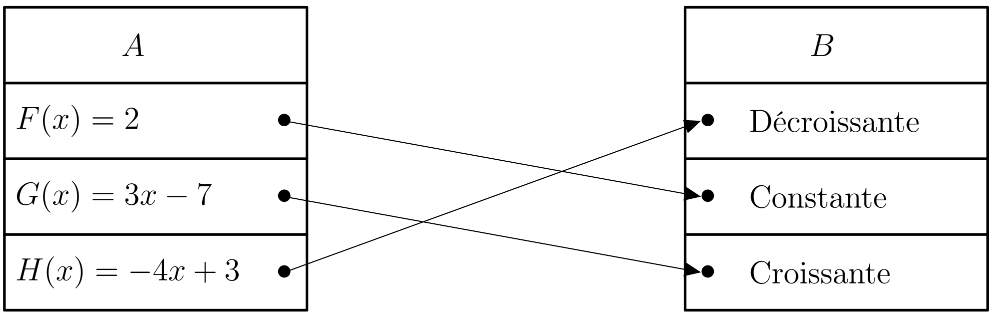
Corrigé - B.E.P.C 2018 - Mathématiques

A) Activités numériques et diverses

Exercice 1



Rappel
Une fonction affine est une fonction qui, à chaque nombre x, fait correspondre le nombre $a \times x + b$ où a et b sont deux nombres donnés.
On la note $f\ :\ x \longmapsto ax + b$ ou $f(x) = ax + b$.

Exemple
La fonction qui, à un nombre, associe la somme de son triple et de 5 est une fonction affine. On la note $f\ :\ x \longmapsto 3x + 5$ ou $f(x) = 3x + 5$.

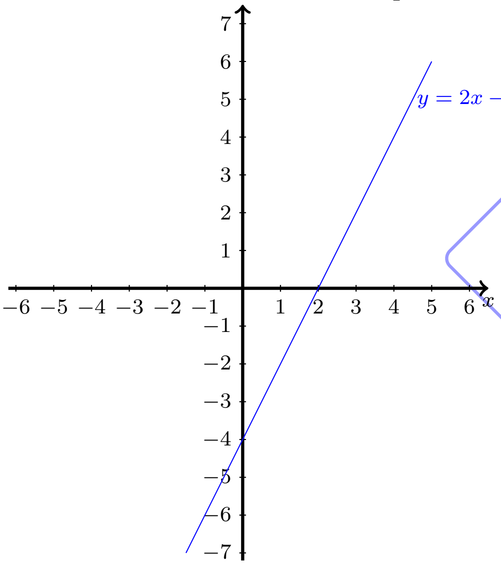
Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine.

- Si a est strictement positif alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- si a est strictement négatif alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
- si $a = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$. En effet, dans ce cas $f(x) = b$.

VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
FRANCE

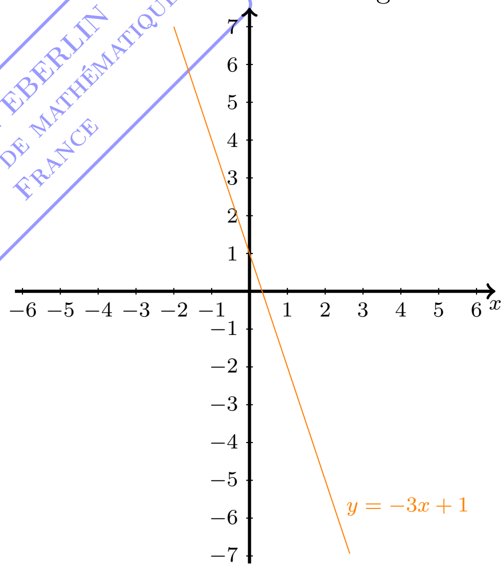
Exemple 1

La fonction affine $f(x) = 2x - 4$ est croissante car $a = 2$ est strictement positif



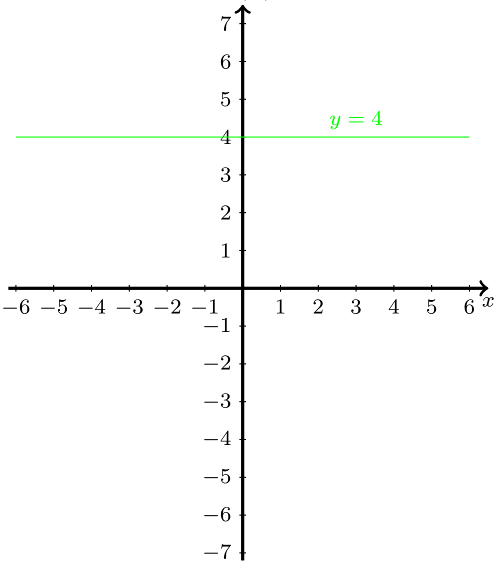
Exemple 2

La fonction affine $f(x) = -3x + 1$ est décroissante car $a = -3$ est strictement négatif



Exemple 3

La fonction affine $f(x) = 4$ est constante car $a = 0$.



Exercice 2

1

$1^{\text{ère}}$ méthode : méthode de substitution

- On utilise l'une des équations pour exprimer l'une des inconnues en fonction de l'autre.
- On remplace, dans l'autre équation, cette inconnue par l'expression trouvée. On obtient une équation à une inconnue que l'on sait résoudre.
- On en déduit ensuite la valeur de la deuxième inconnue.

Valérien Eberlin
Professeur de mathématiques
France

➢ De l'équation (2) : $2x - y = 3$, on en déduit que $-y = -2x + 3$. D'où $y = 2x - 3$.

➢ Dans l'équation (1), en remplaçant y par $2x - 3$, on obtient :

$$\begin{aligned}3x + 2(2x - 3) &= 8\\ 3x + 4x - 6 &= 8\\ 7x - 6 &= 8\\ 7x &= 8 + 6\\ 7x &= 14\\ x &= \frac{14}{7}\\ x &= 2\end{aligned}$$

- Puis, on remplaçant x par sa valeur ($x = 2$) dans l'équation $y = 2x - 3$, on obtient :

  $y = 2 \times 2 - 3$

  $y = 1$

Le système a donc pour solution $S = \{(2\,;1)\}$.

2$^{\text{ère}}$ méthode : méthode par combinaison

- On multiplie chaque équation par un nombre afin que les coefficients de x (ou de y) soient les mêmes.
- On soustrait terme à terme les 2 équations pour éliminer x.
- On obtient une équation du 1$^{\text{er}}$ degré à une inconnue que l'on résout.
- On remplace l'inconnue trouvée dans 1'une des deux équations puis on calcule la valeur de la seconde inconnue.

- $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 3 \end{array} \right. \iff \begin{cases} 6x + 4y = 16 \\ 6x - 3y = 9 \end{cases}$

- $$\begin{array}{r} - \begin{cases} 6x + 4y = 16 \\ 6x - 3y = 9 \end{cases} \\ \hline 7y = 7 \end{array}$$

- De l'équation $7y = 7$, on en déduit que $y = \frac{7}{7} = 1$.

- En remplaçant y par sa valeur ($y = 1$) dans l'une des deux équations, par exemple dans l'équation (1) : $3x + 2y = 8$, on obtient :

$$\begin{aligned}3x + 2 \times 1 &= 8\\ 3x &= 8 - 2\\ 3x &= 6\\ x &= \frac{6}{3} = 2\\ x &= 2\end{aligned}$$

Le système a donc pour solution $S = \{(2\,;1)\}$.

Valérien EBERLIN
Professeur de Mathématiques
France

Exercice 3

La moyenne pondérée $\overline{x}$ de cette série statistique est :

$$\overline{x} = \frac{11\times 2+7\times 2+13,5\times 4+13\times 2+11\times 2+10\times 2+12\times 2+8\times 2}{2+2+4+2+2+2+2+2} = \frac{198}{18} = 11$$

Problème A

1 On développe, réduit et ordonne N.

$$\begin{aligned} N &= (x-2)(5x+1) \\ &= x\times 5x + x\times 1 - 2\times 5x - 2\times 1 \\ &= 5x^2 + x - 10x - 2 \\ &= 5x^2 - 9x - 2 \end{aligned}$$

2 Factorisons M.

$$\begin{aligned} M &= 3x^2 - 6x - (x-2)(x+3) \\ &= \underbrace{3x\times x - 3x\times 2} - (x-2)(x+3) \\ &= \quad 3x(x-2) \quad - (x-2)(x+3) \\ &= (x-2)\Big(3x-(x+3)\Big) \\ &= (x-2)(3x-x-3) \\ &= (x-2)(2x-3) \end{aligned}$$

3 **a.** q est définie pour toutes les valeurs de x, sauf celles où le dénominateur s'annule c'est à dire q est définie si et seulement si $(x-2)(5x+1)\neq 0$.

Résolvons l'équation produit $(x-2)(5x+1)=0$.

$$\begin{aligned} (x-2)(5x+1)=0 &\iff x-2=0 \quad \text{ou} \quad 5x+1=0 \\ &\iff x=2 \quad \text{ou} \quad 5x=-1 \\ &\iff x=2 \quad \text{ou} \quad x=\frac{-1}{5} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble de définition de q est l'ensemble $E=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-1}{5}\,;\,2\right\}$.

b. Pour tout x appartenant à $E=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-1}{5}\,;\,2\right\}$,

$$q(x) = \frac{(x-2)(2x-3)}{(x-2)(5x+1)} = \frac{2x-3}{5x+1}$$

B) Activités géométriques

Exercice 1

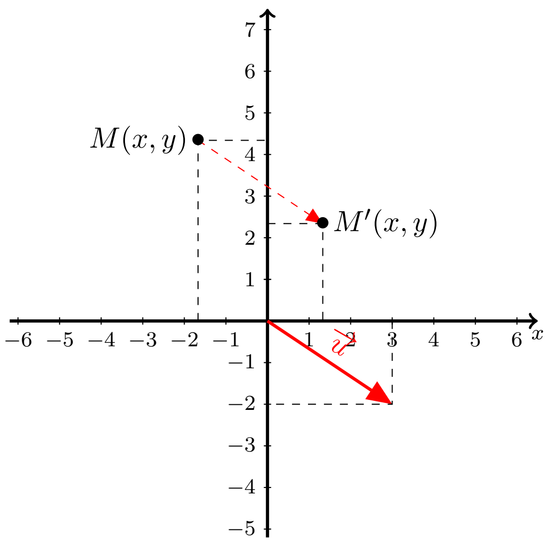
➢ L'expression analytique a) $\begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y-2 \end{cases}$ est celle d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u}(3\,;-2)$.

Cela signifie que le point M' de coordonnées (x', y') est obtenu à partir d'un point M de coordonnées (x, y) par glissement suivant le vecteur $\overrightarrow{u}(3\,;-2)$.

Ce qui se traduit par : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

Ou encore $\begin{cases} x' - x = 3 \\ y' - y = -2 \end{cases}$.

D'où $\begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y-2 \end{cases}$.



➢ L'expression analytique b) $\begin{cases} x' = 2x+6 \\ y' = 2y-4 \end{cases}$ est celle d'une homothétie de rapport 2.

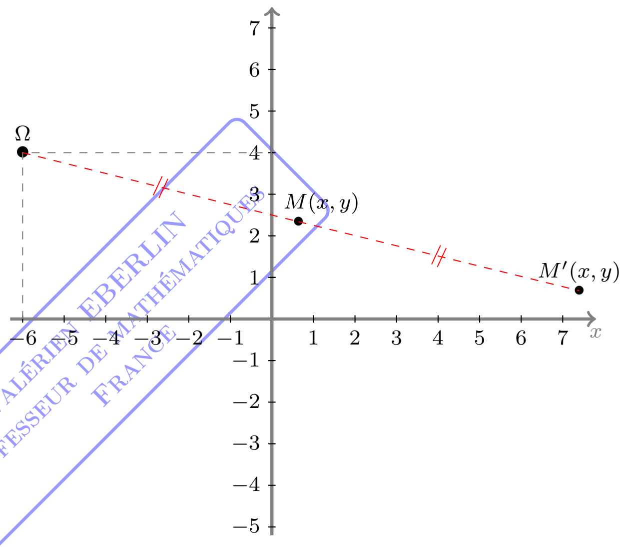
Cela signifie que si Ω est le centre de l'homothétie alors $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$.

On montre que les coordonnées (x_0, y_0) de Ω sont $(-6, 4)$.

En effet, Ω étant le seul point invariant, on a :

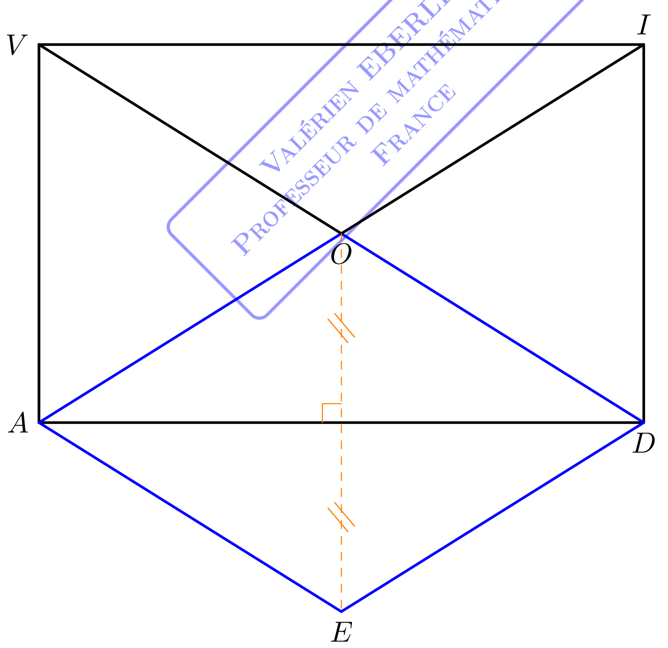
$$\begin{cases} x_0 = 2x_0+6 \\ y_0 = 2y_0-4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 - 2x_0 = 6 \\ y_0 - 2y_0 = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_0 = -6 \\ y_0 = 4 \end{cases}$$



Exercice 2

a.



b. Le quadrilatère $AODE$ est un losange.

> En effet, comme E est le symétrique de O par rapport à $[AD]$, alors la droite (AD) est la médiatrice du segment $[OE]$.
> On en déduit que $DO = DE$ et $AE = AO$ car tout point situé sur la médiatrice d'un segment est à égale distance des extrémités de ce segment.
> Or $DO = AO$ (les diagonales d'un rectangle sont de même longueur et se coupent en leur milieu).
> Donc $DO = DE = AE = AO$.
> $AODE$ est un quadrilatère qui a 4 côtés de même longueur : c'est donc un losange.

Exercice 3

<u>Coordonnées de $\vec{u}$</u>

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

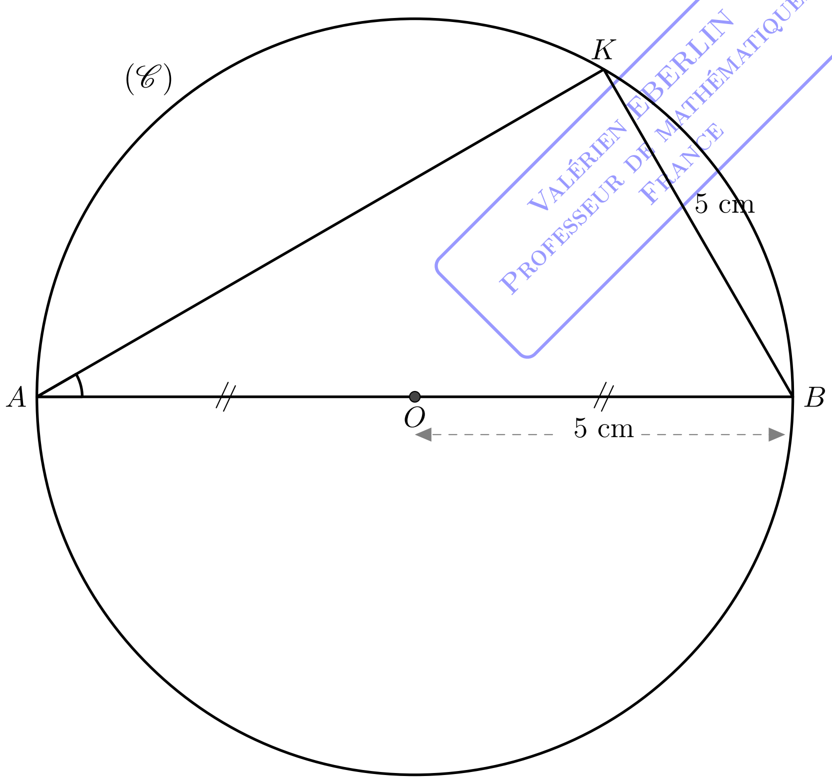
<u>Coordonnées de $\vec{v}$</u>

$$\begin{aligned}\vec{v} &= -2\overrightarrow{BC}\\ &= -2\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} -2\times(-3) \\ -2\times(-1) \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Problème B

1



2 Le triangle ABK est rectangle en K.

En effet :

- Le triangle ABK est inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$.
- De plus, le cercle $(\mathscr{C})$ a pour diamètre, un côté de ce triangle.

Or si un triangle est inscrit dans un cercle dont le diamètre est un côté du triangle, alors ce triangle est rectangle et son hypoténuse est un diamètre du cercle.

Donc le triangle ABK est rectangle et a pour hypoténuse le côté $[AB]$.

3 Calcul de AK

Dans le triangle ABK rectangle en K, j'applique le théorème de Pythagore.

$AB^2 = AK^2 + BK^2$

$10^2 = AK^2 + 5^2$

$100 = AK^2 + 25$

On en déduit que $AK^2 = 100 - 25$.

D'où $AK = \sqrt{75}\,\text{cm} = \sqrt{3 \times 5^2}\,\text{cm} = 5\sqrt{3}\,\text{cm}$

4 Calcul de l'angle $\widehat{KAB}$

- Calcul de l'angle $\widehat{KAB}$ à la calculatrice

  Selon les calculatrices, on appuie sur les touches suivantes pour calculer l'angle $\widehat{KAB}$ sachant que $\sin \widehat{KAB} = 0,5$:

  2nde sin 0.5 EXE ou SHIFT sin 0.5 EXE ou SECONDE sin 0.5 EXE

  On obtient $\widehat{KAB} = 30°$.

Attention ! Au préalable, le candidat doit s'assurer que la calculatrice est réglée en mode Degré et non en Radian ni en Grade.

- Calcul de l'angle $\widehat{KAB}$ à la main

On utilise le tableau trigonométrique des valeurs remarquables ci-contre :

On en déduit que $\widehat{KAB} = 30°$.

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Voici une méthode pour retenir ce tableau :

- Sur la ligne de la fonction sinus (en bleu), on écrit $\frac{\sqrt{0}}{2}$; $\frac{\sqrt{1}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{4}}{2}$.
- Sur la ligne de la fonction cosinus (en jaune), on écrit les nombres ci-dessus, mais dans l'ordre décroissant.
Ce qui donne :

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Or $\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$; $\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$.
D'où le tableau trigonométrique des valeurs remarquables :

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1