Correction bac 2017 - Série D

Exercice 1

1 **a.** $P(1) = 1^3 + 1^2 - 2 = 0$. Donc 1 est une racine du polynôme P.

b. Il suffit de développer et de réduire l'expression.

$$\begin{aligned}(Z-1)(Z^2+2Z+2) &= Z^3 + 2Z^2 + 2Z - Z^2 - 2Z - 2\\ &= Z^3 + 2Z^2 - Z^2 + 2Z - 2Z - 2.\\ &= Z^3 + Z^2 - 2\end{aligned}$$

c. $P(Z) = 0$ si $Z = 1$ ou $Z^2 + 2Z + 2 = 0$.

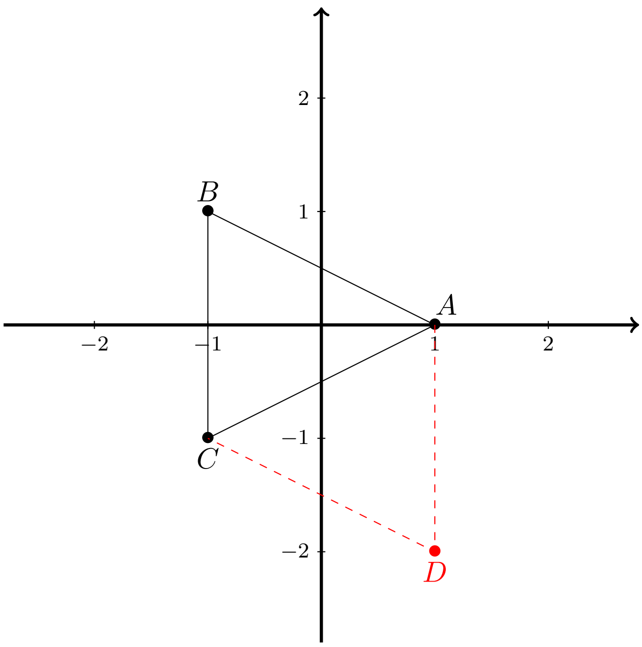
Résolution de l'équation $Z^2 + 2Z + 2 = 0$

L'équation $Z^2 + 2Z + 2 = 0$ admet pour discriminant réduit $\Delta' = i^2$.

On en déduit que les racines de l'équation $Z^2 + 2Z + 2 = 0$ sont : $Z = -1 - i$ et $Z = -1 + i$.

L'ensemble des solutions de l'équation $P(Z) = 0$ est : $\left\{1, -1-i, -1+i\right\}$

2 **a.**



b. $ABCD$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ce qui se traduit par $Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$. D'où : $Z_D = 1 - 2i$.

3 **a.** L'expression complexe de la rotation R, de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ est donnée par :

$Z' - Z_A = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}(Z - Z_A)$.

D'où :

$Z' = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}(Z - Z_A) + Z_A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(Z-1) + 1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b.

$$\begin{aligned} x' + iy' &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x+iy) + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on a : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Exercice 2

1

$$\begin{array}{cc} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{i} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{j} \end{array}$$

2 Soit $\overrightarrow{u'} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ l'image de $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ par l'endomorphisme f.

$$\begin{aligned} x'\vec{i} + y'\vec{j} &= f(x\vec{i} + y\vec{j}) \\ &= xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) \\ &= x\left(\frac{a}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right) + y\left(\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}\right) \\ &= \left(\frac{a}{5}x + \frac{4}{5}y\right)\vec{i} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right)\vec{j} \end{aligned}$$

D'où l'expression analytique : $\begin{cases} x' = \frac{a}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \end{cases}$

3 $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathscr{E}$.

f est une symétrie vectorielle si et seulement si $f \circ f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$

<u>Déterminons $f \circ f(\vec{i})$ et $f \circ f(\vec{j})$</u>

$f(\vec{i})$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x' = \frac{a}{5} \times 1 + \frac{4}{5} \times 0 = \frac{a}{5} \\ y' = \frac{4}{5} \times 1 - \frac{3}{5} \times 0 = \frac{4}{5} \end{cases}$

Et, $\quad f \circ f(\vec{i}) = f\left(\left(\frac{a}{5}, \frac{4}{5}\right)\right)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x'' = \frac{a}{5} \times \frac{a}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{a^2}{25} + \frac{16}{25} \\ y'' = \frac{4}{5} \times \frac{a}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4a}{25} - \frac{12}{25} \end{cases}$

Donc $f \circ f(\vec{i}) = \left(\frac{a^2}{25} + \frac{16}{25}, \frac{4a}{25} - \frac{12}{25}\right)$.

De même,

$f(\vec{j})$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x' = \dfrac{a}{5} \times 0 + \dfrac{4}{5} \times 1 = \dfrac{4}{5} \\ y' = \dfrac{4}{5} \times 0 - \dfrac{3}{5} \times 1 = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$

Et, $\;f \circ f(\vec{j}) = f\Big(\big(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\big)\Big)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x'' = \dfrac{a}{5} \times \dfrac{4}{5} + \dfrac{4}{5} \times \left(-\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{4a}{25} - \dfrac{12}{25} \\ y'' = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5} \times \left(-\dfrac{3}{5}\right) = 1 \end{cases}$

Donc $f \circ f(\vec{j}) = \left(\dfrac{4a}{25} - \dfrac{12}{25}\,,\, 1\right)$.

<u>Déterminons a pour que f soit une symétrie vectorielle</u>

Du calcul précédent, on en déduit que :

$$f \circ f(\vec{j}) = \vec{j} \iff \left(\dfrac{4a}{25} - \dfrac{12}{25}\,,\, 1\right) = (0,1) \iff \dfrac{4a}{25} - \dfrac{12}{25} = 0 \iff a = 3.$$

En remplaçant a par 3 dans l'expression $f \circ f(\vec{i})$, on a bien :

$$f \circ f(\vec{i}) = \left(\dfrac{3^2}{25} + \dfrac{16}{25}\,,\, \dfrac{4 \times 3}{25} - \dfrac{12}{25}\right) = (1,0) = \vec{i}.$$

Donc f est une symétrie vectorielle si $a = 3$.

4

a. <u>Base de f</u>

La base de f est l'ensemble : $\{\overrightarrow{u} \in \mathscr{E} \;/\; f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}$.

Soit $\overrightarrow{u}(x\,,y)$ un élément de la base de f.

$$f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \iff \begin{cases} \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y = x \\ \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y = y \end{cases} \iff x - 2y = 0.$$

La base de f est la droite vectoriel d'équation $x - 2y = 0$.

<u>Direction de f</u>

La direction de f est l'ensemble : $\{\overrightarrow{u} \in \mathscr{E} \;/\; f(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}\}$.

Soit $\overrightarrow{u}(x\,,y)$, un élément de la direction de f.

$$f(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u} \iff \begin{cases} \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y = -x \\ \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y = -y \end{cases} \iff 2x + y = 0.$$

La direction de f est la droite vectorielle d'équation $2x + y = 0$.

b. $e_1 = (2,1)$.

c. $e_2 = (-1,2)$.

d. $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$

Comme le déterminant de la famille $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est non nul, alors $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$.

e. Comme $\vec{e_1}$ est une base de la base de f, alors $f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$.

Comme $\vec{e_2}$ est une base de la direction de f, alors $f(\vec{e_2}) = -\vec{e_2}$.

D'où la matrice de f dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$\begin{array}{cc}
f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \\
\downarrow & \downarrow
\end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{e_1} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{e_2} \end{array}$$

Exercice 3

Partie A

1 $\lim\limits_{x\to 0_+} g(x) = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty.$

2 **a.** $\forall\, x \in]0;+\infty[, \quad g'(x) = \dfrac{1+x}{x^2}.$

b. $\forall\, x \in]0;+\infty[, \quad g'(x) > 0.$

D'où le tableau de variation :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$		$+$		
$g(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3 **a.** $g(\frac{3}{2}) \approx -0,26$ et $g(2) \approx 0,19$.
La fonction g est continue, strictement croissante sur $]\frac{3}{2};2[$.
De plus, $g(\frac{3}{2}).g(2) < 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]\frac{3}{2};2[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

b. g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
De plus, $g(\alpha) = 0$.
On en déduit que :
$g(x) < 0$ pour tout $x \in]0;\alpha[$;
$g(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha;+\infty[$.

Partie B

1 $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} (x - x\ln x + \ln x) = \lim\limits_{x\to 0_+} \ln x = -\infty.$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x\ln x \left(\frac{1}{\ln x} - 1 + \frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to +\infty} x\ln x = -\infty.$$

2 **a.** Pour tout $x \in]0;+\infty[, \quad f'(x) = 1 - \ln x - (x-1) \times \dfrac{1}{x} = -g(x).$

b. f' est de signes contraires de g et s'annule en $x = \alpha$.

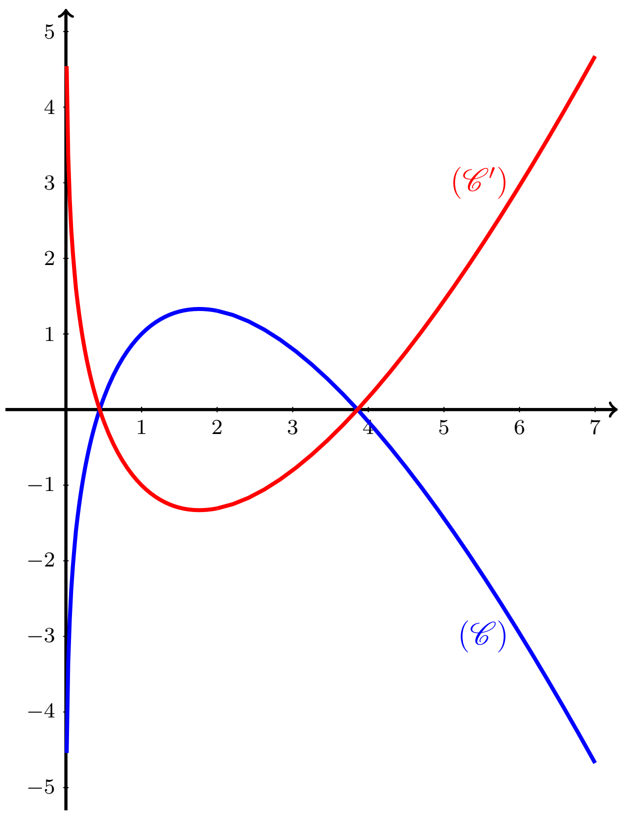
D'où le tableau de variation :

x	0		x_0		$1{,}7$		x_1		$+\infty$
$f'(x)$	||		$+$		0		$-$		
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1{,}3$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3 **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \ln x + \dfrac{\ln x}{x}\right) = -\infty$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une direction asymptotique (branche parabolique) de direction (Oy) en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = -\infty$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

b.



Exercice 4

1 $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

2 $P_1 = \dfrac{1}{6}$.

$P_2 = (P_1 + P_2) - P_1 = \dfrac{5}{24} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{24}$.

$P_3 = (P_1 + P_2 + P_3) - (P_1 + P_2) = \dfrac{7}{24} - \dfrac{5}{24} = \dfrac{1}{12}$.

$P_4 = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) - (P_1 + P_2 + P_3) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{7}{24} = \dfrac{1}{24}$.

$P_5 = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5) - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

x_i	2	3	4	5	6
P_i	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{24}$	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{1}{24}$	$\dfrac{2}{3}$

3 $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} x_i P_i = 2 \times \dfrac{1}{6} + 3 \times \dfrac{1}{24} + 4 \times \dfrac{1}{12} + 5 \times \dfrac{1}{24} + 6 \times \dfrac{2}{3} = 5$.