Correction bac 2018 - Série D

Exercice 1

1 **a.** $Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_C - Z_B = 2 - 3i$.

b. L'expression complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est donnée par : $Z' = Z + 2 - 3i$.

En remplaçant Z par $x + iy$ et Z' par $x' + iy'$, on a :

$$\begin{aligned} x' + iy' &= x + iy + 2 - 3i \\ &= x + 2 + i\,(y - 3) \end{aligned}.$$

D'où, l'expression analytique de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$: $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$.

c. $Z_{A'} = Z_A + 2 - 3i = 3 - i$.

2 **a.** $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg\left(\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_A}\right)[2\pi] = \arg(-i)\,[2\pi] = -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

b. L'expression complexe de la rotation R de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est donnée par :

$Z' - Z_A = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}(Z - Z_A)$ soit encore $Z' = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}(Z - Z_A) + Z_A$.

En remplaçant Z par $x + iy$ et Z' par $x' + iy'$, on a :

$$\begin{aligned} x' + iy' &= -i(x + iy - 1 - 2i) + 1 + 2i \\ &= y - 1 + i\,(-x + 3) \end{aligned}$$

D'où l'expression analytique de la rotation R : $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = -x + 3 \end{cases}$.

c. Les coordonnées du point C' sont données par : $\begin{cases} x_{C'} = y_C - 1 = -2 \\ y_{C'} = -x_C + 3 = 2 \end{cases}$.

On en déduit que l'affixe du point C' est : $Z_{C'} = -2 + 2i$.

3 Soit $Z' = aZ + b$, l'expression complexe de la similitude directe S.

$$\begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = A \end{cases} \iff \begin{cases} Z_A = aZ_A + b & (1) \\ Z_A = aZ_B + b & (2) \end{cases}.$$

En multipliant l'équation (1) par -1 puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (2), on obtient $a = 0$.

Donc il n'existe pas de similitude S telle que $S(A) = A$ et $S(B) = A$.

Exercice 2

1 Montrons que $(\mathscr{D}_1)$ est engendrée par e_1

Soit (x, y) un vecteur de $(\mathscr{D}_1)$. Alors x et y vérifient $x = 2y$.

D'où : $(x, y) = (2y, y) = y(2, 1)$.

Donc tout élément de $(\mathscr{D}_1)$ s'écrit sous la forme $\lambda\vec{e}_1$ où $\vec{e}_1 = (2, 1) = 2\vec{i} + \vec{j}$.

Ainsi $(\mathscr{D}_1)$ est la droite engendrée par le vecteur $2\vec{i}+\vec{j}$.

<u>Montrons que $(\mathscr{D}_2)$ est engendrée par e_2</u>

Soit (x, y) un vecteur de $(\mathscr{D}_2)$. Alors x et y vérifient $x=-y$.
D'où $(x, y)=(-y, y)=y(-1,1)$.
Donc tout élément de $(\mathscr{D}_2)$ s'écrit sous la forme $\lambda \overrightarrow{e}_2$ où $e_2=(-1,1)=-\vec{i}+\vec{j}$.
Ainsi $(\mathscr{D}_2)$ est la droite engendrée par le vecteur $-\vec{i}+\vec{j}$.

2 $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3$.

Comme le déterminant de la famille $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ est non nul, alors $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de $\mathscr{E}$.

3 (i) $\overrightarrow{e_1} \in (\mathscr{D}_1)$ et $\overrightarrow{e_2} \in (\mathscr{D}_2)$.
De plus, d'après 2., $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de $\mathscr{E}$.
Par conséquent $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ engendre $\mathscr{E}$. Donc $(\mathscr{D}_1)+(\mathscr{D}_2)=\mathscr{E}$.

(ii) Soit $x=(x_1, x_2) \in (\mathscr{D}_1) \cap (\mathscr{D}_2)$.
$x \in (\mathscr{D}_1) \iff x_1=2x_2$.
$x \in (\mathscr{D}_2) \iff x_1=-x_2$.
On en déduit que $x_1=x_2=0$. D'où $(\mathscr{D}_1) \cap (\mathscr{D}_2)=\{0\}$.

D'après (i) et (ii), les sous-espaces vectoriels $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont supplémentaires dans $(\mathscr{E})$.

4

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{e_1})=\overrightarrow{e_1} \\ f(\overrightarrow{e_2})=-\overrightarrow{e_2} \end{cases} \iff \begin{cases} 2f(\vec{i})+f(\vec{j})=2\vec{i}+\vec{j} \\ -f(\vec{i})+f(\vec{j})=\vec{i}-\vec{j} \end{cases}\left|\begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix}\right. \iff \begin{cases} 3f(\vec{i})=\vec{i}+2\vec{j} \\ 3f(\vec{j})=4\vec{i}-\vec{j} \end{cases}\left|\begin{matrix} E_1'=E_1-E_2 \\ E_2'=E_1+2E_2 \end{matrix}\right..$$

On en déduit que : $\begin{cases} f(\vec{i})=\dfrac{1}{3}\vec{i}+\dfrac{2}{3}\vec{j} \\ f(\vec{j})=\dfrac{4}{3}\vec{i}-\dfrac{1}{3}\vec{j} \end{cases}$

Exercice 3

1 Si $x>0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{-1+\ln x}$ existe si et seulement si $-1+\ln x \neq 0$ c'est à dire si et seulement si $x \in \left]0;\mathrm{e}\right[\cup \left]\mathrm{e};+\infty\right[$.
Si $x \leq 0$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ existe.

Donc l'ensemble de définition de f est $]-\infty;\mathrm{e}[\cup]\mathrm{e};+\infty[$.

2 $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x)=f(0)=\mathrm{e}^{-2\times 0}=1$

$$\lim_{x \to 0_+} f(x)=\lim_{x \to 0_+}\left(\frac{\ln x-1+1}{-1+\ln x}\right)=\lim_{x \to 0_+}\left(1+\frac{1}{-1+\ln x}\right)=1.$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x)=f(0)=\lim\limits_{x \to 0_+} f(x)$, la fonction f est continue en 0.

3 $\displaystyle\lim_{x\to 0_-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0_-}\frac{\mathrm{e}^{-2x}-1}{x}=-2\lim_{u\to 0_+}\frac{\mathrm{e}^{u}-1}{u}=-2$ où l'on a posé $u=-2x$.

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0_+}\frac{\dfrac{\ln x}{-1+\ln x}-1}{x}=\lim_{x\to 0_+}\frac{1}{x(-1+\ln x)}=\lim_{u\to+\infty}\frac{-u}{1+\ln u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{-u}{\ln u}=-\infty$$

où l'on a posé $u=\dfrac{1}{x}$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0_+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ n'est pas une valeur finie, on en déduit que f n'est pas dérivable en 0.

4 **a.** f est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;\mathrm{e}[\cup]\,\mathrm{e};+\infty[$.

$\forall\, x\in]0\,;\mathrm{e}[\cup]\,\mathrm{e}\,;+\infty[,\quad f'(x)=\dfrac{-1}{x(-1+\ln x)^2}$.

$\forall\, x\in]-\infty;0[,\quad f'(x)=-2\,\mathrm{e}^{-2x}$.

b. Signes de f'

$\forall\, x\in]0\,;\mathrm{e}[\cup]\,\mathrm{e}\,;+\infty[,\quad f'(x)<0$.

$\forall\, x\in]-\infty;0[,\quad f'(x)<0$.

Tableau de variation

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-2x}=+\infty\,;\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{-1+\ln x}=1.$

$\displaystyle\lim_{x\to \mathrm{e}_-}f(x)=\lim_{x\to \mathrm{e}_-}\frac{\ln x}{-1+\ln x}=\lim_{x\to \mathrm{e}_-}\frac{1}{-1+\ln x}=-\infty.$

$\displaystyle\lim_{x\to \mathrm{e}_+}f(x)=\lim_{x\to \mathrm{e}_+}\frac{\ln x}{-1+\ln x}=\lim_{x\to \mathrm{e}_+}\frac{1}{-1+\ln x}=+\infty.$

x	$-\infty$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	||	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		1	↘ $-\infty$	|| $+\infty$	↘	1

5 **a.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x}=-2\times\lim_{u\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{u}}{u}=-\infty$ où l'on a posé $u=-2x$.

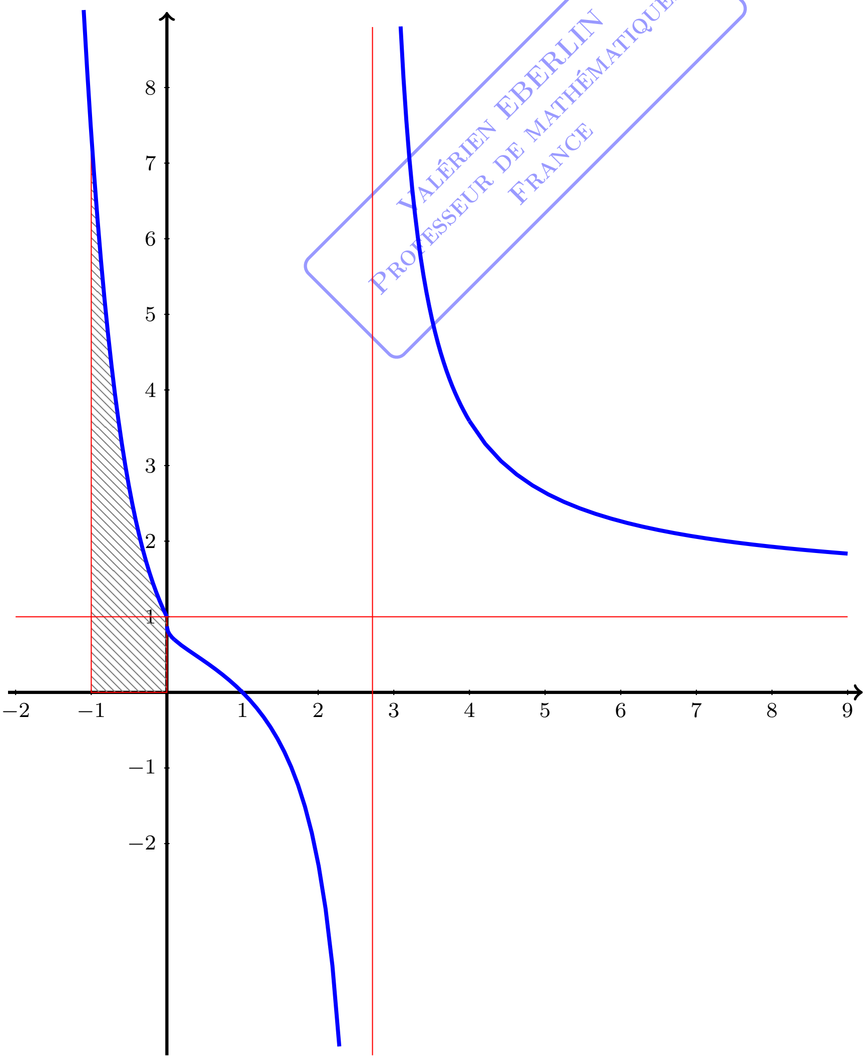
La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $+\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to \mathrm{e}_-}f(x)=-\infty\,;\ \lim_{x\to \mathrm{e}_+}f(x)=+\infty$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x=\mathrm{e}$.

VALÉRIEN EBERLIN PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES FRANCE

b.



6 $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-2x}\;dx = \left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\right]_{-1}^{0}\text{u.a} = \frac{(\mathrm{e}^2-1)}{2}\times 4\,\mathrm{cm}^2 = 2(\mathrm{e}^2-1)\,\mathrm{cm}^2$

Exercice 4

1 $\displaystyle\overline{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3,5.$

$\displaystyle\overline{y} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} y_i = \frac{1}{6}(0,2+1,4+1,8+2+2,6+3) = 1,833.$

2 L'équation de régression linéaire de y en x est donnée par l'équation : $y = ax+b$ où $a = \dfrac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{V}(x)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(x,y) &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i y_i - \overline{x}.\overline{y}\\ &= \frac{1}{6}(1\times 0,2 + 2\times 1,4 + 3\times 1,8 + 4\times 2 + 5\times 2,6 + 6\times 3) - 3,5\times 1,833\\ &= 1,4845\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(x) &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \overline{x}^2\\ &= \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - 3,5^2\\ &= 2.9166\end{aligned}$$

D'où : $a = \dfrac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{Var}(x)} = 0,50$ et $b = 1,833 - 0,50\times 3.5 = 0,083$.

L'équation de la droite de régression linéaire est : $y = 0,5x + 0,083$.

3 Pour $x = 7, \quad y = 0,5\times 7 + 0,083 = 3,583$.

Au 7ème jour, le poids de la larve est estimé à 3,58 mg.