}$, on a :

$$\begin{aligned}
f' + 0,4f &= e^{-0,4t} \iff f' + 0,4f = v' \\
&\iff 0,4f = v' - f' \\
&\iff f = 2,5(v' - f')
\end{aligned}$$

On en déduit qu'une primitive de f peut s'exprimer sous la forme :

$$F: t \mapsto 2,5(v(t) - f(t))$$

$$\begin{aligned}
\text{Soit : } \forall t \in [0; 6], \quad F(t) &= 2,5(-2,5e^{-0,4t} - (t+1)e^{-0,4t}) \\
&= 2,5(-2,5 - (t+1))e^{-0,4t} \\
&= 2,5(-3,5 - t)e^{-0,4t} \\
&= (-8,75 - 2,5t)e^{-0,4t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{On a alors : } \int_0^6 f(t) dt &= \left[(-8,75 - 2,5t)e^{-0,4t} \right]_0^6 \\
&= (-8,75 - 2,5 \times 6)e^{-0,4 \times 6} - (-8,75 - 2,5 \times 0)e^{-0,4 \times 0} \\
&= -23,75e^{-2,4} + 8,75
\end{aligned}$$

Cela confirme bien le résultat obtenu à la question 3. a..

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 12

Métropole 10 septembre 2025 - sujet 2

Partie A

1. $-x^2 + 7x + 8 = 0$ admet -1 comme solution évidente. L'autre solution de l'équation du second degré est donc 8.

Le trinôme est négatif (du signe du coefficient de x^2), sauf entre les racines, d'où le tableau de signes de $x \mapsto -x^2 + 7x + 8$:

x	$-\infty$	-1	8	$+\infty$
signe de $-x^2 + 7x + 8$		-	+	-

L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2 + 7x + 8 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ est l'intervalle $[-1; 8]$

2. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; 8]$, $-x^2 + 7x + 8 \geq 0$. D'où en ajoutant 1 à chaque membre $-x^2 + 7x + 9 \geq 1$.

Comme la fonction logarithme népérien est une fonction croissante on a pour tout x appartenant à $]0; 8]$, $\ln(-x^2 + 7x + 9) \geq \ln(1)$. C'est à dire $\ln(-x^2 + 7x + 9) \geq 0$.

Pour tout x appartenant à $]0; 8]$, $x > 0$ et $10 \ln(-x^2 + 7x + 9) \geq 0$, donc $f(x) = \frac{10 \ln(-x^2 + 7x + 9)}{x} \geq 0$.

3. Sur l'intervalle $[0; 8]$ la courbe représentative est au dessus de l'axe des abscisses.

Partie B

1. Pour $x \in]0 ; 8]$, $M\left(x, \frac{10\ln(-x^2 + 7x + 9)}{x}\right)$ et donc $N(x, 0)$ et $P\left(0, \frac{10\ln(-x^2 + 7x + 9)}{x}\right)$.

2. Comme pour $x \in]0 ; 8]$, l'abscisse de N est positive et l'ordonnée de P est positive.

On peut écrire $ON = x$ et $OP = \frac{10\ln(-x^2 + 7x + 9)}{x}$.

L'aire de ONMP vaut $ON \times OP$ donc :

$$\forall x \in]0 ; 8] \quad \mathcal{A}(x) = x \times \frac{10\ln(-x^2 + 7x + 9)}{x} = 10\ln(-x^2 + 7x + 9)$$

3. Sur $]0 ; 8]$, $-x^2 + 7x + 9 > 0$ donc $\mathcal{A}$ est une fonction dérivable de la variable x sur $]0 ; 8]$ comme composée de fonction définies et dérivables.

$$\forall x \in]0 ; 8[, \mathcal{A}'(x) = 10 \times \frac{-2x + 7}{-x^2 + 7x + 9}.$$

S'il existe $x \in]0 ; 8]$ telle que $\mathcal{A}(x)$ soit maximale, il faut que $\mathcal{A}'(x) = 0$

Pour $x \in]0 ; 8]$, $-x^2 + 7x + 9 > 0$, $\mathcal{A}'(x)$ est donc du signe de $-2x + 7$.

$$\mathcal{A}'(x) \geq 0 \iff -2x + 7 \geq 0$$

$$\mathcal{A}'(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{7}{2}$$

$\mathcal{A}$ est croissante sur $\left]0 ; \frac{7}{2}\right]$ et décroissante sur $\left]\frac{7}{2} ; 8\right]$.

La dérivée s'annule en $\frac{7}{2}$, en étant positive avant puis négative après, donc la fonction $\mathcal{A}$ a un maximum sur $]0 ; 8]$:

$$\mathcal{A}\left(\frac{7}{2}\right) = 10\ln(17) + 10\ln(5) - 20\ln(2) \approx 30,56$$

Partie C

1.

```
1 from math import *
2
3 def A(x):
4     return 10*log(-1 * x**2 + 7*x + 9)
5
6 def pluspetitevaleur(k):
7     x = 3.5
8     while A(x) > k:
9         x = x + 0.1
10    return x
```

2. `>>>pluspetitevaleur(30)`

4.5999999999999998

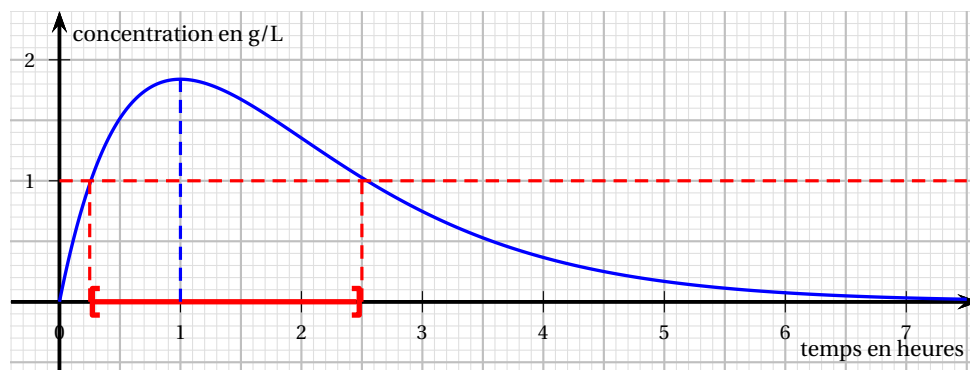
3. Lorsque $k = 35$, la condition $A(x) > 35$ n'est pas vérifiée donc le contenu de la boucle n'est pas exécuté. L'appel `pluspetitevaleur(35)` renvoie 3.5.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 13

Amérique du Sud 13 novembre 2025 - sujet 1

On se propose d'étudier la concentration dans le sang d'un médicament ingéré par une personne pour la première fois. Soit t le temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion de ce médicament. On admet que la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre de sang, est modélisée par une fonction f de la variable t définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Partie A : lectures graphiques



On a représenté ci-dessus la courbe représentative de la fonction f .

Avec la précision permise par le graphique, on donne sans justification :

1. Le temps écoulé depuis l'instant de l'ingestion de ce médicament et l'instant où la concentration de médicament dans le sang est maximale selon ce modèle : 1 heure.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \geq 1$: l'intervalle $[0,25 ; 2,5]$.
3. La convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 8]$: la fonction semble concave entre 0 et 2, puis convexe.

Partie B : détermination de la fonction f

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = 5e^{-t}$,

d'inconnue y , où y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On admet que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

1. On résout l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.

D'après le cours, on sait que les équations différentielles de la forme $ay' + by = 0$ ont des solutions y s'écrivant $y(t) = ke^{-\frac{b}{a}t}$ où k est un réel quelconque.

Donc l'équation (E') a pour solutions les fonctions y s'écrivant $y(t) = ke^{-t}$ où $k \in \mathbb{R}$.

2. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $u(t) = ate^{-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

La fonction u est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $u'(t) + u(t) = 5e^{-t}$.

$$u(t) = ate^{-t} \text{ donc } u'(t) = a \times e^{-t} + at \times (-1)e^{-t} = ae^{-t} - ate^{-t}$$

$$u'(t) + u(t) = 5e^{-t} \iff ae^{-t} - ate^{-t} + ate^{-t} = 5e^{-t} \iff ae^{-t} = 5e^{-t} \iff a = 5$$

car $e^{-t} \neq 0$ pour tout t .

Donc la fonction u définie par $u(t) = 5te^{-t}$ est une solution de (E).

3. La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation sans second membre (E') : ce sont donc les fonctions f définies par $f(t) = k e^{-t} + 5t e^{-t}$ où $k \in \mathbb{R}$.

4. La personne n'ayant pas pris ce médicament auparavant, on admet que $f(0) = 0$.

$$f(0) = 0 \iff k e^0 + 5 \times 0 \times e^0 = 0 \iff 0$$

L'expression de la fonction f est $f(t) = 5t e^{-t}$.

Partie C : étude de la fonction f

Dans cette partie, on admet que f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 5t e^{-t}$.

1. On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} 5t e^{-t} = 0$, et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$

Cela signifie que la concentration en médicament devient nulle quand le temps augmente indéfiniment.

2. f est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

$$f(t) = 5t e^{-t} \text{ donc } f'(t) = 5 \times e^{-t} + 5t \times (-1) e^{-t} = (5 - 5t) e^{-t}$$

On étudie le signe de $f'(t)$ sur $[0 ; +\infty[$.

t	0	1	$+\infty$
$5 - 5t$	+	0	-
e^{-t}	+		+
$f'(t)$	+	0	-

$$f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 5 \times 1 \times e^{-1} = 5e^{-1}$$

On établit le tableau de variation complet de f sur $[0 ; +\infty[$.

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
f	0	$5e^{-1}$	0

3. On veut montrer qu'il existe deux réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 1$.

Le maximum de la fonction f est $f(1) = 5e^{-1} \approx 1,84 > 1$.

On complète le tableau de variation de f .

t	0	t_1	1	t_2	$+\infty$
f	0	1	$5e^{-1}$	1	0

- Sur l'intervalle $]0 ; 1[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $1 \in]f(0) ; f(1)[$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 1$ admet une solution unique dans $]0 ; 1[$. On l'appelle t_1 .

D'après la calculatrice : $f(0,25) \approx 0,97 < 1$ et $f(0,26) \approx 1,002 > 1$ donc 0,25 est une valeur approchée de t_1 à 10^{-2} .

- Sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus $1 \in \left] \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) ; f(1) \right[$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 1$ admet une solution unique dans $]1 ; +\infty[$. On l'appelle t_2 .

D'après la calculatrice : $f(2,54) \approx 1,002 > 1$ et $f(2,55) \approx 0,996 < 1$ donc 2,54 est une valeur approchée de t_2 à 10^{-2} .

4. Pour une concentration du médicament supérieure ou égale à 1 gramme par litre de sang, il y a un risque de somnolence. C'est donc quand $f(t) \geq 1$.

$f(t) \geq 1$ pour $t \in [t_1 ; t_2]$, soit pour une durée égale à $t_2 - t_1$ qui vaut environ $2,54 - 0,25$ soit 2,29 heures; cela fait environ 2 heures et 17 minutes.

Partie D : concentration moyenne

La concentration moyenne du médicament (en gramme par litre de sang) durant la première heure est donnée par : $T_m = \int_0^1 f(t) dt$ où f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 5te^{-t}$.

On utilise une intégration par parties : $\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$.

On pose $\begin{cases} u(t) = 5t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t) = 5 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$

$$\begin{aligned} T_m &= \int_0^1 5te^{-t} dt = [5t \times (-e^{-t})]_0^1 - \int_0^1 5 \times (-e^{-t}) dt = [-5te^{-t}]_0^1 - 5[e^{-t}]_0^1 \\ &= (-5e^{-1} - 0) - (-5e^{-1} + 5e^0) = 5 - 10e^{-1} \approx 1,32 \end{aligned}$$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 14

Amérique du Sud 14 novembre 2025 - sujet 2

Partie A : dénombrement

On considère l'ensemble des nombres entiers relatifs **non nuls** compris entre -30 et 30 ; cet ensemble peut s'écrire ainsi : $\{-30 ; -29 ; -28 ; \dots -1 ; 1 ; \dots ; 28 ; 29 ; 30\}$. Il comporte 60 éléments.

On choisit dans cet ensemble successivement et sans remise un entier relatif a puis un entier relatif c .

1. On peut choisir comme premier terme du couple entre 60 entiers; comme il n'y a pas de remise (???) et que $(a ; b) \neq (b ; a)$, le deuxième terme peut être choisi entre 59 entiers.

On peut donc obtenir $60 \times 59 = 3540$ couples différents.

2. L'équation a deux racines si le déterminant est supérieur à zéro, donc si :
 $\Delta = 4 - 4ac > \iff (4(1 - ac) > \iff 1 - ac > 0 \iff ac < 1.$
3. Il faut donc trouver le nombre de couples vérifiant $ac \geq 1$, mais en fait $ac > 1$ puisque l'on ne peut avoir $(-1; -1)$ ni $(1; 1)$.
 Si l'on choisit en premier un entier négatif (30 choix) le second terme sera choisi dans les 29 entiers négatifs restant, soit $30 \times 29 = 870$ couples;
 Même chose si les deux termes choisis sont positifs, soit 870 couples.
 L'évènement $\overline{M}$ sera réalisé pour $870 + 870 = 1740$ couples.
4. D'après le résultat précédent l'évènement M sera réalisé pour $3540 - 1740 = 1800$ couples.
 Donc $p(M) = \frac{1800}{3540} = \frac{30}{59} \approx 0,5084$ soit 0,508 au millièmème près.

Partie B : équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): y' + 10y = (30x^2 + 22x - 8) e^{-5x+1} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. L'équation différentielle est équivalente à l'équation $y' = -10y$.
 On sait que les solutions de cette équation sont les fonctions définies par
 $x \mapsto f(x) = C e^{-10x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

2.

$$f(x) = (6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1}.$$

Étant admis que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on calcule :

$$f'(x) = (12x+2) e^{-5x+1} + (-5)(6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1} = e^{-5x+1} [12x + 2 - 30x^2 - 10x + 10] = e^{-5x+1} (-30x^2 + 2x + 12).$$

$$\text{Alors } f'(x) + f(x) = e^{-5x+1} (-30x^2 + 2x + 12) + 10(6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1} = e^{-5x+1} (-30x^2 + 2x + 12 + 60x^2 + 20x - 20) = e^{-5x+1} (30x^2 + 22x - 8).$$

On a donc bien démontré que f est une solution de l'équation différentielle (E).

3. Les résultats précédents permettent d'énoncer que toutes les solutions de (E) sont la somme de f et des solutions de l'équation $y' + 10y = 0$, soit
 Toutes les solutions de (E) sont de la forme $(6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1} + C e^{-10x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie C : étude de fonction

On rappelle que, pour tout réel x , $f(x) = (6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1}$.

1. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$\text{On a } 6x^2 + 2x - 2 = x^2 \left(6 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} \right).$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0, \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 6 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} = 6.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty,$$

Enfin on sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-5x+1} = +\infty$ on a finalement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

2. On sait que quel que soit le réel $-5x + 1$, $e^{-5x+1} > 0$: le signe de $f(x)$ est donc celui du trinôme $6x^2 + 2x - 2$.

Le trinôme vérifie l'évènement M puisque avec $a = 6$ et $c = -2$, $ac = -12 < 1$.
Le trinôme s'annule donc pour deux réels distincts : géométriquement $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points.

Non demandé : $\Delta = 4 + 48 = 52 = 4 \times 13$.

Les racines sont donc $x_1 = \frac{2 + \sqrt{52}}{12} = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \approx 0,77$ et $x_2 = \frac{2 - \sqrt{52}}{12} = \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \approx -0,43$

3. On a vu en A. 2. que $f'(x) = e^{-5x+1}(-30x^2 + 2x + 12)$; comme on sait que quel que soit le réel $-5x + 1$, $e^{-5x+1} \neq 0$, donc $f'(x) = 0 \iff -30x^2 + 2x + 12 = 0 \iff -15x^2 + x + 6 = 0$. Comme $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-15) \times 6 = 361 = 19^2 > 0$, ce trinôme s'annule pour $x_1 = \frac{-1 + 19}{-30} = -\frac{18}{30} = -\frac{3}{5}$ et $x_2 = \frac{-1 - 19}{-30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

Aux points d'abscisse $-\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}$, le nombre dérivé est nul ce qui signifie que la tangente en ces deux points est horizontale.

4. Avec $f\left(-\frac{3}{5}\right) \approx -56,8$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0,19$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
variations de f	$+\infty$			$\approx 0,19$	
		$\approx -56,8$			0

5. Sur l'intervalle $\left]-\infty ; -\frac{3}{5}\right]$, la fonction f décroît de plus l'infini à environ $-56,8$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel α de cet intervalle tel que

$$f(\alpha) = 1.$$

Sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{5} ; +\infty\right[$, $f(x) \leq 0,19 < 1$: il n'existe pas de solution de l'équation $f(x) = 1$ sur cet intervalle.

Conclusion : sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 1$ a une solution.

6. Pour tout réel m strictement supérieur à 0,2, on définit I_m par $I_m = \int_{0,2}^m f(x) dx$.

- a. F est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: sur cet intervalle :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(-\frac{12}{5}x - \frac{22}{25}\right)e^{-5x+1} - 5\left(-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125}\right)e^{-5x+1} = \\ &= e^{-5x+1}\left(-\frac{12}{5}x - \frac{22}{25} + 6x^2 + \frac{22}{5}x - \frac{28}{25}\right) = \left(6x^2 - \frac{10}{5}x - \frac{50}{25}\right)e^{-5x+1} = \\ &= (6x^2 - 2x + 2)e^{-5x+1} = f(x). \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$ montre que F est une primitive de la fonction f .

- b. On a donc $I_m = \int_{0,2}^m f(x) dx = [F(x)]_{0,2}^m = F(m) - F(0,2)$.

$$\text{Or } F(0,2) = F\left(\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{6}{5} \times \frac{1}{25} - \frac{22}{25} \times \frac{1}{5} + \frac{28}{125}\right)e^{-5 \times \frac{1}{5} + 1} = \left(-\frac{28}{125} + \frac{28}{125}\right)e^0 = 0 \times 1 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Il faut donc résoudre l'équation } F(m) &= 0 \text{ soit } \left(-\frac{6}{5}m^2 - \frac{22}{25}m + \frac{28}{125}\right)e^{-5m+1} = \\ 0 &\iff -\frac{6}{5}m^2 - \frac{22}{25}m + \frac{28}{125} = 0, \text{ car quel que soit } m \in \mathbb{R}, e^{-5m+1} > 0. \end{aligned}$$

On étudie donc le trinôme $-\frac{6}{5}m^2 - \frac{22}{25}m + \frac{28}{125}$ ou encore $-150m^2 - 110m + 28$ en multipliant par 125, et en simplifiant par 2 le trinôme : $-75m^2 - 55m + 14$. Pour ce trinôme $\Delta = (-55)^2 - 4 \times (-75) \times 14 = 7225 = 85^2 > 0$. Ce trinôme a deux racines $m_1 = \frac{55 + 85}{-150} = -\frac{140}{150} = -\frac{14}{15}$ et $m_2 = \frac{55 - 85}{-150} = \frac{-30}{-150} = \frac{1}{5} = 0,2$.

La deuxième solution a déjà été trouvée ci-dessus ($F(0,2) = 0$).

Il existe donc une autre valeur $-\frac{14}{15}$ telle que $F\left(-\frac{14}{15}\right) = 0$ mais cette solution est négative alors que l'on demande une solution supérieure à 0,2 donc positive.

Interprétation graphique

On a tracé les représentations graphiques des fonctions f et F .

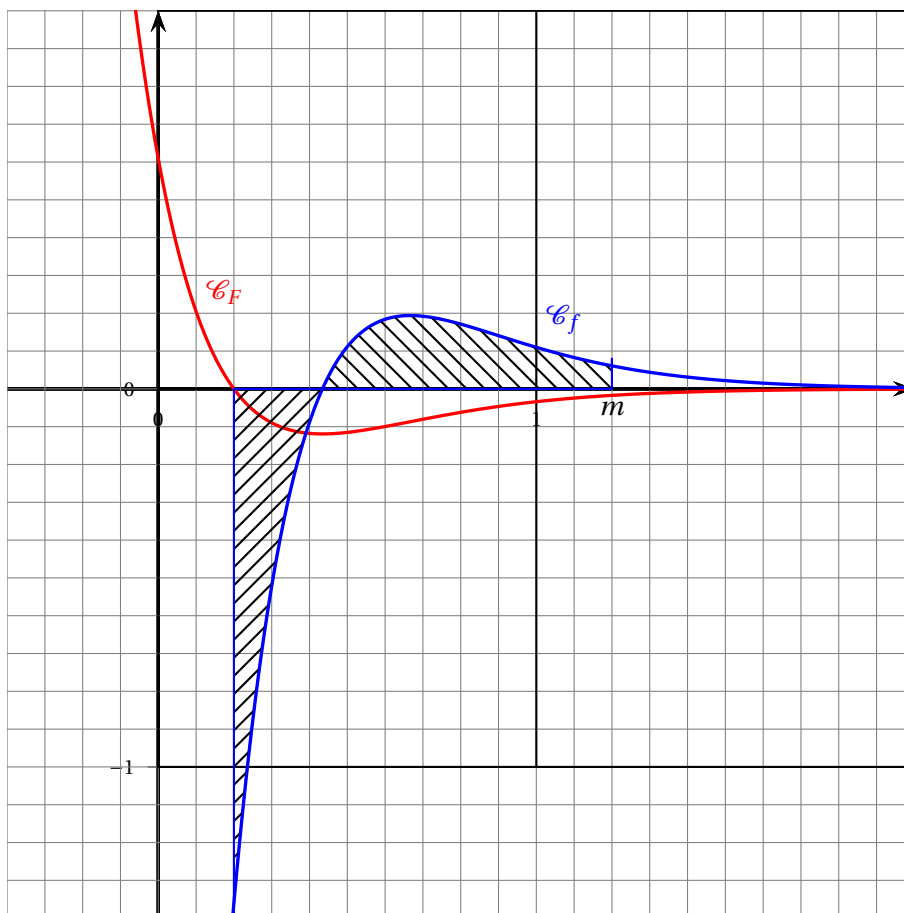
La surface limitée par la représentation graphique de f , $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 0,2$ et $x = m$ est égale à l'intégrale I_m .

Cette surface se compose de deux parties :

- une première partie correspondant à l'intégrale de 0,2 à environ 0,43 (valeur qui annule f) ; la courbe étant sous l'axe des abscisses l'aire est l'opposée de l'intégrale ;
- une deuxième partie correspondant à l'intégrale de 0,43 à m ; la courbe étant au dessus de l'axe des abscisses l'aire est égale à l'intégrale.

On a trouvé qu'il n'existe pas de valeur de m telle que I_m s'annule signifie géométriquement que quel que soit $m > 0,2$, l'aire de la surface située au dessus de l'axe des abscisses n'est pas égale à l'aire de la surface située sous l'axe des abscisses.

On voit aussi que pour $m > 0,2$ aucun point de la représentation de F (en rouge) n'a une ordonnée nulle.



ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 15

Nouvelle-Calédonie 20 novembre 2025 - sujet 1

On considère n un entier naturel non nul.

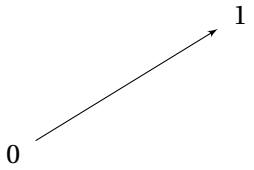
On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f_n(x) = x^n e^{1-x}$.

Partie A

1. $f_1(x) = x e^{1-x}$ donc $f'_1(x) = 1 \times e^{1-x} + x \times (-e^{1-x}) = \boxed{(1-x) e^{1-x}}$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^{1-x} > 0$, donc $f'_1(x)$ est du signe de $1-x$. Or, $1-x \geq 0 \iff x \leq 1$. Donc, pour tout $x \in [0 ; 1[$, $f'_1(x)$ est strictement positif.

2.

x	0	1
Signe de $f_1(x)$	+	
Variations de f_1		

$$f_1(0) = 0 \times e^{1-0} = 0$$

$$f_1(1) = 1 \times e^{1-1} = e^0 = 1$$

3. La fonction f_1 est continue (puisque dérivable) et strictement croissante sur $[0 ; 1]$, avec
 $f_1(0) = 0 < 0,1$ et $f_1(1) = 1 > 0,1$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une solution unique dans $[0 ; 1]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

On admet que $u_1 = e - 2$.

1. a. Pour $x \in [0 ; 1]$, on a : $0 \leq x \leq 1$.
 $x \geq 0$ donc $x^n \geq 0$; on multiplie l'inégalité précédente par x^n :
 $0 \times x^n \leq x \times x^n \leq 1 \times x^n \iff 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$
On a donc démontré que pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

- b. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{1-x} > 0$, donc, d'après la question précédente :

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n \iff 0 \leq x^{n+1} e^{1-x} \leq x^n e^{1-x}.$$

Donc, d'après la positivité de l'intégration :

$$0 \leq x^{n+1} e^{1-x} \leq x^n e^{1-x} \implies 0 \leq \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \iff 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

- c. D'après la question précédente, puisque $u_{n+1} \leq u_n$ la suite (u_n) est décroissante.

De plus, puisque $0 \leq u_n$, elle est minorée par 0.

Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite positive ou nulle.

2. a. On sait que pour u et v dérivables on a : $\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$.
Posons $u'(x) = e^{1-x}$ et $v(x) = x^{n+1}$. Alors $u(x) = -e^{1-x}$ et $v'(x) = (n+1)x^n$.
On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx &= [-x^{n+1} e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n (-e^{1-x}) dx \\
&= -1^{n+1} e^{1-1} - (-0^{n+1} e^{1-0}) - (n+1) \int_0^1 -x^n e^{1-x} dx \\
&= -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

- b. On complète le script Python en bleu ci-dessus pour que la fonction suite() renvoie la valeur de $\int_0^1 x^8 e^{1-x} dx$.

```

from math import exp

def suite() :
    u = exp(1)-2
    for n in range (1,8):
        u = (n+1) * u - 1
    return u

```

3. a. On se place dans l'intervalle d'intégration : soit $x \in [0 ; 1]$, donc
 $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1-x \leq 1 \Rightarrow e^{1-x} \leq e$ (croissance de la fonction exponentielle)
 $\Rightarrow x^n e^{1-x} \leq x^n \times e$ ($x^n \geq 0$)
 $\Rightarrow \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n \times e dx$ (croissance de l'intégration)
 $\Rightarrow \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq e \int_0^1 x^n dx \Rightarrow u_n \leq e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$
 $\Rightarrow u_n \leq \frac{e}{n+1}$

- b. On sait que pour tout n , on a : $0 \leq u_n$; donc $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 16

Nouvelle-Calédonie 21 novembre 2025 - sujet 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1.$$

1. On calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+ \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{quotient}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + 1 \right) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

$$\text{Par croissance comparée } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + 1 \right) = 1$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times \ln(x)}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln(x))}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$

3. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$ on a $x^3 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2 \ln(x)$.

$$1 - 2 \ln(x) \geq 0 \iff -2 \ln(x) \geq -1 \iff \ln(x) \leq \frac{1}{2} \iff x \leq e^{\frac{1}{2}} \quad (\text{car } x \mapsto e^x \text{ est croissante})$$

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	-
Variations de f		$\frac{1+2e}{2e}$	

$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} + 1$
 $= \frac{\frac{1}{2}}{e} + 1$
 $= \frac{1}{2e} + 1$
 $= \frac{1+2e}{2e} \approx 1,184$

4. a. Sur l'intervalle $]0, e^{\frac{1}{2}}]$ la fonction f est continue et strictement croissante avec $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1+2e}{2e} > 0$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α .
- Sur l'intervalle $\left[e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$ la fonction f est continue et strictement décroissante avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution.
- Finalement l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$.

b. À la calculatrice, on trouve :

$$0,65 < \alpha < 0,66$$

c. D'après les questions précédentes et puisque la fonction f est croissante sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}]$ et décroissante sur $[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$, la fonction f est strictement négative sur $]0 ; \alpha[$, s'annule en α et est strictement positive sur $]\alpha ; +\infty[$.

5. a. Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Le triangle OHM est rectangle en H , on peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OH^2 + HM^2 = x^2 + [\ln(x)]^2$$

b. On considère la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = x^2 + [\ln(x)]^2$. Elle est dérivable puisque somme de fonctions dérivables, et sa dérivée est :

$$h'(x) = 2x + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) = \frac{2x^2 + 2 \ln(x)}{x} = \frac{2x^2 \left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right)}{x} = 2x \left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 2x \times f(x)$$

Or, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on a $2x > 0$, donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$.

Donc, d'après la question 4.c., $h'(x)$ est négatif sur $]0 ; \alpha]$ et positif sur $[\alpha ; +\infty[$.

Donc h admet un minimum en $x = \alpha$.

La quantité OM^2 admet donc un minimum en α .

c. Pour $x = \alpha$, on a $OM^2 = \alpha^2 + (\ln(\alpha))^2$.

α est la solution de l'équation $f(x) = 0$, donc $f(\alpha) = 0$.

$$\text{Donc } \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} + 1 = 0 \iff \ln(\alpha) = -\alpha^2 \implies (\ln(\alpha))^2 = \alpha^4$$

Le minimum de OM^2 est donc $\alpha^2 + \alpha^4$.

Puisque la quantité OM^2 admet un minimum en α et que d est la valeur minimale de OM :

$$d = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \alpha \sqrt{1 + \alpha^2}$$

