

Correction bac 2020 - Série D

Exercice 1

1 $i\bar{z}_2 = 1 - 2i \iff \overline{i\bar{z}_2} = \overline{1 - 2i} \iff -iz_2 = 1 + 2i \iff z_2 = -2 + i.$

En remplaçant z_2 par $-2 + i$ dans la première équation $z_1 + z_2 = -3 + i$, on en déduit $z_1 = -1$.

En remplaçant z_2 par $-2 + i$ dans la dernière équation $z_2 \times z_3 = -1 - 2i$, on en déduit que $z_3 = \frac{-1 - 2i}{-2 + i} = \frac{(-1 - 2i)(-2 - i)}{(-2 + i)(-2 - i)} = i.$

D'où $z_1 = -1$; $z_2 = -2 + i$ et $z_3 = i$.

2 a. $P(i) = i^3 + (3 - 2i)i^2 + (1 - 4i)i - 1 - 2i = -i - (3 - 2i) + (1 - 4i)i - 1 - 2i = 0.$

b. Dans l'expression $(z - i)(z - z_0)(z + 2 - i)$, le terme de degré 0 est $iz_0 \times (2 - i)$.

On en déduit, par identification, que $z_0(1 + 2i) = -1 - 2i$.

D'où $z_0 = \frac{-1 - 2i}{1 + 2i} = -1.$

c. $P(z) = 0 \iff (z - i)(z + 1)(z + 2 - i) = 0 \iff z = i, z = -1 \text{ et } z = -2 + i.$

D'où l'ensemble des solutions $\{i; -1; -2 + i\}$.

3 a. L'expression complexe de la rotation R est de la forme $z' - z_A = a(z - z_A)$ où a est un nombre complexe tel que $|a| = 1$.

Comme $R(B) = C$ alors $z_C - z_A = a(z_B - z_A)$. On en déduit que $a = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + i}{-1 + i} = -i.$

D'où l'écriture complexe de $R : z' = -i(z + 1) - 1 = -iz - i - 1.$

b. Comme $a = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, on en déduit que l'angle de rotation de R est $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

1 a. $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$

Comme le déterminant de la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est non nul, alors la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est également une base de $\mathbb{R}^2$.

b.

$$\begin{cases} \vec{i} + \vec{j} = \vec{u} \\ -\vec{i} + 2\vec{j} = \vec{v} \end{cases} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} \iff \begin{cases} 3\vec{i} = 2\vec{u} - \vec{v} \\ 3\vec{j} = \vec{u} + \vec{v} \end{cases} \begin{matrix} E'_1 = 2E_1 - E_2 \\ E'_2 = E_1 + E_2 \end{matrix} \iff \begin{cases} \vec{i} = \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} \\ \vec{j} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \end{cases}$$

2 a. $f(\vec{i}) = f\left(\frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}\right) = \frac{2}{3}f(\vec{u}) - \frac{1}{3}f(\vec{v}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = \frac{2}{3}(\vec{i} + \vec{j}) + \frac{1}{3}(-\vec{i} + 2\vec{j}) = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}$

$f(\vec{j}) = f\left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}\right) = \frac{1}{3}f(\vec{u}) + \frac{1}{3}f(\vec{v}) = \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} = \frac{1}{3}(\vec{i} + \vec{j}) - \frac{1}{3}(-\vec{i} + 2\vec{j}) = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}$

- b.** $f \circ f(\vec{i}) = f\left(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}\right) = \frac{1}{3}f(\vec{i}) + \frac{4}{3}f(\vec{j}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}\right) = \vec{i}$
 $f \circ f(\vec{j}) = f\left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}\right) = \frac{2}{3}f(\vec{i}) - \frac{1}{3}f(\vec{j}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}\right) = \vec{j}$
- c.** f est un endomorphisme tel que $f \circ f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$ où $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. C'est donc une symétrie vectorielle.
- d.** La symétrie vectoriel f est telle que $f(\vec{u}) = \vec{u}$ et $f(\vec{v}) = -\vec{v}$ où $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On en déduit que :
- la base $\mathcal{E}$ est l'espace vectoriel engendré par $\vec{u}$;
 - la direction $\mathcal{D}$ est l'espace vectoriel engendré par $\vec{v}$.

Exercice 3

Partie A

- 1** **a.** $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (x - 2)e^{2-x}$.
b. $h'(x)$ s'annule en $x = 2$ et est du signe de $x - 2$ sur $\mathbb{R}$.
 $h'(x) > 0$ pour tout $x \in]2; +\infty[$.
 $h'(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty; 2[$.
c.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	0	1

- 2** h est strictement décroissante de $]-\infty; 2]$ sur $[0; +\infty[$. On en déduit que : $\forall x \in]-\infty; 2]$, $0 \leq h(x) < +\infty$.
Et, h est strictement croissante de $[2; +\infty[$ sur $[0; 1]$. On en déduit que : $\forall x \in [2; +\infty[$, $0 \leq h(x) \leq 1$.
Donc $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie B

- 1** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{2-x})}_{=1} = +\infty$.
- 2** **a.** $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (1 + e^{2-x}) + x(-e^{2-x}) = (1 - x)e^{2-x} + 1 = h(x)$.

b.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x) = h(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	4	$+\infty$

3

a. f est une fonction continue, strictement croissante sur $] -\infty; +\infty[$.

Donc f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=] -\infty; +\infty[$.

b. f et f^{-1} ont même sens de variation.

Comme f admet une tangente horizontale en $x = 2$, alors f^{-1} admet une tangente verticale en $f(2) = 4$. D'où f^{-1} n'est pas dérivable en 4.

On en déduit le tableau de variation de f^{-1} .

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$	$+$		$+$
$f^{-1}(x)$	$-\infty$	2	$+\infty$

4

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^{2-x}) = +\infty$.

On en déduit que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{2-x} = 0$.

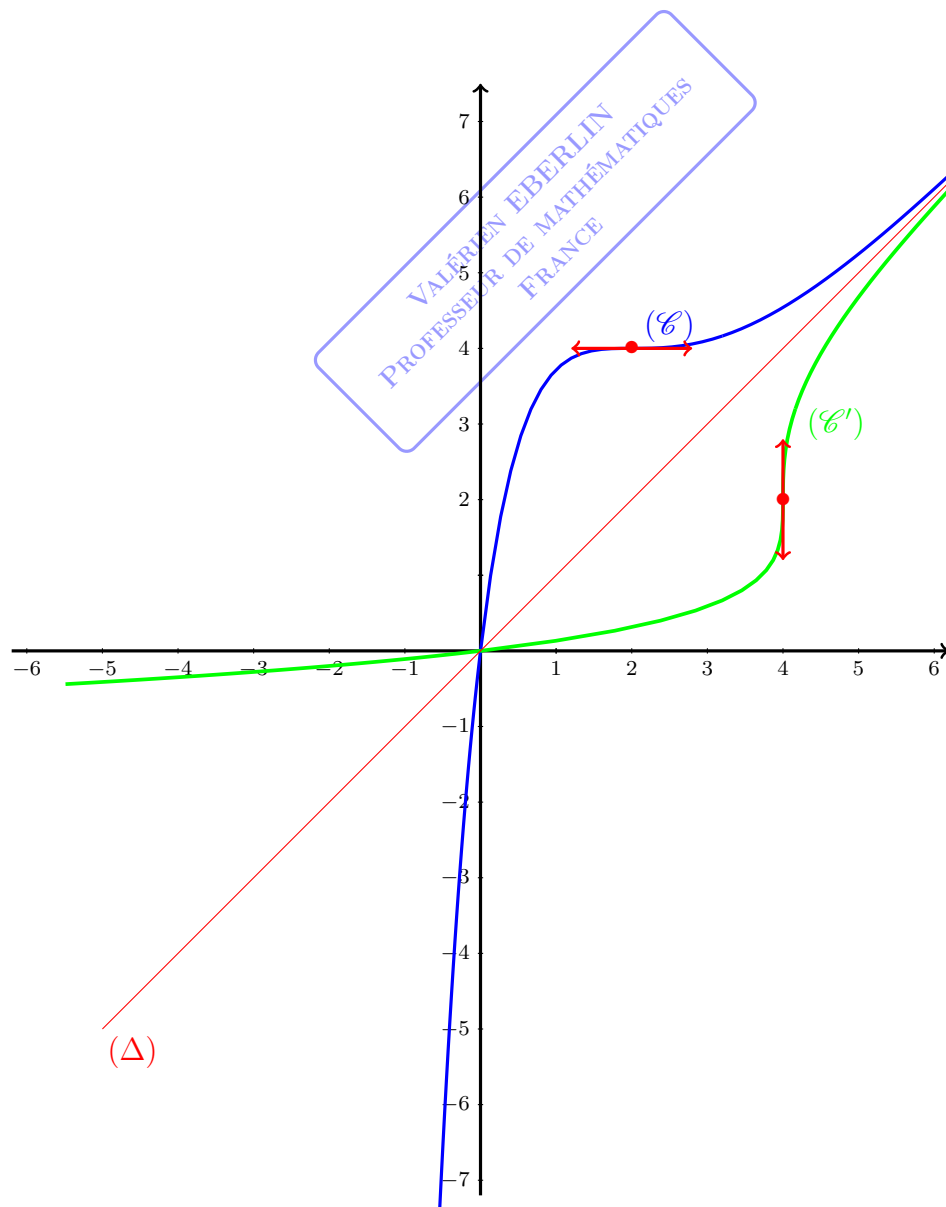
On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

c. On a : $f(x) - x = x e^{2-x}$.

$\forall x > 0, f(x) - x > 0$. Alors la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de la droite (Δ) sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall x < 0, f(x) - x < 0$. Alors la courbe $(\mathcal{C})$ est en dessous de la droite (Δ) sur $\mathbb{R}_-$.

5



Exercice 4

1

$$\begin{aligned}
 p(A \cap B) &= p(A) \times p(B) \\
 &= 0,9 \times 0,95 \\
 &= 0,855
 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
 p(C) &= 1 - p(A \cap B) \\
 &= 1 - 0,855 \\
 &= 0,145
 \end{aligned}$$

3



$$\begin{aligned}p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\&= 0,9 + 0,95 - 0,855 \\&= 0,995\end{aligned}$$

