

Correction bac 2019 - Série D

Exercice 1

- 1** a. L'équation $Z^2 - 4Z + 8$ a pour discriminant réduit : $\Delta' = (-2)^2 - 1 \times 8 = -4 = (2i)^2$. Elle admet donc deux racines distinctes : $Z_1 = \frac{2-2i}{1} = 2 - 2i$ et $Z_2 = \frac{2+2i}{1} = 2 + 2i$.
- b. $|Z_1| = 2\sqrt{2}$.
D'où $Z_1 = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$.
- 2** a. $U = \frac{Z_B}{Z_A} = \frac{2+2i}{2-2i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i$.
- b. $\left| \frac{Z_B - Z_O}{Z_A - Z_O} \right| = |i| = 1$. On en déduit que $OA = OB$.
 $(\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv \arg\left(\frac{Z_B - Z_O}{Z_A - Z_O}\right) [2\pi] = \arg(i) [2\pi] = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On en déduit que le triangle OAB est rectangle en O .
Donc OAB est un triangle rectangle isocèle en O .
- 3** a. $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}} Z \iff (Z' - Z_O) = e^{i\frac{\pi}{3}} (Z - Z_O)$ où $Z_O = 0$.
 f est donc une rotation de centre $Z_O = 0$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- b. Forme trigonométrique de $Z_{A'}$
D'après 1. b., $Z_A = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
D'où : $Z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{3}} Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$.
Forme algébrique de $Z_{A'}$
 $Z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{3}} Z_A = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (2 - 2i) = (1 + \sqrt{3}) + i(-1 + \sqrt{3})$.
- c. En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires de la forme géométrique et trigonométrique de $Z_{A'}$, on en déduit que : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.
D'où $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Exercice 2

- 1** $f(\vec{i})$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x' = 2 \times 1 + 3 \times 0 = 2 \\ y' = -1 - 2 \times 0 = -1 \end{cases}$.
D'où $f(\vec{i}) = 2\vec{i} - \vec{j}$.
- $f(\vec{j})$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x' = 2 \times 0 + 3 \times 1 = 3 \\ y' = -0 - 2 \times 1 = -2 \end{cases}$.
D'où $f(\vec{j}) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.

2

$$\begin{array}{cc} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) \\ \downarrow & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{i} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{j} \end{matrix} \end{array}$$

3 $f(\vec{V})$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x' = 2 \times 3 + 3 \times (-4) = -6 \\ y' = -3 - 2 \times (-4) = 5 \end{cases}$.

L'image du vecteur $\vec{V}$ est le vecteur $V'(-6; 5)$.

4 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1$.

Comme le déterminant de la matrice associée à l'endomorphisme f est non nul, alors f est un endomorphisme bijectif (automorphisme).

5 a. Calcul de $f \circ f(\vec{i})$

$$f \circ f(\vec{i}) = f((2; -1)) \text{ a pour coordonnées : } \begin{cases} x'' = 2 \times 2 + 3 \times (-1) = 1 \\ y'' = -2 - 2 \times (-1) = 0 \end{cases}.$$

$$\text{D'où } f \circ f(\vec{i}) = \vec{i}.$$

Calcul de $f \circ f(\vec{j})$

$$f \circ f(\vec{j}) = f((3; -2)) \text{ a pour coordonnées : } \begin{cases} x'' = 2 \times 3 + 3 \times (-2) = 0 \\ y'' = -3 - 2 \times (-2) = 1 \end{cases}.$$

$$\text{D'où } f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}.$$

b. $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{E}$.

$$\text{De plus, } f \circ f(\vec{i}) = \vec{i} \text{ et } f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}.$$

Donc f une symétrie vectorielle.

c. Base de f

La base de f est l'ensemble : $\{\vec{u} \in \mathcal{E} / f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$.

Soit $\vec{u}(x, y)$ un élément de la base de f .

$$f(\vec{u}) = -\vec{u} \iff \begin{cases} 2x + 3y = x \\ -x - 2y = y \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

La base de f est la droite vectorielle d'équation $x + 3y = 0$.

Direction de f

La direction de f est l'ensemble : $\{\vec{u} \in \mathcal{E} / f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$.

Soit $\vec{u}(x, y)$ un élément de la direction de f .

$$f(\vec{u}) = -\vec{u} \iff \begin{cases} 2x + 3y = -x \\ -x - 2y = -y \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

La direction de f est la droite vectorielle d'équation $x + y = 0$.

Exercice 3

Partie I

1 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = -\frac{1}{x^2}.$
 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) < 0.$

2

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	0

Partie II

1 a. $f(x) = g(x) \iff \frac{\ln x}{x} = 0 \iff x = 1.$

b. $\forall x \in]0; 1[, f(x) - g(x) = \frac{\ln x}{x} < 0.$ On en déduit que la courbe $(\mathcal{C})$ est en dessous de la courbe $(\mathcal{C}')$ sur $]0; 1[.$

$\forall x \in]1; +\infty[, f(x) - g(x) = \frac{\ln x}{x} > 0.$ On en déduit que la courbe $(\mathcal{C})$ est en dessus de la courbe $(\mathcal{C}')$ sur $]1; +\infty[.$

2 a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (-u \ln u + u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} u \ln u \left(-1 + \frac{1}{\ln u} \right) = -\infty$ où l'on a posé $u = \frac{1}{x}.$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$

b. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}.$

Tableau de signes

$f'(x)$ est du signe de $-\ln x$ et s'annule pour $x = 1.$

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$		+	-
x^2		+	+
$f'(x)$		+	-

c.

Tableau de variation

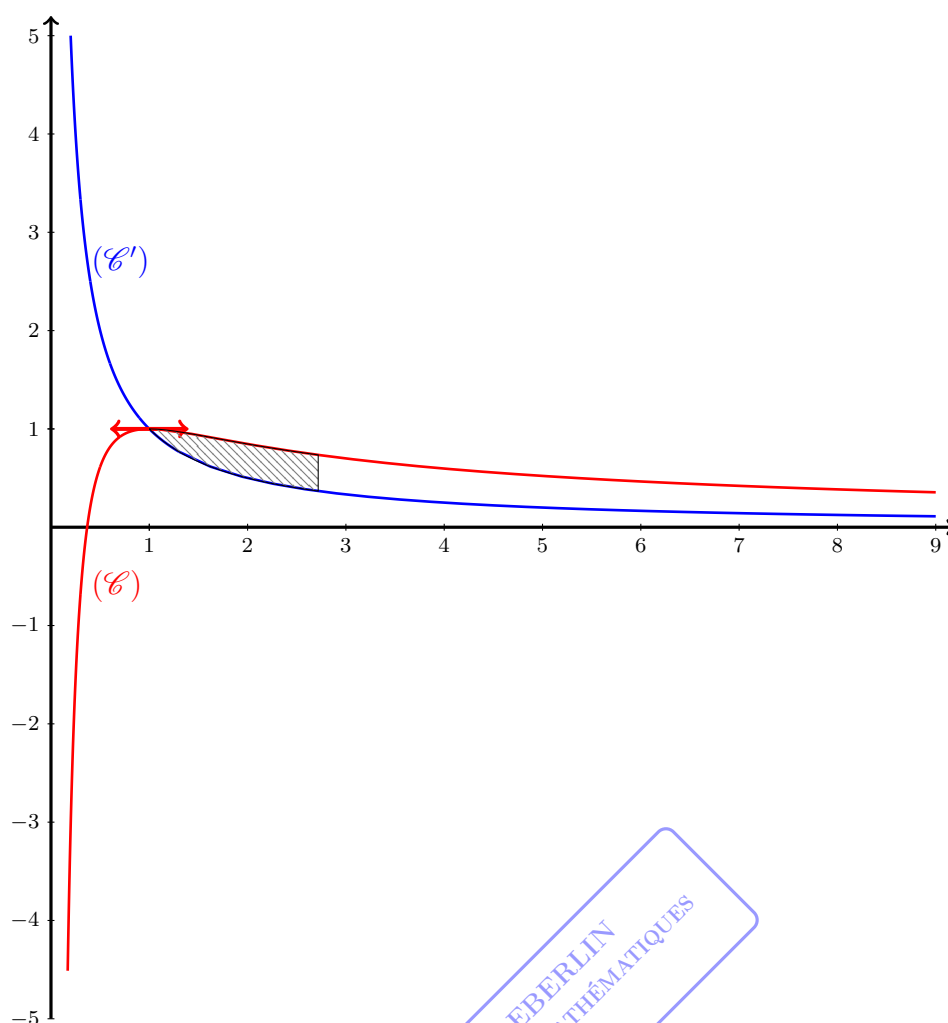
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	$-\infty$	1	0

3 Asymptotes

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. La courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. La courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

Tracés de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$

**Partie III**

1 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x = \frac{\ln x}{x} = k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Donc h est une primitive de k sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\mathbf{2} \quad \int_1^e (f(x) - g(x)) dx = \int_1^e h'(x) dx = [h(x)]_1^e = \frac{1}{2} \text{ u.a.} = \frac{1}{2} \times 4 \text{ cm}^2 = 2 \text{ cm}^2.$$

Exercice 4

$$\mathbf{1} \quad E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p(X = x_i) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + a \times \frac{3}{8} + 3 \times b = \frac{3}{8} (1 + a + 8b).$$

$$\mathbf{2} \quad \mathbf{a.} \quad E(X) = \frac{3}{2} \iff \frac{3}{8} (1 + a + 8b) = \frac{3}{2} \iff a + 8b = 3.$$

D'autre part, comme p est une probabilité, alors $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + b = 1$. On en déduit que $b = \frac{1}{8}$.

En remplaçant b par $\frac{1}{8}$ dans l'équation $a + 8b = 3$, on obtient $a = 2$.

$$\mathbf{b.} \quad \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 p(X = x_i) - E(X)^2 = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = 0,86.$$

3

X	$] -\infty ; 0[$	$[0 ; 1[$	$[1 ; 2[$	$[2 ; 3[$	$[3 ; +\infty[$
$F(X)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1