

2025

ANNALES DU BAC MATHÉMATIQUES

**CALCUL INTEGRAL
EQUATIONS DIFFERENTIELLES**

Exercices extraits du site de l'APMEP

PAR VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

**SUJETS ET CORRIGÉS
50 PAGES**

SOMMAIRE

• Exercice 1 (Amérique du Nord 21 mai 2025)	page 3
Solution de l'exercice 1	page 20
• Exercice 2 (Amérique du Nord 22 mai 2025)	page 4
Solution de l'exercice 2	page 23
• Exercice 3 (Amérique du Nord - sujet 2 secours - 22 mai 2025)	page 6
Solution de l'exercice 3	page 25
• Exercice 4 (Asie 12 juin 2025 - sujet 2)	page 7
Solution de l'exercice 4	page 28
• Exercice 5 (Centres étrangers 12 juin 2025 - sujet 1)	page 8
Solution de l'exercice 5	page 30
• Exercice 6 (Centres étrangers 13 juin 2025 - sujet 2)	page 9
Solution de l'exercice 6	page 31
• Exercice 7 (Métropole 17 juin 2025 - sujet 1)	page 11
Solution de l'exercice 7	page 33
• Exercice 8 (Métropole 18 juin 2025 - sujet 1)	page 12
Solution de l'exercice 8	page 36
• Exercice 9 (Polynésie 2 septembre 2025 - sujet 1)	page 15
Solution de l'exercice 9	page 39
• Exercice 10 (Métropole 9 septembre 2025 - sujet 1)	page 16
Solution de l'exercice 10	page 41
• Exercice 11 (Amérique du Sud 13 novembre 2025 - sujet 1)	page 18
Solution de l'exercice 11	page 44
• Exercice 12 (Amérique du Sud 14 novembre 2025 - sujet 2)	page 19
Solution de l'exercice 12	page 47

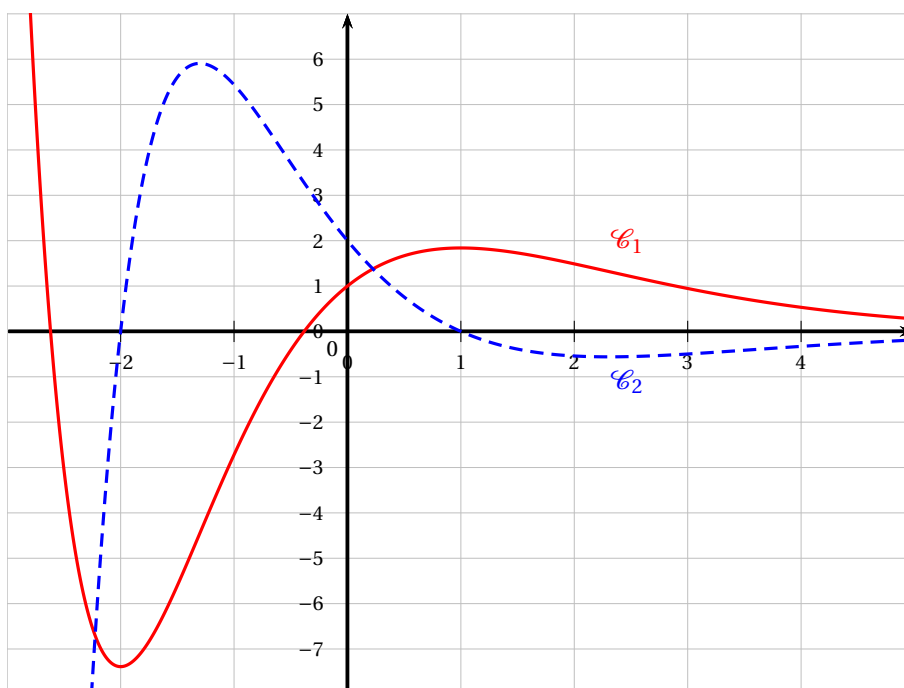
La **partie C** est indépendante des parties **A** et **B**.

Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g' .

On précise également que :

- La courbe $\mathcal{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 1)$.
- La courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2 ; 0)$ et $(1 ; 0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.
2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle

$$y + y' = (2x + 3)e^{-x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x .

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y + y' = 0$.
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) .

4. On admet que la fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E) .
Déterminer alors l'expression de la fonction g .
5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2) e^{-x}$$

1. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.
On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
 - a. Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x^2 - x + 1) e^{-x}$.
 - b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
4. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = (-x^2 - 5x - 7) e^{-x}$ est une primitive de la fonction f .
Soit α un nombre réel positif.
Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

EXERCICE 2

Amérique du Nord - sujet 2 - 22 mai 2025

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0; \pi]$ par

$$f(x) = e^x \sin(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; \pi]$,

$$f'(x) = e^x [\sin(x) + \cos(x)].$$

- b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
2. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $e^x \sin(x) \geq x$.
3. Justifier que le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

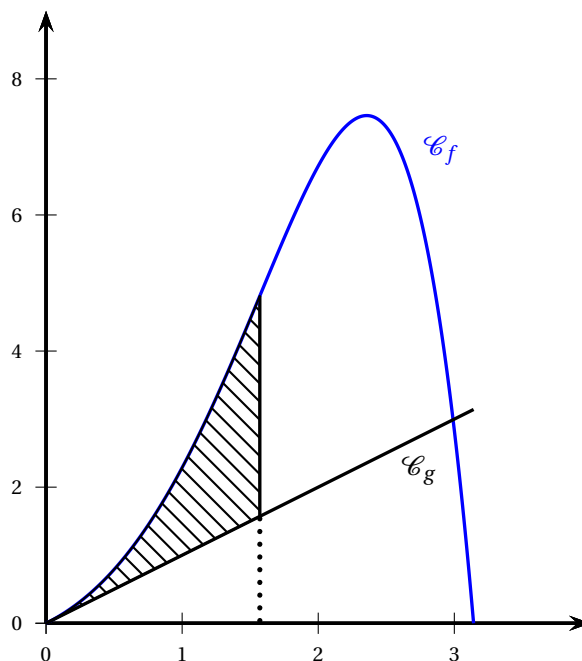
$$I = 1 + J \quad \text{et} \quad I = e^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En déduire que $I = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.

Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x e^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f , c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f' .

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x , calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x - 2) e^{-x}$$

4. Étudier la convexité de la fonction f .
5. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
6. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
Donner un encadrement de α , au centième près.
8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ .

Partie B : Calcul d'aire

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n x e^{-x} dx$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n .
2.
 - a. Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n .
 - b. Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4

Asie 12 juin 2025 - sujet 2

Dans un laboratoire, on étudie une réaction chimique dans un réacteur fermé, sous certaines conditions. Le traitement numérique des données expérimentales a permis de modéliser l'évolution de la température de cette réaction chimique en fonction du temps.

L'objectif de cet exercice est d'étudier cette modélisation.

La température est exprimée en degré Celsius et le temps est exprimé en minute.

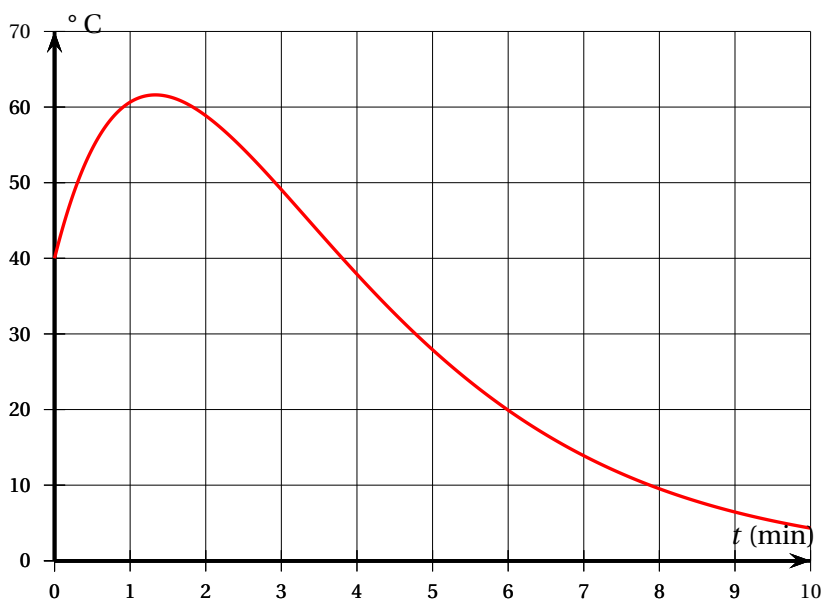
Dans tout l'exercice, on se place sur l'intervalle de temps $[0 ; 10]$.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un repère orthogonal du plan, on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction température en fonction du temps sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

1. Déterminer, par lecture graphique, au bout de combien de temps la température redescend à sa valeur initiale à l'instant $t = 0$.



On appelle f la fonction température représentée par la courbe ci-dessus.

On précise que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

On admet que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(t) = (at + b)e^{-0,5t}$ où a et b sont deux constantes réelles.

2. On admet que la valeur exacte de $f(0)$ est 40. En déduire la valeur de b .
3. On admet que f vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + 0,5y = 60e^{-0,5t}$. Déterminer la valeur de a .

Partie B : Étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 10]$ par

$$f(t) = (60t + 40)e^{-0,5t}$$

1. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0; 10]$, on a : $f'(t) = (40 - 30t)e^{-0,5t}$.
2.
 - a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les images des valeurs présentes dans le tableau.
 - b. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive sur l'intervalle $]0 ; 10]$.
 - c. Donner une valeur approchée de α au dixième près et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. On définit la température moyenne, exprimée en degré Celsius, de cette réaction chimique entre deux temps t_1 et t_2 , exprimés en minute, par

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

- a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^4 f(t) dt = 320 - \frac{800}{e^2}$$

- b. En déduire une valeur approchée, au degré Celsius près, de la température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes.

EXERCICE 5

Centres étrangers 12 juin 2025 - sujet 1

On considère l'équation différentielle

$$(E_1): \quad y' + 0,48y = \frac{1}{250},$$

où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $h(t) = \frac{1}{120}$.
Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1) .
2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1) .

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.

À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu. On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t , exprimé en heure.

On a donc $p(0) = 30$.

On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$p' = \frac{1}{250} p \times (120 - p)$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a $p(t) = \frac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2) , alors y est solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.
2. On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1) , alors $p = \frac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2) .

Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$p(t) = \frac{120}{1 + K e^{-0,48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$

3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K .
4. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.

On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.

EXERCICE 6

Centres étrangers 13 juin 2025 - sujet 2

Partie A

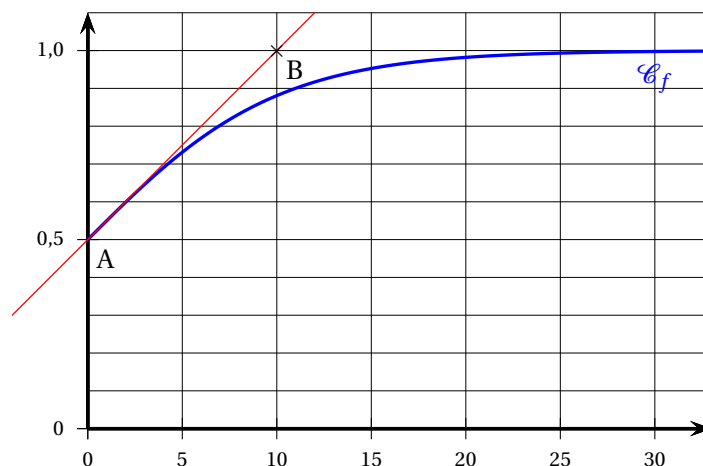
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{a + e^{-bx}}$$

où a et b sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

La fonction f admet pour représentation graphique la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :



On considère les points $A(0; 0,5)$ et $B(10; 1)$.

On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée de $f(10)$.
2. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
Donner une interprétation graphique de ce résultat.
3. Justifier que $a = 1$.
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
5.
 - a. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de la constante b .
 - b. En déduire la valeur de b .

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel a positif tel que $f(a) = 0,97$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel a par deux nombres entiers consécutifs.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Partie C

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(x) = \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 40]$, c'est-à-dire :

$$I = \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{1}{1 + e^{-0,2x}} dx.$$

On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n , on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année 2024 + n . Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n.$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.
2. On note h la fonction définie sur $[0; 20]$ par

$$h(x) = -0,02x^2 + 1,3x.$$

On admet que h est croissante sur $[0; 20]$.

- a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
- b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.
- c. Justifier que $L = 15$.
3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.
 - a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.
 - b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():
    n=0
    u= 1
    while ..... :
        n=.....
        u=.....
    return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t , en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$;
- f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$;
- f est solution sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_1): y' = 0,02y(15 - y).$$

On admet qu'une telle fonction f existe; le but de cette partie est d'en déterminer une expression.

On note f' la fonction dérivée de f .

1. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.

Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(E_2): y' = -0,3y + 0,02.$$

2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2) .
3. En déduire que pour tout $t \in [0 ; +\infty[$:

$$f(t) = \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1}.$$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 8

Métropole 18 juin 2025 - sujet 2

L'objet de cet exercice est l'étude de l'arrêt d'un chariot sur un manège, à partir du moment où il entre dans la zone de freinage en fin de parcours.

On note t le temps écoulé, exprimé en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.

On modélise la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage, exprimée en mètre, en fonction de t , à l'aide d'une fonction notée d définie sur $[0 ; +\infty[$.

On a ainsi $d(0) = 0$.

Par ailleurs, on admet que cette fonction d est dérivable sur son ensemble de définition.

On note d' sa fonction dérivée.

Partie A

Sur la figure (Fig. 2) ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_d$ de la fonction d ;

- la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_d$ au point A d'abscisse 4,7;
- l'asymptote Δ à $\mathcal{C}_d$ en $+\infty$.

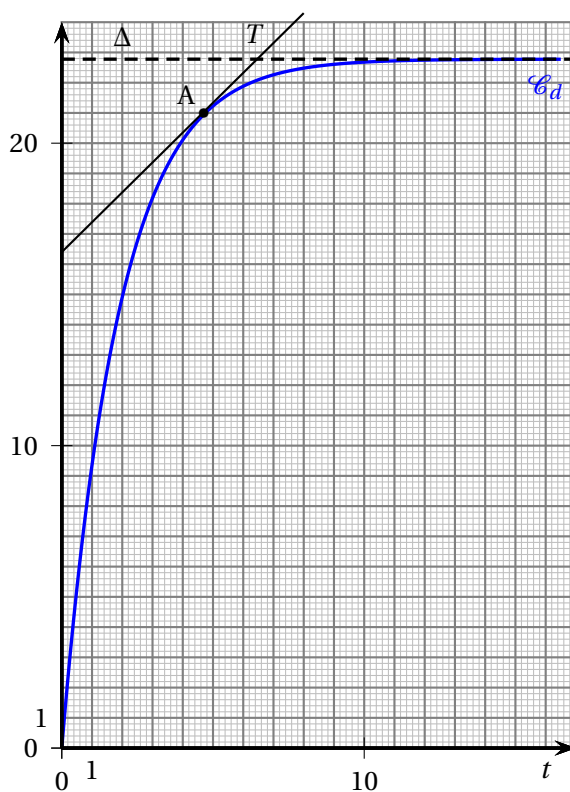


Fig.2

Dans cette partie, aucune justification n'est attendue.

Avec la précision que permet le graphique, répondre aux questions ci-dessous.

D'après ce modèle :

1. Au bout de combien de temps le chariot aura-t-il parcouru 15 m dans la zone de freinage?
2. Quelle longueur minimale doit-être prévue pour la zone de freinage?
3. Que vaut $d'(4,7)$? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On rappelle que t désigne le temps écoulé, en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.

On modélise la vitesse instantanée du chariot, en mètre par seconde (m.s^{-1}), en fonction de t , par une fonction v définie sur $[0 ; +\infty[$.

On admet que :

- la fonction v est dérivable sur son ensemble de définition, et on note v' sa fonction dérivée;
- la fonction v est une solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + 0,6y = e^{-0,6t},$$

où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y .

On précise de plus que, lors de son arrivée sur la zone de freinage, la vitesse du chariot est égale à 12 m.s^{-1} , c'est-à-dire $v(0) = 12$.

1. a. On considère l'équation différentielle

$$(E') : y' + 0,6y = 0.$$

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') sur $[0 ; +\infty[$.

- b. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = t e^{-0,6t}$.

Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E) .

- c. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0 ; +\infty[$.

- d. En déduire que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$v(t) = (12 + t) e^{-0,6t}.$$

2. Dans cette question, on étudie la fonction v sur $[0 ; +\infty[$.

- a. Montrer que pour tout réel $t \in [0 ; +\infty[$, $v'(t) = (-6,2 - 0,6t) e^{-0,6t}$.

- b. En admettant que :

$$v(t) = 12 e^{-0,6t} + \frac{1}{0,6} \times \frac{0,6t}{e^{0,6t}},$$

déterminer la limite de v en $+\infty$.

- c. Étudier le sens de variation de la fonction v et dresser son tableau de variation complet. Justifier.

- d. Montrer que l'équation $v(t) = 1$ admet une solution unique α , dont on donnera une valeur approchée au dixième.

3. Lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde, un système mécanique se déclenche permettant son arrêt complet.

Déterminer au bout de combien de temps ce système entre en action. Justifier.

Partie C

On rappelle que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$v(t) = (12 + t) e^{-0,6t}.$$

On admet que pour tout réel t dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$d(t) = \int_0^t v(x) dx.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la distance parcourue par le chariot entre les instants 0 et t est donnée par :

$$d(t) = e^{-0,6t} \left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}.$$

2. On rappelle que le dispositif d'arrêt se déclenche lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde.

Déterminer, selon ce modèle, une valeur approchée au centième de la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage avant le déclenchement de ce dispositif.

EXERCICE 9

Polynésie 2 septembre 2025 - sujet 1

On étudie l'évolution de la population d'une espèce animale au sein d'une réserve naturelle.

Les effectifs de cette population ont été recensés à différentes années. Les données collectées sont présentées dans le tableau suivant :

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100

Pour anticiper l'évolution de cette population, la direction de la réserve a choisi de modéliser le nombre d'individus en fonction du temps.

Pour cela, elle utilise une fonction, définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, dont la variable x représente le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2000.

Dans son modèle, l'image de 0 par cette fonction vaut 50, ce qui correspond au nombre d'individus en l'an 2000.

Partie A. Modèle 1

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0,05y - 0,5 \quad (E_1)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) avec la condition initiale $y(0) = 50$.
2. Comparer les résultats du tableau avec ceux que l'on obtiendrait avec ce modèle.

Partie B. Modèle 2

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0,05y(1 - 0,00125y)$$

On note f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.

Pour toute la suite de l'exercice, on pourra utiliser ces résultats sans les démontrer, sauf pour la question 5.

	Instruction	Résultat
1	$f(x) := \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$	$f(x) = \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$
2	$f'(x) := \text{Dérivée} (f(x))$	$f'(x) = \frac{600e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^2}$
3	$f''(x) := \text{Dérivée} (f'(x))$	$f''(x) = \frac{30e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^3} (15e^{-0,05x} - 1)$
4	Résoudre ($15e^{-0,05x} - 1 \geq 0$)	$x \leq 20 \ln(15)$

1. Démontrer que la fonction f vérifie $f(0) = 50$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 0,05f(x)(1 - 0,00125f(x))$$

On admet que cette fonction f est l'unique solution de (E_2) prenant la valeur initiale de 50 en 0.

2. Avec ce nouveau modèle f , estimer l'effectif de cette population en 2050. Arrondir le résultat à l'unité.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire quant à la courbe C ? Interpréter cette limite dans le cadre de ce problème concret.
4. Justifier que la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
5. Démontrer le résultat obtenu en ligne 4 du logiciel.
6. On admet que la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an, est modélisée par la fonction f' .
 - a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe C .
 - b. La direction de la réserve affirme :
« Au vu de ce modèle, la vitesse de croissance de la population de cette espèce va augmenter pendant un peu plus de cinquante ans, puis va diminuer ». La direction a-t-elle raison? Justifier.

EXERCICE 10

Métropole 9 septembre 2025 - sujet 1

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + 0,4y = e^{-0,4t}$$

où y est une fonction de la variable réelle t .

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(t) = t e^{-0,4t}$.

Vérifier que u est solution de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = f(t) - u(t)$.

Soit (H) l'équation différentielle $y' + 0,4y = 0$.

- a. Démontrer que si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) alors la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

On admettra que la réciproque est vraie.

- b. Résoudre l'équation différentielle (H).
- c. En déduire les solutions de (E).
- d. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

Partie B

On s'intéresse à la glycémie chez une personne venant de prendre un repas.

La glycémie en $g \cdot L^{-1}$, en fonction du temps t , exprimé en heure, écoulé depuis la fin du repas, est modélisée par la fonction f définie sur $[0; 6]$ par :

$$f(t) = (t + 1) e^{-0,4t}.$$

1.
 - a. Montrer que, pour tout $t \in [0; 6]$, $f'(t) = (-0,4t + 0,6) e^{-0,4t}$.
 - b. Étudier les variations de f sur $[0; 6]$ puis dresser son tableau de variations sur cet intervalle.
2. Une personne est en hypoglycémie lorsque sa glycémie est inférieure à $0,7 g \cdot L^{-1}$.
 - a. Démontrer que sur l'intervalle $[0; 6]$ l'équation $f(t) = 0,7$ admet une unique solution que l'on notera α .
 - b. Au bout de combien de temps après avoir pris son repas cette personne est-elle en hypoglycémie?
On exprimera ce temps à la minute près.
3. On souhaite déterminer la glycémie moyenne en $g \cdot L^{-1}$ chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.
 - a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^6 f(t) dt = -23,75 e^{-2,4} + 8,75.$$

- b. Calculer la glycémie moyenne en $g \cdot L^{-1}$ chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.
- c. En remarquant que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E), expliquer comment on aurait pu obtenir ce résultat autrement.

1. Le temps écoulé depuis l'instant de l'ingestion de ce médicament et l'instant où la concentration de médicament dans le sang est maximale selon ce modèle.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \geq 1$.
3. La convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 8]$.

Partie B : détermination de la fonction f

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = 5e^{-t},$$

d'inconnue y , où y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On admet que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

1. Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.
2. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $u(t) = ate^{-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer la valeur du réel a telle que la fonction u soit solution de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. La personne n'ayant pas pris ce médicament auparavant, on admet que $f(0) = 0$.
Déterminer l'expression de la fonction f .

Partie C : étude de la fonction f

Dans cette partie, on admet que f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = 5te^{-t}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation complet.
3. Démontrer qu'il existe deux réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 1$.
On donnera une valeur approchée à 10^{-2} des réels t_1 et t_2 .
4. Pour une concentration du médicament supérieure ou égale à 1 gramme par litre de sang, il y a un risque de somnolence.
Quelle est la durée en heures et minutes du risque de somnolence lors de la prise de ce médicament?

Partie D : concentration moyenne

La concentration moyenne du médicament (en gramme par litre de sang) durant la première heure est donnée par :

$$T_m = \int_0^1 f(t) dt$$

où f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 5te^{-t}$.
Calculer cette concentration moyenne.
On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près.

EXERCICE 12

Amérique du Sud 14 novembre 2025 - sujet 2

Partie A : dénombrement

On considère l'ensemble des nombres entiers relatifs **non nuls** compris entre -30 et 30 ; cet ensemble peut s'écrire ainsi : $\{-30 ; -29 ; -28 ; \dots -1 ; 1 ; \dots ; 28 ; 29 ; 30\}$. Il comporte 60 éléments.

On choisit dans cet ensemble successivement et sans remise un entier relatif a puis un entier relatif c .

1. Combien de couples $(a ; c)$ différents peut-on ainsi obtenir?

On considère l'évènement M : « l'équation $ax^2 + 2x + c = 0$ possède deux solutions réelles distinctes », où a et c sont les entiers relatifs précédemment choisis.

2. Montrer que l'évènement M a lieu si et seulement si $ac < 1$.
3. Expliquer pourquoi l'évènement contraire $\overline{M}$ comporte 1 740 issues.
4. Quelle est la probabilité de l'évènement M ? On arrondira le résultat à 10^{-2} .

Partie B : équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + 10y = (30x^2 + 22x - 8) e^{-5x+1} \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y' + 10y = 0$.
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1}.$$

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la fonction dérivée de la fonction f .

Justifier que f est une solution particulière de (E) .

3. Donner l'expression de toutes les solutions de (E) .

Partie C : étude de fonction

On propose d'étudier dans cette partie la fonction f rencontrée à la partie B question 2.

On rappelle que, pour tout réel x , $f(x) = (6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f . On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$
2. En utilisant la partie A, montrer que $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points (les coordonnées de ces points ne sont pas attendues).
3. En utilisant les parties A et B, montrer que $\mathcal{C}_f$ possède deux tangentes horizontales.
4. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f .
5. Déterminer en justifiant le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 1$.
6. Pour tout réel m strictement supérieur à 0,2, on définit I_m par $I_m = \int_{0,2}^m f(x) dx$.
 - a. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \left(-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125} \right) e^{-5x+1}$$

est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

- b. Existe-t-il une valeur de m pour laquelle $I_m = 0$?
Interpréter graphiquement ce résultat.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 1

Amérique du Nord - sujet 1 - 21 mai 2025

Partie A

1. La fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathcal{C}_1$ est décroissante sur $] -\infty ; -2]$ et sur $[1 ; +\infty[$, et croissante sur $[-2 ; 1]$.
La fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathcal{C}_2$ est négative sur $] -\infty ; -2]$ et sur $[1 ; +\infty[$, et positive sur $[-2 ; 1]$.
Les variations d'une fonction étant déterminées par le signe de sa dérivée, on peut en déduire que la courbe $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction g et la courbe $\mathcal{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction g' .
2. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est : $y = g'(0)(x - 0) + g(0) = g'(0)x + g(0)$.
La courbe $\mathcal{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; 1) donc $g(0) = 1$.
La courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; 2) donc $g'(0) = 2$.
L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est donc $y = 2x + 1$.

Partie B

1. f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\text{Pour tout réel } x : f'_0(x) &= (2x+3) \times e^{-x} + (x^2+3x) \times (-e^{-x}). \\ &= (2x+3-x^2-3x) e^{-x} \\ &= (-x^2-x+3) e^{-x}\end{aligned}$$

Pour tout réel x on a donc :

$$\begin{aligned}f_0(x) + f'_0(x) &= (x^2+3x) e^{-x} + (-x^2-x+3) e^{-x} \\ &= (x^2+3x-x^2-x+3) e^{-x} \\ &= (2x+3) e^{-x}\end{aligned}$$

La fonction f_0 est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. $(E_0) : y + y' = 0 \iff y' = -y$

Les solutions sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto C e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$

3. (E) est une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$, avec f_0 une solution particulière, les solutions sont donc les fonctions : $x \mapsto C e^{-x} + f_0(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$. (c'est à dire les fonctions $x \mapsto (x^2+3x+C) e^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.)

4. La fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E), il existe donc un réel C tel que pour tout réel x , $g(x) = (x^2+3x+C) e^{-x}$.

$$\text{Or } g(0) = 1 \text{ donc } 1 = (0+0+C) e^0 = C$$

L'expression de la fonction g est donc : $g(x) = (x^2+3x+1) e^{-x}$.

5. La courbe admet exactement deux points d'inflexion si et seulement si la dérivée seconde de la fonction s'annule exactement deux fois en changeant de signe.

Soit f une solution de l'équation différentielle (E).

Il existe un réel C tel que pour tout réel x , $f(x) = (x^2+3x+C) e^{-x}$.

Déterminons la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de f .

$$\begin{aligned}f'(x) &= (2x+3) \times e^{-x} + (x^2+3x+C) \times (-e^{-x}) \\ &= (2x+3-x^2-3x-C) e^{-x} \\ &= (-x^2-x+3-C) e^{-x}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}f''(x) &= (-2x-1) \times e^{-x} + (-x^2-x+3-C) \times (-e^{-x}) \\ &= (-2x-1+x^2+x-3+C) e^{-x} \\ &= (x^2-x-4+C) e^{-x}\end{aligned}$$

Une fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f''(x)$ est du signe de $x^2-x-4-C$.

Un polynôme du second degré s'annule deux fois en changeant de signe si et seulement si son discriminant est strictement positif.

Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-4+C) = 1 + 16 - 4C = 17 - 4C$$

La courbe admettra donc exactement deux points d'inflexion si $17 - 4C > 0$ c'est à dire $C < \frac{17}{4}$.

Les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto (x^2+3x+C) e^{-x} \text{ avec } C < \frac{17}{4}.$$

Partie C

$$1. f(x) = (x^2 + 3x + 2) e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} + 3 \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ donc, par inverse, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Par croissances comparées : pour tout entier n non nul, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

$$\text{Donc par produit et par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} + 3 \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} = 0$$

$$2. \quad \text{a. Pour tout nombre réel } x, f'(x) = (2x + 3) e^{-x} + (x^2 + 3x + 2)(-e^{-x}).$$

$$= (2x + 3 - x^2 - 3x - 2) e^{-x}$$

$$= (-x^2 - x + 1) e^{-x}$$

b. Une fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe du polynôme du second degré $-x^2 - x - 1$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 1 + 4 = 5 > 0$$

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{-2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Le coefficient dominant est négatif on en déduit donc :

x	$-\infty$	x_1		x_2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-
variations de f	$+\infty$	$f(x_1)$		$f(x_2)$		0

La fonction f est décroissante sur $\left] -\infty ; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right[$ et sur $\left] \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} ; +\infty \right[$.

Elle est croissante sur $\left] \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} ; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right[$.

3. Une fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ est du signe du polynôme du second degré $x^2 + 3x + 2$.

$$\text{Pour tout réel } x : x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$$

Les racines sont donc -2 et -1 .

De plus le coefficient dominant est positif donc $x^2 + 3x + 2$ est positif, entre autre, sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ et donc sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

La fonction f est donc positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

4. La fonction f est positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ donc sur $[0 ; \alpha]$ donc l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$ est égale à $\int_0^\alpha f(x) dx$.

$$\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx = [F(x)]_0^\alpha = F(\alpha) - F(0)$$

$$= (-\alpha^2 - 5\alpha - 7) e^{-\alpha} + 7$$

L'aire cherchée est égale à $(-\alpha^2 - 5\alpha - 7) e^{-\alpha} + 7$ unités d'aire.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 2

Amérique du Nord - sujet 2 - 22 mai 2025

PARTIE A

1. a. Pour tout réel x de l'intervalle $[0; \pi]$:
- $$f'(x) = e^x \times \sin(x) + e^x \times \cos(x) = e^x (\sin(x) + \cos(x)).$$
- b. Par connaissance des fonctions trigonométriques, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geq 0$ et $\sin(x) \geq 0$
- On précise que d'une part, $\sin(x) = 0$ seulement pour $x = 0$, et $\cos(0) = 1$, et d'autre part, $\cos(x) = 0$ seulement pour $x = \frac{\pi}{2}$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, donc les fonctions sinus et cosinus ne s'annulent pas en même temps.
- La somme de deux réels positifs, dont l'un au moins est strictement positif est strictement positive, donc :
- pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) + \sin(x) > 0$.
- D'autre part, pour tout réel x , $e^x > 0$
- donc pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) > 0$ en tant que produit de deux facteurs strictement positifs,
- donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. a. L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est :
- $$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = f'(0)x + f(0).$$
- $$f(0) = e^0 \sin(0) = 1 \times 0 = 0; \text{ (donné dans l'énoncé)}$$
- $$f'(0) = e^0 (\sin(0) + \cos(0)) = 1 \times (0 + 1) = 1 \text{ (donné dans l'énoncé)}$$
- L'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donc $y = 1x + 0$ soit $y = x$.
- b. En anticipant la question 3., on va étudier la convexité de la fonction sur $[0; \pi]$.
- Pour tout réel x de l'intervalle $[0; \pi]$:
- $$\begin{aligned} f''(x) &= e^x (\sin(x) + \cos(x)) + e^x (\cos(x) - \sin(x)) \\ &= e^x (\sin(x) + \cos(x) + \cos(x) - \sin(x)) \\ &= 2e^x \cos(x) \end{aligned}$$
- On a le tableau de signes suivant :
- | | | | |
|-------------------|---|-----------------|-------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π |
| signe de $f''(x)$ | + | 0 | - |
- donc pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f''(x) > 0$
- d'où la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- c. La courbe représentative d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier ici, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, d'équation $y = x$ (d'après la question précédente).
- On a donc, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $e^x \sin(x) \geq x$.

3. On a vu précédemment que la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en $x = \frac{\pi}{2}$ donc le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx.$$

1. $x \mapsto e^x \sin(x)$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = e^x & \text{et} & u'(x) = e^x \\ v'(x) = \sin(x) & \text{et} & v(x) = -\cos(x) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = \left[u(x) v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } I &= \left[-\cos(x) e^x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (-\cos(x)) dx \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}} + \cos(0) e^0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx \\ &= 0 + 1 + J \\ &= 1 + J \end{aligned}$$

$$x \mapsto e^x \sin(x) \text{ est de la forme } uv' \text{ avec } \begin{cases} u(x) = \sin(x) & \text{et} & u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = e^x & \text{et} & v(x) = e^x \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = \left[u(x) v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } I &= \left[\sin(x) e^x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}} + \sin(0) e^0 - J \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} - J \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$I = 1 + J \quad \text{et} \quad I = e^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En ajoutant les deux équations précédentes on obtient : $2I = 1 + J + e^{\frac{\pi}{2}} - J$.

$$\text{d'où } I = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}.$$

3. D'après la question **Partie A 2.c.** pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

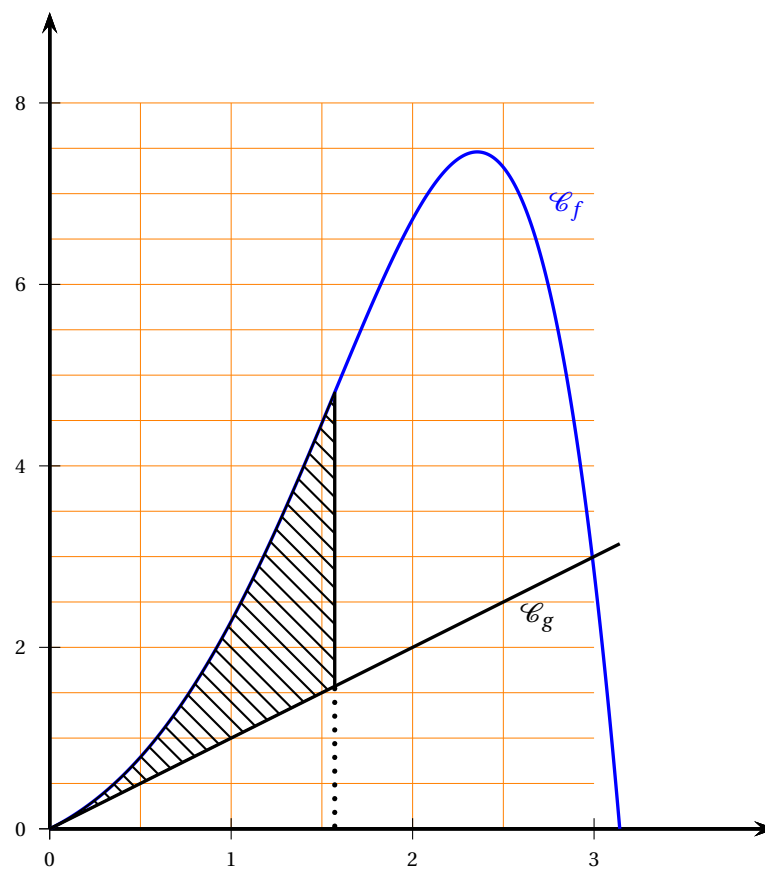
$$e^x \sin(x) \geq x \text{ c'est à dire } f(x) \geq g(x).$$

L'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équa-

$$\text{tion } x = 0 \text{ et } x = \frac{\pi}{2} \text{ est donc égale à l'intégrale : } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \sin(x) - x) dx.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \sin(x) - x) \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= I - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + 0 \\
&= \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

L'aire cherchée est donc $\frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8}$ u.a. ($\approx 1,67$ u. a.)

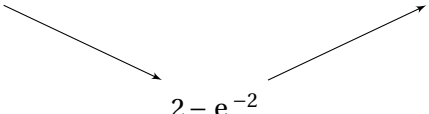


ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 3

Amérique du Nord - sujet 2 secours - 22 mai 2025

Partie A : Étude de la fonction f

1. — Déterminons la limite quand x tend vers $-\infty$:
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x(e^{-x} + 2) - 1$.
Avec $y = -x$, par composition, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$.
Donc, par limite de la somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + 2 = +\infty$.
Par limite du produit, il vient : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{-x} + 2) = -\infty$.
Enfin, par limite de la somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{-x} + 2) - 1 = -\infty$.
— Déterminons la limite quand x tend vers $+\infty$:
D'après la propriété des croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
Par limite de l'inverse : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$.
Par ailleurs, 2 étant positif : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty$.
Par limite de la somme on en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} + 2x - 1 = +\infty$.
2. On a admis que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est la somme d'une fonction affine et d'un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x , on a :
 $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) + 2 = (1 - x)e^{-x} + 2$.
3. On a admis que f' est dérivable :
Pour tout réel x , on a :
 $f''(x) = -1 \times e^{-x} + (1 - x) \times (-e^{-x}) + 0 = (-1 - (1 - x))e^{-x} = (x - 2)e^{-x}$.
On arrive bien à l'expression annoncée.
4. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc $f''(x)$ est du signe de $(x - 2)$.
 - Sur l'intervalle $] -\infty ; 2]$, $(x - 2) \leq 0$, donc f'' est à valeurs négatives et donc f est **concave** sur $] -\infty ; 2]$.
 - Sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, $(x - 2) \geq 0$, donc f'' est à valeurs positives et donc f est **convexe** sur $[2 ; +\infty[$.
5. — Sur l'intervalle $] -\infty ; 2]$, f est concave, donc f' est décroissante.
— Sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, f est convexe, donc f' est croissante.
 f' atteindra donc un minimum pour $x = 2$. On a :
 $f'(2) = (1 - 2)e^{-2} + 2 = 2 - e^{-2}$
On peut donc établir le tableau de variations (sans limites, car non attendues ici) de f' .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$
variations de f'			

6. Comme on a $-2 < 0$, on en déduit, par croissance de la fonction exponentielle :

$$e^{-2} \leq e^0.$$

$$e^{-2} \leq e^0 \Rightarrow e^{-2} \leq 1$$

$$\Rightarrow -e^{-2} \geq -1 \quad \text{car } -1 < 0$$

$$\Rightarrow 2 - e^{-2} \geq 2 - 1$$

$$\Rightarrow 2 - e^{-2} \geq 1$$

Le minimum de f' est donc un réel supérieur à 1, donc strictement positif.

On en déduit que f' est donc une fonction à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, en conséquence, f est effectivement une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7. f est une fonction **continue** (car dérivable) et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. De plus 0 est une **valeur intermédiaire** entre $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

En vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, on en déduit qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

Par exploration à la calculatrice, on peut donner pour α l'encadrement au centième près suivant : $0,37 < \alpha < 0,38$.

8. Pour tout x réel, on a :

$$f(x) - (2x - 1) = x e^{-x}.$$

Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, on en déduit que cette différence entre l'ordonnée $f(x)$ d'un point sur C_f et celle $2x - 1$ du point partageant la même abscisse sur Δ est du signe de x .

Sur $\mathbb{R}^-$, la différence est donc négative, et on en déduit que la courbe C_f est **au-dessous** de la droite Δ .

Sur $\mathbb{R}^+$, au contraire, la différence est positive, et donc la courbe C_f est **au-dessus** de la droite Δ .

Partie B : Calcul d'aire

1. Pour tout x réel, on pose : $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x$.

On a donc, pour tout x réel : $v'(x) = 1$ et, par exemple : $u(x) = -e^{-x}$.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_1^n x e^x dx \\
&= \int_1^n v(x) \times u'(x) dx \\
&= \left[u(x) \times v(x) \right]_1^n - \int_1^n v'(x) \times u(x) dx \quad \text{c'est la formule d'intégration par parties} \\
&= \left[-e^{-x} \times x \right]_1^n - \int_1^n 1 \times (-e^{-x}) dx \\
&= \left(-n e^{-n} \right) - \left(-e^{-1} \right) + \int_1^n e^{-x} dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale.} \\
&= e^{-1} - n e^{-n} + \left[-e^{-x} \right]_1^n \\
&= e^{-1} - n e^{-n} + \left(-e^{-n} - (-e^{-1}) \right) \\
&= 2e^{-1} - (n+1)e^{-n}
\end{aligned}$$

On arrive donc à l'expression : $I_n = 2e^{-1} - (n+1)e^{-n}$.

2. a. Le domaine décrit est donc situé entre la courbe C_f et la droite Δ , pour les abscisses comprises entre 1 et n . Le nombre n étant choisi entier naturel non nul, l'ensemble des abscisses concernées est donc inclus dans $\mathbb{R}^+$, où la courbe C_f est au-dessus de la droite Δ , d'après la question A. 8., c'est-à-dire que :

$$\forall x \in [1; n], \quad 2x - 1 \leq f(x).$$

Pour obtenir l'aire de D_n , il faut donc intégrer la différence $f(x) - (2x - 1)$, entre 1 et n (car $1 \leq n$).

Comme, pour tout x réel, on a : $f(x) - (2x - 1) = x e^{-x}$, l'aire de D_n (exprimée en unité d'aire) est donc bien égale à I_n .

- b. On a, pour tout n entier naturel : $I_n = 2e^{-1} - (n+1)e^{-n} = 2e^{-1} - n e^{-n} - e^{-n}$. Avec le même raisonnement que celui tenu à la question A. 1., on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n e^{-n} = 0.$$

$$\text{On a également : } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0.$$

$$\text{On a donc, par limite de la somme : } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 2e^{-1}.$$

On est donc dans la situation d'un domaine dont le périmètre tend vers $+\infty$, puisqu'il s'étend sur une amplitude en abscisse qui tend vers $+\infty$, mais dont la surface reste majorée.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 4

Asie 12 juin 2025 - sujet 2

Partie A

1. Par lecture graphique : La température initiale est $f(0) = 40$ et on observe que la température redescend à cette valeur pour $t \approx 3,8$ minutes.
2. $f(t) = (at + b)e^{-0,5t}$ donc $f(0) = (a \times 0 + b) \times e^0 = b$ or $f(0) = 40$ donc $b = 40$.

3. f est dérivable sur $[0; 10]$ comme produit de fonctions dérivables.

$f = uv$ avec $u(t) = at + b$ et $v(t) = e^{-0,5t}$ donc $f' = u'v + v'u$ avec $u'(t) = a$ et $v'(t) = -0,5e^{-0,5t}$

donc pour tout $t \in [0; 10]$, $f'(t) = ae^{-0,5t} + (at+40) \times (-0,5e^{-0,5t}) = (-0,5at + a - 20)e^{-0,5t}$

donc pour tout $t \in [0; 10]$, $f'(t) + 0,5f(t) = (-0,5at + a - 20)e^{-0,5t} + 0,5(at+40)e^{-0,5t} = ae^{-0,5t}$

f est solution de l'équation différentielle (E) donc $ae^{-0,5t} = 60e^{-0,5t} \Rightarrow a = 60$.

Partie B

1. Pour tout $t \in [0; 10]$, $f'(t) = (-0,5at + a - 20)e^{-0,5t}$ avec $a = 60$ on obtient $f'(t) = (40 - 30t)e^{-0,5t}$

2. a. Pour tout $t \in [0; 10]$, $e^{-0,5t} > 0$ donc $f'(t)$ a le même signe que $40 - 30t$.

$40 - 30t \geq 0 \iff -30t \geq -40 \iff t \leq \frac{4}{3}$ On en déduit le tableau de signes de $f'(t)$ et le tableau de variations de f sur $[0; 10]$

y	0	$\frac{4}{3}$	10
Signes de $f'(t)$	+	0	-
Variations de f	40	$120e^{-\frac{2}{3}}$	$640e^{-5}$

$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(60 \times \frac{4}{3} + 40\right)e^{-0,5 \times \frac{4}{3}} = 120e^{-\frac{2}{3}} \approx 61,6$; $f(0) = 40$ et $f(10) = 640e^{-5} \approx 4,31$

b. Sur $\left]0; \frac{4}{3}\right]$, $f(f) > 40$ donc l'équation $f(t) = 40$ n'a pas de solution.

$\left[\frac{4}{3}; 10\right]$: d'après les valeurs approchées calculées dans la question précédentes, $f\left(\frac{4}{3}\right) > 40$ et $f(10) < 40$ donc $40 \in \left[\frac{4}{3}; 10\right]$

de plus f est continue (car dérivable) et strictement décroissante donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α dans $\left[\frac{4}{3}; 10\right]$

donc l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive sur $[0; 10]$ '.

c. À l'aide de la calculatrice on trouve $\alpha \approx 3,8$

Interprétation : La température revient à sa valeur initiale de 40°C après environ 3,8 minutes.

3. a. $\int_0^4 f(t) dt = \int_0^4 (60t + 40)e^{-0,5t} dt$.

On pose $u(t) = 60t + 40$ et $v'(t) = e^{-0,5t}$ alors $u'(t) = 60$ et $v(t) = -2e^{-0,5t}$.

les fonctions u et v sont dérivables et leurs fonctions dérivées sont continues donc d'après la formules d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^4 (60t + 40)e^{-0,5t} dt &= [(60t + 40)(-2e^{-0,5t})]_0^4 - \int_0^4 -2 \times 60e^{-0,5t} dt = \\ &= [(-120t - 80)e^{-0,5t}]_0^4 + 120 \int_0^4 e^{-0,5t} dt = -560e^{-2} + 80 + 120[-2e^{-0,5t}]_0^4 = \\ &= -560e^{-2} + 80 + 120(-2e^{-2} + 2) = -560e^{-2} + 80 - 240e^{-2} + 240 = 320 - 800e^{-2} = \\ &= 320 - \frac{800}{e^2} \end{aligned}$$

- b. La température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes est :

$$\frac{1}{4} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{4} \left(320 - \frac{800}{e^2} \right) = 80 - \frac{200}{e^2} \approx 52,9$$

Donc la température moyenne est environ 53°C sur les 4 premières minutes.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 5

Centres étrangers 12 juin 2025 - sujet 1

Partie A :

On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$ où y est une fonction de la variable t définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- La fonction h est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel positif t , $h'(t) = 0$. On a donc $h'(t) + 0,48h(t) = 0 + 0,48 \times \frac{1}{120} = \frac{1}{250}$
Donc la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1) .
- Les solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$ sont les fonctions de la forme $f(t) = C e^{-0,48t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
- Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont donc les fonctions de la forme $f(t) = C e^{-0,48t} + \frac{1}{120}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie B :

- Supposons que p est solution de l'équation différentielle (E_2) ,

$$\text{On a donc } p' = \frac{1}{250} p \times (120 - p)$$

$$\text{Or } p = \frac{1}{y} \text{ et } p' = \frac{-y'}{y^2}$$

$$\frac{-y'}{y^2} = \frac{1}{250} \frac{1}{y} \times \left(120 - \frac{1}{y} \right) \Rightarrow -y' = y^2 \times \frac{1}{250y} \times \frac{120y - 1}{y}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad & \Leftrightarrow -y' = \frac{1}{250} \times (120y - 1) \\ & \Leftrightarrow -y' = 0,48y - \frac{1}{250} \\ & \Leftrightarrow y' + 0,48y = \frac{1}{250} \end{aligned}$$

Donc y est solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.

- y est de la forme $y(t) = C e^{-0,48t} + \frac{1}{120}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\text{on a donc } p(t) &= \frac{1}{y(t)} \\
&= \frac{1}{C e^{-0,48t} + \frac{1}{120}} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \\
&= \frac{120}{120 C e^{-0,48t} + 1} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \\
&= \frac{120}{K e^{-0,48t} + 1} \text{ avec } K \in \mathbb{R} \text{ en posant } K = 120C
\end{aligned}$$

3. On sait que $p(0) = 30$ donc $\frac{120}{K e^0 + 1} = 30$,
donc $\frac{120}{30} = K + 1$ d'où $K = \frac{120}{30} - 1 = 3$.

4. On sait que : $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} -0,48t = -\infty \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{cases}$ donc, par composition, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,48t} = 0$.

Donc, par produit et somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + 3 e^{-0,48t} = 1$

et finalement par quotient, $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 120$.

Dans le contexte de l'exercice la population de la bactérie se stabilisera vers 120 000.

5. $p(t) = 60 \iff \frac{120}{3 e^{-0,48t} + 1} = 60$
 $\iff 120 = 60 \times (3 e^{-0,48t} + 1)$
 $\iff 2 = 3 e^{-0,48t} + 1$
 $\iff \frac{1}{3} = e^{-0,48t}$
 $\iff -0,48t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$
 $\iff t = \frac{\ln(3)}{0,48} \approx 2,289$

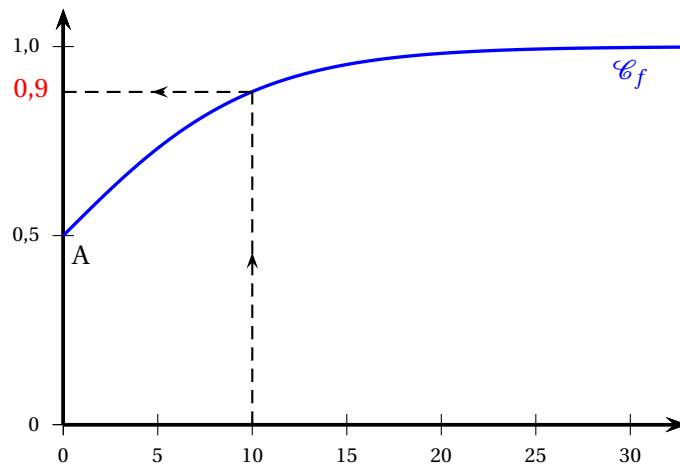
Le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus est de 2,289 heures soit 2 heures et 17 minutes.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 6

Centres étrangers 13 juin 2025 - sujet 2

Partie A

1. $1970 - 1960 = 10$. Donc on lit $f(10)$.



Dans la limite de précision du graphique, $f(10) \approx 0,9$.

2. Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.
3. $f(0) = \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{a+1} = \frac{1}{2} \iff a+1 = 2 \iff a = 1$.
4. Soit m ce coefficient directeur. $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0,5}{10} = 0,05$.
5. a. La fonction f est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$. $f(t)$ est de la forme $\frac{1}{u(t)}$, de dérivée $-\frac{u'(t)}{u^2(t)}$. Donc en posant $u(t) = a + e^{-bt}$, $u'(t) = -be^{-bt}$
Donc $\forall t \in [0; +\infty[$, $f'(t) = -\frac{-be^{-bt}}{(1 + e^{-bt})^2} = \frac{be^{-bt}}{(1 + e^{-bt})^2}$.
- b. Le nombre dérivée de f en 0 est égale à la pente de la droite (AB), tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Donc $f'(0) = 0,05$ donc $\frac{b}{2^2} = 0,05$ donc $b = 4 \times 0,05 = 0,2$.

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que le taux d'équipement en réfrigérateurs est représenté par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(t) = \frac{1}{1 + e^{-0,2t}}$.

1. $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,2t} = 0$ (par composition). Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$.
2. La fonction f est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$, de la forme $\frac{1}{u(t)}$, de dérivée $-\frac{u'(t)}{u^2(t)}$.
Donc en posant $u(t) = 1 + e^{-0,2t}$, $u'(t) = -0,2e^{-0,2t}$, $\forall t \in [0; +\infty[$, $f'(t) = -\frac{-0,2e^{-0,2t}}{(1 + e^{-0,2t})^2}$
soit $f'(t) = \frac{0,2e^{-0,2t}}{(1 + e^{-0,2t})^2}$.
 $\forall t \in [0; +\infty[$, $0,2e^{-0,2t} > 0$ et $(1 + e^{-0,2t})^2 > 0$ donc $f'(t) > 0$ donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.
3. On a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$.

La fonction f est continue strictement croissante sur $[0; +\infty[$ à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Or $0,97 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,97$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

4. Avec la calculatrice $\alpha \approx 17,4$ donc $\alpha \in]17; 18[$.

Partie C

1. $\forall t \in [0; +\infty[, f(t) = \frac{1}{1 + e^{-0,2t}}$. En multipliant numérateur et dénominateur par $e^{0,2t}$, on obtient : $f(t) = \frac{e^{0,2t}}{e^{0,2t}(1 + e^{-0,2t})} = \frac{e^{0,2t}}{e^{0,2t} + 1} = \frac{e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}}$.

2. f est de la forme $\frac{u'(t)}{u(t)}$, de primitive $\ln(u(t))$ (avec u fonction strictement positive car les deux termes du quotient sont strictement positifs) en posant $u(t) = e^{0,2t}$ et $u'(t) = 0,2e^{0,2t}$.

En écrivant $f(t) = \frac{e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}} = \frac{1}{0,2} \times \frac{0,2e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}} = 5 \times \frac{0,2e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}}$,

on détermine la fonction F , une primitive de f : $F(t) = 5\ln(1 + e^{0,2t})$ pour $t \in [0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} 3. I &= \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{1}{1 + e^{-0,2t}} dt = \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}} dt = \frac{1}{40} [5\ln(1 + e^{0,2t})]_0^{40} = \\ &= \frac{5}{40} (\ln(e^8 + 1) - \ln(2)) \\ &= \frac{1}{8} (\ln(e^8 + 1) - \ln(2)) = \frac{1}{8} \ln\left(\frac{e^8 + 1}{2}\right) \approx 0,913 \end{aligned}$$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 7

Métropole 17 juin 2025 - sujet 1

Partie A : étude d'un modèle discret

1. Le premier juillet 2025 étant le premier juillet 2024 + 1, on demande ici de calculer : $u_1 = u_{0+1} = -0,02u_0^2 + 1,3u_0 = -0,02 \times 1^2 + 1,3 \times 1 = 1,3 - 0,02 = 1,28$.

D'après ce modèle, au premier juillet 2025, la posidonie recouvrera une superficie de 1,28 ha.

2. On remarque que la fonction h introduite dans la question est la fonction de récurrence de la suite, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , on a : $h(u_n) = u_{n+1}$.

Pour tout entier naturel n , on pose l'affirmation P_n : « $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$. »

Initialisation : pour $n = 0$, on a, d'après la définition de la suite $u_0 = 1$ et d'après la question précédente $u_1 = 1,28$.

On constate donc que l'affirmation P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose que, pour un entier naturel n , l'affirmation P_n est vraie.

Par hypothèse, on a donc :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20 \implies h(1) \leq h(u_n) \leq h(u_{n+1}) \leq h(20)$$

car h est supposée croissante sur $[0 ; 20]$

$$\implies 1,28 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 18 \quad \text{car } h(1) = 1,28 \text{ et } h(20) = 18.$$

$$\implies 1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 20 \quad \text{car } 1 \leq 1,28 \text{ et } 18 \leq 20.$$

Si P_n est vraie, alors P_{n+1} est donc vraie aussi.

Conclusion : On a établi que la propriété était vraie au rang 0, et que, pour n naturel n , P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi, donc d'après le principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

3. D'après la question précédente, on a :

— $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 20$: la suite est bornée par 1 et 20;

— $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$: la suite est croissante;

La suite est donc croissante et majorée, elle est donc convergente, vers une limite L .

Comme la suite est bornée par 1 et 20, on en déduit que la limite L est donc un réel de l'intervalle $[1 ; 20]$.

4. La suite u est définie par récurrence, sa fonction de récurrence étant continue (la fonction h est un polynôme de degré 2, donc continue sur son ensemble de définition); la suite est également convergente. D'après le théorème du point fixe, on en déduit que la limite de la suite (u_n) doit être une solution à l'équation $h(x) = x$.

Réolvons cette équation : $h(x) = x \iff -0,02x^2 + 1,3x = x$

$$\iff -0,02x^2 + 0,3x = 0$$

$$\iff -0,02x \left(x + \frac{0,3}{-0,02} \right) = 0$$

$$\iff -0,02x(x - 15) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou bien } x = 15$$

L'équation a deux solutions, 0 et 15, et parmi ces deux solutions, seule 15 est dans l'intervalle $[1 ; 20]$, dont on a établi qu'il contient la limite L .

La limite de la suite est donc bien $L = 15$.

5. a. Puisque la suite converge vers 15, tout intervalle ouvert contenant 15 doit contenir tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang.

L'intervalle $]14 ; +\infty[$ est un tel intervalle, donc il existe un rang N_0 à partir duquel les termes de la suite sont dans l'intervalle $]14 ; +\infty[$, et sont donc supérieurs à 14.

Il existe donc une année à partir de laquelle la posidonie recouvrira une surface dépassant les 14 ha.

b. Il s'agit ici d'un algorithme de seuil classique, n et u sont initialisées à 0 et u_0 respectivement. Tant que le terme stocké dans la variable u restera inférieur ou égal à 14, alors on mettra à jour ces deux variables pour qu'elles contiennent respectivement l'indice suivant et le terme suivant dans la suite.

Cela donne :

```
def seuil():
    n=0
    u=1
    while u <= 14 :
        n= n+1
        u= -0.02*u**2 + 1.3*u
    return n
```

Remarque : Il y a une légère ambiguïté sur l'interprétation de l'expression « dépassera les 14 hectares ». On a choisi dans ce corrigé de le comprendre comme « devenant strictement supérieur à 14 hectares ».

Si on interprète comme « devenant supérieur ou égal à 14 hectares », alors la quatrième ligne de l'algorithme devient : `while u < 14` : Les deux versions renvoient le même résultat, de toutes façons, car aucun terme de la suite n'est égal à 14.

L'appel `seuil()` renvoie ici 18, car $u_{17} \approx 13,8$ et $u_{18} \approx 14,1$. Il faudra donc 18 ans pour que la posidonie recouvre une surface dépassant les 14 hectares.

Partie B : étude d'un modèle continu

1. Si on a, pour tout réel positif t , $g = \frac{1}{f(t)}$, alors pour tout réel t positif, on a :

$$g'(t) = \frac{-f'(t)}{f(t)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{On aura alors : } -0,3g(t) + 0,02 &= \frac{-0,3}{f(t)} + 0,02 \\ &= \frac{-0,3 + 0,02f(t)}{f(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et, par ailleurs : } g'(t) &= \frac{-f'(t)}{f(t)^2} \\ &= \frac{-[0,02f(t)(15 - f(t))]}{f(t)^2} \quad \text{car } f \text{ est solution de } (E_1) \\ &= \frac{-[0,02(15 - f(t))]}{f(t)} \quad \text{en simplifiant par } f(t) \\ &\quad \text{on rappelle que } f \text{ ne s'annule pas sur } [0; +\infty[\\ &= \frac{-0,3 + 0,02f(t)}{f(t)} \quad \text{en développant} \\ &= -0,3g(t) + 0,02 \end{aligned}$$

On constate bien que g est une solution de l'équation différentielle (E_2) .

2. Les solutions de l'équation (E_2) sont, d'après une propriété du cours, les fonctions de la forme : $t \mapsto C e^{-0,3t} + \frac{-0,02}{-0,3}$, où $C \in \mathbb{R}$.

C'est-à-dire, les fonctions de la forme $t \mapsto C e^{-0,3t} + \frac{1}{15}$, où $C \in \mathbb{R}$.

3. Comme on sait que $f(0) = 1$, on en déduit $g(0) = \frac{1}{f(0)} = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } g(0) = 1 &\iff C e^{-0,3 \times 0} + \frac{1}{15} = 1 \\ &\iff C + \frac{1}{15} = 1 \\ &\iff C = 1 - \frac{1}{15} \\ &\iff C = \frac{14}{15} \end{aligned}$$

La seule fonction solution de (E_2) vérifiant $g(0) = 1$ est donc

$$g : t \mapsto \frac{14}{15} e^{-0,3t} + \frac{1}{15}.$$

On en déduit donc que, pour tout t réel positif, on a : $f(t) = \frac{1}{g(t)}$

$$= \frac{1}{\frac{14}{15}e^{-0,3t} + \frac{1}{15}}$$

$$= \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1}$$

On arrive bien à l'expression annoncée.

4. On a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,3t = -\infty$, donc par composition, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,3t} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$

Par limite du produit et de la somme, on a alors : $\lim_{t \rightarrow +\infty} 14e^{-0,3t} + 1 = 1$.

Finalement, par limite du quotient : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1} = 15$.

La fonction f tend vers 15 quand t tend vers $+\infty$. Le modèle continu rejoint la conclusion du modèle discret : la posidonie tendra à occuper une surface de 15 hectares.

5. Soit t un réel positif. Résolvons :

$$\begin{aligned} f(t) > 14 &\Leftrightarrow \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1} > 14 \\ &\Leftrightarrow 15 > 14(14e^{-0,3t} + 1) \quad \text{car } 14e^{-0,3t} + 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow 15 > 196e^{-0,3t} + 14 \\ &\Leftrightarrow 1 > 196e^{-0,3t} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{196} > e^{-0,3t} \quad \text{car } 196 > 0 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{196}\right) > -0,3t \quad \text{car } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow -\ln(196) > -0,3t \quad \text{par propriété de la fonction } \ln \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(196)}{0,3} < t \quad \text{car } -0,3 < 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle $\left] \frac{\ln(196)}{0,3} ; +\infty \right[$.

Comme $\frac{\ln(196)}{0,3} \approx 17,6$, cela signifie qu'il faudra environ 17,6 années (soit 17 ans et un peu plus de 7 mois) pour que la posidonie occupe un espace strictement supérieur à 14 hectares. Là encore, le modèle continu a des conclusions cohérentes avec celles du modèle discret.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 8

Métropole 18 juin 2025 - sujet 2

Partie A

1. Graphiquement on lit que $f(2) = 15$: le chariot a parcouru 15 m en 2 secondes.
2. L'équation d Δ a une équation $y = k$, avec $k < 23$.
Une zone de 23 m de longueur semble suffisante.

3. La tangente en A contient les points de coordonnées (0; 16,5) et (4,7; 21). Son coefficient directeur est donc égal à : $\frac{21 - 16,5}{4,7 - 0} = \frac{4,5}{4,7} \approx 0,96$.

Partie B

1. a. On considère l'équation différentielle

$$(E') : y' + 0,6y = 0.$$

On sait que les solutions de cette équation (homogène) sont les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$t \mapsto f(t) = K e^{-0,6t}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

- b. Si g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = t e^{-0,6t}$, alors

$$g'(t) = e^{-0,6t} - 0,6t e^{-0,6t} = e^{-0,6t}(1 - 0,6t).$$

$$\text{Calculons } g'(t) + 0,6g(t) = e^{-0,6t}(1 - 0,6t) + 0,6 \times t e^{-0,6t} = e^{-0,6t}(1 - 0,6t + 0,6t) = e^{-0,6t} \times 1 = e^{-0,6t}.$$

Comme $g'(t) + 0,6g(t) = e^{-0,6t}$, g est bien une solution particulière de l'équation (E).

- c. On sait qu'alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$t \mapsto f(t) = t e^{-0,6t} + K e^{-0,6t} = e^{-0,6t}(t + K), \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

- d. En particulier la fonction v , est de cette forme :

$$v(t) = e^{-0,6t}(t + K) \text{ et vérifie } v(0) = 12.$$

$$\text{Or } v(0) = e^{-0,6 \times 0}(0 + K) = 12 \iff 0 + K = 12 \iff K = 12.$$

$$\text{Conclusion : } v(t) = (12 + t) e^{-0,6t}.$$

2. a. Puisque v est une solution de (E), elle vérifie donc $v'(t) + 0,6v(t) = e^{-0,6t} \iff v'(t) = e^{-0,6t} - 0,6v(t) \iff v'(t) = e^{-0,6t} - 0,6(12 + t) e^{-0,6t} \iff v'(t) = e^{-0,6t}(1 - 7,2 - 0,6t) = e^{-0,6t}(-6,2 - 0,6t).$

- b. Avec l'écriture $v(t) = 12 e^{-0,6t} + \frac{1}{0,6} \times \frac{0,6t}{e^{0,6t}}$, on a :

$$\bullet \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,6t} = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} 12 e^{-0,6t} = 0;$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{0,6t}{e^{0,6t}} = 0 \text{ (puissances comparées au voisinage de plus l'infini) et ensuite } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{0,6} \frac{0,6t}{e^{0,6t}} = 0.$$

Finalement par somme de limites : $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$ (ce qui est rassurant : le chariot va s'arrêter).

- c. Puisque $v'(t) = e^{-0,6t}(-6,2 - 0,6t)$ et comme $e^{-0,6t} > 0$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$, le signe de $v'(t)$ est celui de $(-6,2 - 0,6t)$.

$$\bullet -6,2 - 0,6t > 0 \iff -6,2 > 0,6t \iff -62 > 6t \iff -\frac{62}{6} > t \iff t < \frac{62}{6}$$

soit enfin $t < \frac{31}{3}$; v est donc croissante sur $\left[-\infty; -\frac{31}{3}\right]$; dans le cadre de l'exercice puisque $t \geq 0$ ceci ne peut arriver, donc

$$\bullet -6,2 - 0,6t < 0 \iff t > -\frac{62}{6}, \text{ soit en fait pour } t \geq 0, \text{ donc } v \text{ est décroissante sur } [0; +\infty[\text{ de } 12 \text{ à } 0.$$

d. D'où le tableau de variation suivant :

x	0	α	$+\infty$
$v'(t)$		-	
v	12		0

Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la fonction v continue, car dérivable est strictement décroissante de 12 à 0; comme $1 \in]0 ; 12]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique $\alpha \in]0 ; +\infty[$ tel que $v(\alpha) = 1$.

La calculatrice montre que :

$v(4) \approx 1,5$ et $v(5) \approx 0,85$, donc $4 < \alpha < 5$;

$v(4,6) \approx 1,05$ et $v(4,7) \approx 0,995$, donc $4,6 < \alpha < 4,7$; à 0,1 près on prend $\alpha \approx 4,7$.

3. D'après la question précédente la vitesse descend à 1 m/s au bout de 4,7 s. Le système d'arrêt se déclenchera donc au bout de 4,7 s.

Partie C

1. Calcul de l'intégrale : $d(t) = \int_0^t (12 + x) e^{-0,6x} dx$:

Avec

$$\begin{cases} u(x) = 12 + x & v'(x) = e^{-0,6x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -\frac{1}{0,6} e^{-0,6x} \end{cases},$$

et toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur $[0 ; t]$, on peut intégrer par parties :

Rappel : $\int_0^t u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_0^t - \int_0^t u'(x) v(x) dx.$

Donc $d(t) = \left[-(12 + x) \times \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} \right]_0^t - \int_0^t -\frac{1}{0,6} e^{-0,6x} dx.$

Soit $d(t) = \left[-(12 + x) \times \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} \right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} dx =$

$$\left[-(12 + x) \times \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} \right]_0^t - \frac{1}{0,6} \left[\frac{1}{0,6} e^{-0,6x} \right]_0^t = \left[-(12 + x) \times \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} - \frac{1}{0,36} e^{-0,6x} \right]_0^t.$$

Or $\frac{1}{0,6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ et $\frac{1}{0,36} = \frac{100}{36} = \frac{4 \times 25}{4 \times 9} = \frac{25}{9}.$

Soit $d(t) = \left[-(12 + x) \times \frac{5}{3} e^{-0,6x} \right]_0^t - \left[\frac{25}{9} e^{-0,6x} \right]_0^t = \left[-e^{-0,6x} \left(\frac{5(12 + x)}{3} + \frac{25}{9} \right) \right]_0^t =$
 $-e^{-0,6t} \left(20 + \frac{5t}{3} + \frac{25}{9} \right) + 20 + \frac{25}{9} = e^{-0,6t} \left(-\frac{5}{3} t - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}.$

2. On a vu que la vitesse du chariot est à peu près égale à 1 m/s au bout de 4,7 s.

La distance parcourue par le chariot au moment du déclenchement de l'arrêt est donc $d(4,7) = e^{-0,6 \times 4,7} \left(-\frac{5}{3} \times 4,7 - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9} \approx 20,95$ (m) au centimètre près.

Le dispositif s'arrêt se déclenche quand le chariot a parcouru environ 20,95 m.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 9

Polynésie 2 septembre 2025 - sujet 1

On étudie l'évolution de la population d'une espèce animale au sein d'une réserve naturelle. Les effectifs de cette population ont été recensés à différentes années. Les données collectées sont présentées dans le tableau suivant :

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100

Pour anticiper l'évolution de cette population, la direction de la réserve a choisi de modéliser le nombre d'individus en fonction du temps. Pour cela, elle utilise une fonction, définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, dont la variable x représente le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2000. Dans son modèle, l'image de 0 par cette fonction vaut 50, ce qui correspond au nombre d'individus en l'an 2000.

Partie A. Modèle 1

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante : $y' = 0,05y - 0,5$ (E_1)

1. On résout l'équation différentielle (E_1) avec la condition initiale $y(0) = 50$.

- L'équation différentielle $y' = ay$ a pour solutions les fonctions y vérifiant $y(x) = C e^{ax}$ où C est un réel quelconque.
Donc l'équation différentielle $y' = 0,05y$ a pour solutions les fonctions y vérifiant $y(x) = C e^{0,05x}$ où C est un réel quelconque.
- On cherche une solution particulière constante k à l'équation (E_1).
On a donc $0 = 0,05k - 0,5$ donc $k = 10$.
- Les solutions de l'équation (E_1) sont donc les fonctions y définies par $y(x) = C e^{-0,05x} + 10$ où $C \in \mathbb{R}$.
- On cherche la solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 50$.
On a donc $C e^0 + 10 = 50$ donc $C = 40$.

La solution de l'équation différentielle (E_1) vérifiant $y(0) = 50$ est la fonction y définie par $y(x) = 40 e^{0,05x} + 10$.

2. On compare les résultats du tableau avec ceux que l'on obtiendrait avec ce modèle.

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100
x	0	5	10	15
$y(x)$	50	61,36	75,95	94,68

Partie B. Modèle 2

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante : $y' = 0,05y(1 - 0,00125y)$ (E_2).

On note f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$,
et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.

	Instruction	Résultat
1	$f(x) := \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$	$f(x) = \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$
2	$f'(x) := \text{Dérivée } (f(x))$	$f'(x) = \frac{600e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^2}$
3	$f''(x) := \text{Dérivée } (f'(x))$	$f''(x) = \frac{30e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^3} (15e^{-0,05x} - 1)$
4	Résoudre $(15e^{-0,05x} - 1 \geq 0)$	$x \leq 20 \ln(15)$

1. On a d'une part : $f(0) = \frac{800}{1 + 15e^0} = \frac{800}{16} = 50$

D'autre part :

- $0,05f(x) = \frac{0,05 \times 800}{1 + 15e^{-0,05x}} = \frac{40}{1 + 15e^{-0,05x}}$
- $0,00125f(x) = \frac{0,00125 \times 800}{1 + 15e^{-0,05x}} = \frac{1}{1 + 15e^{-0,05x}}$
- $1 - 0,00125f(x) = 1 - \frac{1}{1 + 15e^{-0,05x}} = \frac{1 + 15e^{-0,05x} - 1}{1 + 15e^{-0,05x}} = \frac{15e^{-0,05x}}{1 + 15e^{-0,05x}}$
- $0,05f(x)(1 - 0,00125f(x)) = \frac{40}{1 + 15e^{-0,05x}} \times \frac{15e^{-0,05x}}{1 + 15e^{-0,05x}} = \frac{40 \times 15e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^2}$

$$= \frac{600e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^2} = f'(x) \text{ d'après le tableau}$$

On admet que cette fonction f est l'unique solution de (E_2) prenant la valeur initiale de 50 en 0.

2. Avec ce nouveau modèle f , l'effectif de cette population en 2050 peut être estimé à $f(50)$ soit environ 358.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -0,05x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,05x} = 0$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 15e^{-0,05x} = 1$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}} = 800$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 800$, ce qui prouve que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = 800$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

4. Sur $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{600e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^2}$.

Or pour tout réel X , on sait que $e^X > 0$, donc $e^{-0,05x} > 0$ pour tout x .

$(1 + 15e^{-0,05x})^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

On en conclut que la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

5. On résout l'inéquation $15e^{-0,05x} - 1 \geq 0$.

$$15e^{-0,05x} - 1 \geq 0 \iff 15e^{-0,05x} \geq 1 \iff e^{-0,05x} \geq \frac{1}{15} \iff -0,05x \geq \ln\left(\frac{1}{15}\right)$$

$$\iff x \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{15}\right)}{-0,05} \iff x \leq \frac{-\ln(15)}{-0,05} \iff x \leq 20 \ln(15)$$

6. On admet que la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an, est modélisée par la fonction f' .

a. Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on détermine le signe de la dérivée seconde $f''(x)$.

D'après le tableau : $f''(x) = \frac{30e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^3} (15e^{-0,05x} - 1)$.

D'après ce qui a été vu précédemment, $f''(x)$ est du signe de $(15e^{-0,05x} - 1)$.

x	0	$20 \ln(15)$	$+\infty$
$15e^{-0,05x} - 1$	+	0	-
$f''(x)$	+	0	-
	f convexe		f concave

En $x = 20 \ln(15)$, $f''(x)$ s'annule et change de signe, donc la courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion.

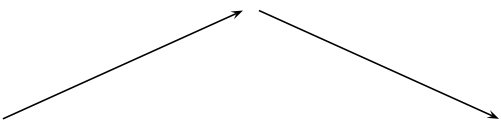
Si $x = 20 \ln(15)$, $15e^{-0,05x} - 1 = 0$ donc $15e^{-0,05 \times 20 \ln(15)} = 1$

$$f(20 \ln(15)) = \frac{800}{1 + 15e^{-0,05 \times 20 \ln(15)}} = \frac{800}{1 + 1} = 400$$

Donc le point de coordonnées $(20 \ln(15), 400)$ est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

- b. La direction de la réserve affirme : « Au vu de ce modèle, la vitesse de croissance de la population de cette espèce va augmenter pendant un peu plus de cinquante ans, puis va diminuer ».

On établit le tableau de variations de la fonction f' qui modélise la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an.

x	0	$20 \ln(15)$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
f'			

Or $20 \ln(15) \approx 54,2$ donc la direction a raison.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 10

Métropole 9 septembre 2025 - sujet 1

Partie A

1. Dérivons la fonction u : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = 1 \times e^{-0,4t} + t \times (-0,4) e^{-0,4t}$
 $= e^{-0,4t} - 0,4t e^{-0,4t}$
 $= (1 - 0,4t) e^{-0,4t}$

Vérifions que u est solution de (E) :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) + 0,4u(t) &= (1 - 0,4t)e^{-0,4t} + 0,4 \times te^{-0,4t} \\ &= e^{-0,4t} - 0,4te^{-0,4t} + 0,4te^{-0,4t} \\ &= e^{-0,4t}\end{aligned}$$

Donc u est bien solution de (E).

2. a. Soit $g = f - u$ avec g solution de (H).

Comme g est une solution de (H), on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) + 0,4g(t) = 0$.

Or $g = f - u$, donc $g' = f' - u'$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) + 0,4g(t) = 0 &\iff f'(t) - u'(t) + 0,4(f(t) - u(t)) = 0 \\ &\iff f'(t) - u'(t) + 0,4f(t) - 0,4u(t) = 0 \\ &\iff f'(t) + 0,4f(t) = u'(t) + 0,4u(t) \\ &\iff f'(t) + 0,4f(t) = e^{-0,4t}\end{aligned}$$

La dernière équivalence se justifie car u étant une solution particulière de (E), on a bien : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) + 0,4u(t) = e^{-0,4t}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Donc f est solution de (E).

- b. L'équation (H) : $y' + 0,4y = 0$ est de la forme $y' = -0,4y$.

Les solutions sont les fonctions de la forme : $g : t \mapsto Ce^{-0,4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

- c. D'après les questions précédentes, f est solution de (E) si et seulement si $g = f - u$ est solution de (H).

Donc si et seulement si on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) - u(t) = Ce^{-0,4t}$

Les solutions de (E) sont les fonction f telles que : $f : t \mapsto te^{-0,4t} + Ce^{-0,4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

C'est-à-dire les fonction f telles que : $f : t \mapsto (t + C)e^{-0,4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

- d. Ici, on introduit une condition initiale, on veut avoir : $f(0) = 1$.

$$f(0) = 1 \iff (0 + C)e^0 = 1$$

$$\iff C = 1$$

Donc la fonction f cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = (t + 1)e^{-0,4t}$.

Partie B

On remarque que la fonction f présentée est la solution que nous avons identifiée à la partie A.

1. a. f étant une solution de l'équation (E) sur $[0 ; 6]$, on a :

$$f' + 0,4f = e^{-0,4t} \iff f' = -0,4f + e^{-0,4t}$$

$$\begin{aligned}\text{Et donc : } \forall t \in [0 ; 6] : \quad f'(t) &= -0,4f(t) + e^{-0,4t} \\ &= -0,4(t + 1)e^{-0,4t} + e^{-0,4t} \\ &= (-0,4t - 0,4 + 1)e^{-0,4t} \\ &= (-0,4t + 0,6)e^{-0,4t}\end{aligned}$$

Remarque : on peut aussi obtenir cette expression en dérivant l'expression donnée pour f avec les formules classiques de dérivation.

- b. Étude du signe de $f'(t)$ sur $[0 ; 6]$:

La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc $e^{-0,4t} > 0$ pour tout t , donc le signe de $f'(t)$ est celui de $-0,4t + 0,6$.

$$\begin{aligned}
-0,4t + 0,6 > 0 &\iff -0,4t > -0,6 \\
&\iff t < \frac{-0,6}{-0,4} \quad \text{car } -0,4 < 0 \\
&\iff t < 1,5
\end{aligned}$$

Tableau de variations :

x	0	1,5	6
signe de $f'(x)$	+	0	-
variations de f	1	$2,5e^{-0,6}$	$7e^{-2,4}$

Avec $f(0) = 1$, $f(1,5) = 2,5e^{-0,6} \approx 1,37$ et $f(6) = 7e^{-2,4} \approx 0,63$.

2. a. Sur $[0 ; 1,5]$, f est strictement croissante avec $f(0) = 1 > 0,7$: l'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.

Sur $[1,5 ; 6]$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante et 0,7 est une valeur intermédiaire entre $f(1,5) \approx 1,37$ et $f(6) \approx 0,63$.

D'après le corollaire aux théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(t) = 0,7$ admet une unique solution α sur $[1,5 ; 6]$.

Finalement, l'équation $f(t) = 0,7$ admet bien une unique solution sur $[0 ; 6]$.

- b. Par approximations successives, ou en utilisant le solveur de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 5,62$ heures (on donne une approximation au centième près, car la précision attendue est à la minute, qui est un soixantième d'heure).

$0,62 \times 60 \approx 37$ minutes.

La personne est en hypoglycémie au bout de 5 heures et 37 minutes après le repas.

3. a. Calcul de $\int_0^6 f(t) dt = \int_0^6 (t+1)e^{-0,4t} dt$.

On pose, pour tout t dans $[0 ; 6]$: $u(t) = t+1$ et $v'(t) = e^{-0,4t}$

puis $u'(t) = 1$ et $v(t) = \frac{1}{-0,4} e^{-0,4t} = -2,5e^{-0,4t}$.

Les fonctions u , u' , v et v' sont continues sur $[0 ; 6]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^6 (t+1)e^{-0,4t} dt &= \int_0^6 u(t)v'(t) dt \\
&= \left[u(t)v(t) \right]_0^6 - \int_0^6 u'(t)v(t) dt \\
&= \left[(t+1) \times (-2,5e^{-0,4t}) \right]_0^6 - \int_0^6 1 \times (-2,5e^{-0,4t}) dt \\
&= \left[-2,5(t+1)e^{-0,4t} \right]_0^6 + 2,5 \int_0^6 e^{-0,4t} dt \\
&= (-2,5 \times 7e^{-2,4}) - (-2,5 \times 1 \times e^0) + 2,5 \left[-2,5e^{-0,4t} \right]_0^6 \\
&= -17,5e^{-2,4} + 2,5 + 2,5 \left[(-2,5e^{-2,4}) - (-2,5e^0) \right] \\
&= -17,5e^{-2,4} + 2,5 - 6,25e^{-2,4} + 6,25 \\
&= -23,75e^{-2,4} + 8,75
\end{aligned}$$

- b. La glycémie moyenne pendant la période de six heures est donc donnée par la valeur moyenne de la fonction f (qui donne la glycémie instantanée en

fonction du temps) sur l'intervalle $[0 ; 6]$ (le temps étant mesuré en heures).

On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{6-0} \int_0^6 f(t) dt &= \frac{1}{6} (-23,75 e^{-2,4} + 8,75) \\ &= \frac{95 e^{-2,4} + 35}{24} \quad (\text{ceci est la valeur exacte}) \\ &\approx 1,099 \quad \text{valeur approchée au millième}\end{aligned}$$

La glycémie moyenne lors des six heures suivant le repas est donc d'environ $1,10 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$.

- c. Comme f est solution de (E), on a : $f' + 0,4f = e^{-0,4t}$.

En définissant, comme à la question 3. a., les fonctions v' et v par :

$v'(t) = e^{-0,4t}$ et $v(t) = -2,5 e^{-0,4t}$, on a :

$$f' + 0,4f = e^{-0,4t} \iff f' + 0,4f = v'$$

$$\iff 0,4f = v' - f'$$

$$\iff f = 2,5(v' - f')$$

On en déduit qu'une primitive de f peut s'exprimer sous la forme :

$$F : t \longmapsto 2,5(v(t) - f(t))$$

$$\text{Soit : } \forall t \in [0 ; 6], \quad F(t) = 2,5(-2,5 e^{-0,4t} - (t+1) e^{-0,4t})$$

$$= 2,5(-2,5 - (t+1)) e^{-0,4t}$$

$$= 2,5(-3,5 - t) e^{-0,4t}$$

$$= (-8,75 - 2,5t) e^{-0,4t}$$

$$\begin{aligned}\text{On a alors : } \int_0^6 f(t) dt &= \left[(-8,75 - 2,5t) e^{-0,4t} \right]_0^6 \\ &= (-8,75 - 2,5 \times 6) e^{-0,4 \times 6} - (-8,75 - 2,5 \times 0) e^{-0,4 \times 0} \\ &= -23,75 e^{-2,4} + 8,75\end{aligned}$$

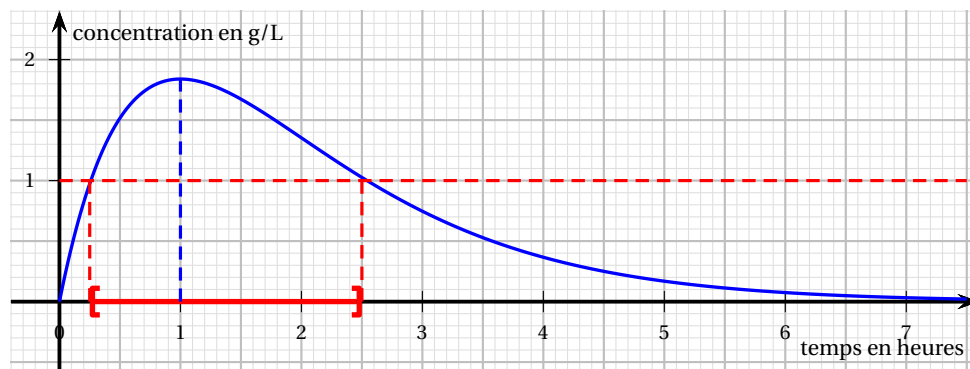
Cela confirme bien le résultat obtenu à la question 3. a..

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 1 I

Amérique du Sud 13 novembre 2025 - sujet 1

On se propose d'étudier la concentration dans le sang d'un médicament ingéré par une personne pour la première fois. Soit t le temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion de ce médicament. On admet que la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre de sang, est modélisée par une fonction f de la variable t définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Partie A : lectures graphiques



On a représenté ci-dessus la courbe représentative de la fonction f .
Avec la précision permise par le graphique, on donne sans justification :

1. Le temps écoulé depuis l'instant de l'ingestion de ce médicament et l'instant où la concentration de médicament dans le sang est maximale selon ce modèle : 1 heure.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \geq 1$: l'intervalle $[0,25 ; 2,5]$.
3. La convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 8]$: la fonction semble concave entre 0 et 2, puis convexe.

Partie B : détermination de la fonction f

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = 5e^{-t}$,
d'inconnue y , où y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On admet que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

1. On résout l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.
D'après le cours, on sait que les équations différentielles de la forme $ay' + by = 0$ ont des solutions y s'écrivant $y(t) = ke^{-\frac{b}{a}t}$ où k est un réel quelconque.
Donc l'équation (E') a pour solutions les fonctions y s'écrivant $y(t) = ke^{-t}$ où $k \in \mathbb{R}$.
2. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $u(t) = ate^{-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
La fonction u est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $u'(t) + u(t) = 5e^{-t}$.
 $u(t) = ate^{-t}$ donc $u'(t) = a \times e^{-t} + at \times (-1)e^{-t} = ae^{-t} - ate^{-t}$
 $u'(t) + u(t) = 5e^{-t} \iff ae^{-t} - ate^{-t} + ate^{-t} = 5e^{-t} \iff ae^{-t} = 5e^{-t} \iff a = 5$
car $e^{-t} \neq 0$ pour tout t .
Donc la fonction u définie par $u(t) = 5te^{-t}$ est une solution de (E).
3. La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation sans second membre (E') : ce sont donc les fonctions f définies par $f(t) = ke^{-t} + 5te^{-t}$ où $k \in \mathbb{R}$.
4. La personne n'ayant pas pris ce médicament auparavant, on admet que $f(0) = 0$.
 $f(0) = 0 \iff ke^0 + 5 \times 0 \times e^0 = 0 \iff 0 = 0$
L'expression de la fonction f est $f(t) = 5te^{-t}$.

Partie C : étude de la fonction f

Dans cette partie, on admet que f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 5te^{-t}$.

1. On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} 5t e^{-t} = 0$, et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$

Cela signifie que la concentration en médicament devient nulle quand le temps augmente indéfiniment.

2. f est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

$$f(t) = 5t e^{-t} \text{ donc } f'(t) = 5 \times e^{-t} + 5t \times (-1)e^{-t} = (5 - 5t) e^{-t}$$

On étudie le signe de $f'(t)$ sur $[0; +\infty[$.

t	0	1	$+\infty$
$5 - 5t$	+	0	-
e^{-t}	+		+
$f'(t)$	+	0	-

$$f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 5 \times 1 \times e^{-1} = 5e^{-1}$$

On établit le tableau de variation complet de f sur $[0; +\infty[$.

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
f	0	$5e^{-1}$	0

3. On veut montrer qu'il existe deux réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 1$.

Le maximum de la fonction f est $f(1) = 5e^{-1} \approx 1,84 > 1$.

On complète le tableau de variation de f .

t	0	t_1	1	t_2	$+\infty$
f	0	1	$5e^{-1}$	1	0

- Sur l'intervalle $]0; 1[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $1 \in]f(0); f(1)[$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 1$ admet une solution unique dans $]0; 1[$. On l'appelle t_1 .

D'après la calculatrice : $f(0,25) \approx 0,97 < 1$ et $f(0,26) \approx 1,002 > 1$ donc 0,25 est une valeur approchée de t_1 à 10^{-2} .

- Sur l'intervalle $]1; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus $1 \in]\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t); f(1)[$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 1$ admet une solution unique dans $]1; +\infty[$. On l'appelle t_2 .

D'après la calculatrice : $f(2,54) \approx 1,002 > 1$ et $f(2,55) \approx 0,996 < 1$ donc 2,54 est une valeur approchée de t_2 à 10^{-2} .

4. Pour une concentration du médicament supérieure ou égale à 1 gramme par litre de sang, il y a un risque de somnolence. C'est donc quand $f(t) \geq 1$.

$f(t) \geq 1$ pour $t \in [t_1; t_2]$, soit pour une durée égale à $t_2 - t_1$ qui vaut environ 2,54 – 0,25 soit 2,29 heures; cela fait environ 2 heures et 17 minutes.

Partie D : concentration moyenne

La concentration moyenne du médicament (en gramme par litre de sang) durant la première heure est donnée par : $T_m = \int_0^1 f(t) dt$ où f est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = 5te^{-t}$.

On utilise une intégration par parties : $\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$.

On pose $\begin{cases} u(t) = 5t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t) = 5 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$

$$\begin{aligned} T_m &= \int_0^1 5te^{-t} dt = [5t \times (-e^{-t})]_0^1 - \int_0^1 5 \times (-e^{-t}) dt = [-5te^{-t}]_0^1 - 5[e^{-t}]_0^1 \\ &= (-5e^{-1} - 0) - (-5e^{-1} + 5e^0) = 5 - 10e^{-1} \approx 1,32 \end{aligned}$$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 12

Amérique du Sud 14 novembre 2025 - sujet 2

Partie A : dénombrement

On considère l'ensemble des nombres entiers relatifs **non nuls** compris entre -30 et 30 ; cet ensemble peut s'écrire ainsi : $\{-30; -29; -28; \dots; -1; 1; \dots; 28; 29; 30\}$. Il comporte 60 éléments.

On choisit dans cet ensemble successivement et sans remise un entier relatif a puis un entier relatif c .

1. On peut choisir comme premier terme du couple entre 60 entiers; comme il n'y a pas de remise (???) et que $(a; b) \neq (b; a)$, le deuxième terme peut être choisi entre 59 entiers.

On peut donc obtenir $60 \times 59 = 3540$ couples différents.

2. L'équation a deux racines si le déterminant est supérieur à zéro, donc si :

$$\Delta = 4 - 4ac > 0 \iff (4(1 - ac)) > 0 \iff 1 - ac > 0 \iff ac < 1.$$

3. Il faut donc trouver le nombre de couples vérifiant $ac \geq 1$, mais en fait $ac > 1$ puisque l'on ne peut avoir $(-1; -1)$ ni $(1; 1)$.

Si l'on choisit en premier un entier négatif (30 choix) le second terme sera choisi dans les 29 entiers négatifs restant, soit $30 \times 29 = 870$ couples;

Même chose si les deux termes choisis sont positifs, soit 870 couples.

L'évènement $\overline{M}$ sera réalisé pour $870 + 870 = 1740$ couples.

4. D'après le résultat précédent l'évènement M sera réalisé pour $3540 - 1740 = 1800$ couples.

$$\text{Donc } p(M) = \frac{1800}{3540} = \frac{30}{59} \approx 0,5084 \text{ soit } 0,508 \text{ au millième près.}$$

Partie B : équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + 10y = (30x^2 + 22x - 8) e^{-5x+1} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. L'équation différentielle est équivalente à l'équation $y' = -10y$.

On sait que les solutions de cette équation sont les fonctions définies par

$$x \mapsto f(x) = C e^{-10x}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

2.

$$f(x) = (6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1}.$$

Étant admis que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on calcule :

$$f'(x) = (12x+2) e^{-5x+1} + (-5)(6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1} = e^{-5x+1} [12x + 2 - 30x^2 - 10x + 10] = e^{-5x+1} (-30x^2 + 2x + 12).$$

$$\text{Alors } f'(x) + f(x) = e^{-5x+1} (-30x^2 + 2x + 12) + 10(6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1} = e^{-5x+1} (-30x^2 + 2x + 12 + 60x^2 + 20x - 20) = e^{-5x+1} (30x^2 + 22x - 8).$$

On a donc bien démontré que f est une solution de l'équation différentielle (E).

3. Les résultats précédents permettent d'énoncer que toutes les solutions de (E) sont la somme de f et des solutions de l'équation $y' + 10y = 0$, soit

Toutes les solutions de (E) sont de la forme $(6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1} + C e^{-10x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie C : étude de fonction

On rappelle que, pour tout réel x , $f(x) = (6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1}$.

1. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$\text{On a } 6x^2 + 2x - 2 = x^2 \left(6 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} \right).$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0, \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 6 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} = 6.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty,$$

Enfin on sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-5x+1} = +\infty$ on a finalement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

2. On sait que quel que soit le réel $-5x + 1$, $e^{-5x+1} > 0$: le signe de $f(x)$ est donc celui du trinôme $6x^2 + 2x - 2$.

Le trinôme vérifie l'évènement M puisque avec $a = 6$ et $c = -2$, $ac = -12 < 1$.

Le trinôme s'annule donc pour deux réels distincts : géométriquement $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points.

Non demandé : $\Delta = 4 + 48 = 52 = 4 \times 13$.

$$\text{Les racines sont donc } x_1 = \frac{2 + \sqrt{52}}{12} = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \approx 0,77 \text{ et } x_2 = \frac{2 - \sqrt{52}}{12} = \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \approx -0,43$$

3. On a vu en A. 2. que $f'(x) = e^{-5x+1}(-30x^2 + 2x + 12)$; comme on sait que quel que soit le réel $-5x+1$, $e^{-5x+1} \neq 0$, donc $f'(x) = 0 \iff -30x^2 + 2x + 12 = 0 \iff -15x^2 + x + 6 = 0$. Comme $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-15) \times 6 = 361 = 19^2 > 0$, ce trinôme s'annule pour $x_1 = \frac{-1+19}{-30} = -\frac{18}{30} = -\frac{3}{5}$ et $x_2 = \frac{-1-19}{-30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

Aux points d'abscisse $-\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}$, le nombre dérivé est nul ce qui signifie que la tangente en ces deux points est horizontale.

4. Avec $f\left(-\frac{3}{5}\right) \approx -56,8$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0,19$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
signe de $f'(x)$	-	0	+	0	-
variations de f	$+\infty$	$\approx -56,8$	$\approx 0,19$	0	

5. Sur l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{3}{5}\right]$, la fonction f décroît de plus l'infini à environ $-56,8$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel α de cet intervalle tel que

$$f(\alpha) = 1.$$

Sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{5}; +\infty\right[$, $f(x) \leq 0,19 < 1$: il n'existe pas de solution de l'équation $f(x) = 1$ sur cet intervalle.

Conclusion : sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 1$ a une solution.

6. Pour tout réel m strictement supérieur à 0,2, on définit I_m par $I_m = \int_{0,2}^m f(x) dx$.

- a. F est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: sur cet intervalle :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(-\frac{12}{5}x - \frac{22}{25}\right) e^{-5x+1} - 5 \left(-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125}\right) e^{-5x+1} = \\ e^{-5x+1} \left(-\frac{12}{5}x - \frac{22}{25} + 6x^2 + \frac{22}{5}x - \frac{28}{25}\right) &= \left(6x^2 - \frac{10}{5}x - \frac{50}{25}\right) e^{-5x+1} = \\ (6x^2 - 2x + 2) e^{-5x+1} &= f(x). \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$ montre que F est une primitive de la fonction f .

- b. On a donc $I_m = \int_{0,2}^m f(x) dx = [F(x)]_{0,2}^m = F(m) - F(0,2)$.

$$\text{Or } F(0,2) = F\left(\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{6}{5} \times \frac{1}{25} - \frac{22}{25} \times \frac{1}{5} + \frac{28}{125}\right) e^{-5 \times \frac{1}{5} + 1} = \left(-\frac{28}{125} + \frac{28}{125}\right) e^0 = 0 \times 1 = 0.$$

$$\text{Il faut donc résoudre l'équation } F(m) = 0 \text{ soit } \left(-\frac{6}{5}m^2 - \frac{22}{25}m + \frac{28}{125}\right) e^{-5m+1} = 0 \iff -\frac{6}{5}m^2 - \frac{22}{25}m + \frac{28}{125} = 0, \text{ car quel que soit } m \in \mathbb{R}, e^{-5m+1} > 0.$$

On étudie donc le trinôme $-\frac{6}{5}m^2 - \frac{22}{25}m + \frac{28}{125}$ ou encore $-150m^2 - 110m + 28$ en multipliant par 125, et en simplifiant par 2 le trinôme : $-75m^2 - 55m + 14$.

Pour ce trinôme $\Delta = (-55)^2 - 4 \times (-75) \times 14 = 7225 = 85^2 > 0$.

$$\text{Ce trinôme a deux racines } m_1 = \frac{55+85}{-150} = -\frac{140}{150} = -\frac{14}{15} \text{ et } m_2 = \frac{55-85}{-150} = \frac{-30}{-150} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

La deuxième solution a déjà été trouvée ci-dessus ($F(0,2) = 0$).

Il existe donc une autre valeur $-\frac{14}{15}$ telle que $F\left(-\frac{14}{15}\right) = 0$ mais cette solution est négative alors que l'on demande une solution supérieure à 0,2 donc positive.

Interprétation graphique

On a tracé les représentations graphiques des fonctions f et F .

La surface limitée par la représentation graphique de f , $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 0,2$ et $x = m$ est égale à l'intégrale I_m .

Cette surface se compose de deux parties :

- une première partie correspondant à l'intégrale de 0,2 à environ 0,43 (valeur qui annule f) ; la courbe étant sous l'axe des abscisses l'aire est l'opposée de l'intégrale ;
- une deuxième partie correspondant à l'intégrale de 0,43 à m ; la courbe étant au dessus de l'axe des abscisses l'aire est égale à l'intégrale.

On a trouvé qu'il n'existe pas de valeur de m telle que I_m s'annule signifie géométriquement que quel que soit $m > 0,2$, l'aire de la surface située au dessus de l'axe des abscisses n'est pas égale à l'aire de la surface située sous l'axe des abscisses.

On voit aussi que pour $m > 0,2$ aucun point de la représentation de F (en rouge) n'a une ordonnée nulle.

