

Correction bac 2015 - Série D

Exercice 1

1 Les racines carrées de u sont les nombres complexes z tels que $z^2 = u$.

Posons $z = x + iy$.

On a : $x^2 - y^2 + 2ixy = 6 + 6i\sqrt{3}$. Par identification des parties réelles et des parties imaginaires, $x^2 - y^2 = 6$ et $xy = 3\sqrt{3}$.

D'autre part, comme $|z|^2 = |u|$ alors $x^2 + y^2 = 12$.

On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 6 & (1) \\ x^2 + y^2 = 12 & (2) \\ xy = 3\sqrt{3} & (3) \end{cases}$$

En additionnant membre à membre l'équation (1) et (2), on obtient, $x = -3$ ou $x = 3$;

En multipliant l'équation (1) par -1 , puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (2), on en déduit que $y = -\sqrt{3}$ ou $y = \sqrt{3}$.

L'équation (3) nous indique que x et y sont de même signe.

D'où les nombres complexes $\alpha_1 = 3 + i\sqrt{3}$ et $\alpha_2 = -3 - i\sqrt{3}$ sont les racines de u .

2 a.

$$\begin{aligned} 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 6i\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (9 + 3i\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2}\right) - 4 &= -\frac{4}{8} - 6i\sqrt{3} \times \frac{1}{4} + (9 + 3i\sqrt{3})\frac{1}{2} - 4 \\ &= \frac{-4 - 12i\sqrt{3} + 36 + 12i\sqrt{3} - 32}{8} \\ &= 0 \end{aligned}$$

b. Cherchons a , b et c tels que :

$$4Z^3 - 6i\sqrt{3}Z^2 - (9 + 3i\sqrt{3})Z - 4 = \left(Z + \frac{1}{2}\right)(aZ^2 + bZ + c).$$

Dans l'expression $\left(Z + \frac{1}{2}\right)(aZ^2 + bZ + c)$:

- Le terme de plus haut degré est a . On en déduit que : $a = 4$;
- Le terme constant est $\frac{1}{2}c$. On en déduit que : $\frac{1}{2}c = -4$. D'où $c = -8$;
- Le terme de degré 2 est $b + \frac{1}{2}a$. On en déduit que : $b + \frac{1}{2}a = -6i\sqrt{3}$. D'où $b = -2 - 6i\sqrt{3}$.

$$\text{Donc } 4Z^3 - 6i\sqrt{3}Z^2 - (9 + 3i\sqrt{3})Z - 4 = \left(Z + \frac{1}{2}\right)(4Z^2 - 2(1 + 3i\sqrt{3})Z - 8).$$

$$\text{Résolvons l'équation } 4Z^2 - 2(1 + 3i\sqrt{3})Z - 8 = 0$$

L'équation $4Z^2 - 2(1 + 3i\sqrt{3})Z - 8 = 0$ admet pour discriminant réduit :

$$\Delta' = (1 + 3i\sqrt{3})^2 + 32 = 6 + 6i\sqrt{3}. \text{ D'où } \Delta' = u.$$

D'après 1., l'on peut écrire Δ' sous forme d'un carré : $\Delta' = (3 + i\sqrt{3})^2$.

On en déduit que les solutions de l'équation $4Z^2 - 2(1 + 3i\sqrt{3})Z - 8 = 0$ sont :
 $Z_2 = \frac{1 + 3i\sqrt{3} - 3 - i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z_3 = \frac{1 + 3i\sqrt{3} + 3 + i\sqrt{3}}{4} = 1 + i\sqrt{3}$.

Solutions de l'équation (E)

Les solutions de l'équation (E) : $Z_1 = -\frac{1}{2}$, $Z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z_3 = 1 + i\sqrt{3}$.

3 a. Soit $Z' = aZ + b$, l'expression complexe de la similitude S .

$$\begin{cases} S(A) = B \\ S(B) = C \end{cases} \iff \begin{cases} Z_B = aZ_A + b & (1) \\ Z_C = aZ_B + b & (2) \end{cases}$$

En multipliant l'équation (1) par -1 puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (2), il s'ensuit que :

$$a = \frac{Z_C - Z_B}{Z_B - Z_A} = \frac{\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 - i\sqrt{3}.$$

En remplaçant a par $1 - i\sqrt{3}$ dans l'expression $b = Z_B - aZ_A$, on trouve :

$$b = Z_B - aZ_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + (1 - i\sqrt{3})\frac{1}{2} = 0.$$

D'où l'expression de la similitude S : $Z' = (1 - i\sqrt{3})Z$.

b. On a : $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

La similitude S s'écrit : $Z' - Z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}(Z - Z_0)$ avec $Z_0 = 0$.

C'est donc une similitude plane directe de centre $Z_0 = 0$, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Exercice 2

1 $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$.

Comme le déterminant de la famille $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est non nul, alors la famille $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ est également une base de $\mathcal{E}$.

2
$$\begin{array}{cc} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) \\ \downarrow & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{e}_1 \\ & \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{e}_2 \end{array}$$

3 a.
$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{0} \end{cases} \iff \begin{cases} f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} \\ 2f(\vec{i}) + 3f(\vec{j}) = \vec{0} \end{cases} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} \iff \begin{cases} f(\vec{i}) = 3\vec{i} + 3\vec{j} \\ f(\vec{j}) = -2\vec{i} - 2\vec{j} \end{cases} \begin{matrix} E'_1 = 3E_1 - E_2 \\ E'_2 = -2E_1 + E_3 \end{matrix}$$

b.
$$\begin{aligned} f(\vec{u}) = \vec{u}' &\iff f(x\vec{i} + y\vec{j}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} \\ &\iff xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} \\ &\iff x(3\vec{i} + 3\vec{j}) + y(-2\vec{i} - 2\vec{j}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} \\ &\iff (3x - 2y)\vec{i} + (3x - 2y)\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \end{aligned}$$

D'où les coordonnées de $\vec{u}'$: $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$

c.

$$\begin{aligned} f \circ f(\vec{u}) &= f((3x - 2y)\vec{i} + (3x - 2y)\vec{j}) \\ &= f((3x - 2y)\vec{i}) + f((3x - 2y)\vec{j}) \\ &= (3x - 2y)f(\vec{i}) + (3x - 2y)f(\vec{j}) \\ &= (3x - 2y)(3\vec{i} + 3\vec{j}) + (3x - 2y)(-2\vec{i} - 2\vec{j}) \\ &= (3x - 2y)\vec{i} + (3x - 2y)\vec{j} \\ &= \vec{u}' \\ &= f(\vec{u}) \end{aligned}$$

d. f est un endomorphisme tel que $f \circ f(\vec{u}) = f(\vec{u})$ pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{E}$.

C'est donc une projection vectorielle de base l'ensemble des vecteurs invariants par f et de direction son noyau.

e. Base de f

La base de f est l'ensemble des éléments invariants par f : $\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 / f(\vec{u}) = \vec{u}\}$.
Soit $\vec{u}(x, y)$ un élément de la base de f .

$$f(\vec{u}) = \vec{u} \iff \begin{cases} 3x - 2y = x \\ 3x - 2y = y \end{cases} \iff x - y = 0.$$

On en déduit que la base de f est la droite vectorielle d'équation $x - y = 0$, engendrée par la vecteur $(1, 1)$.

Direction de f

La direction de f est l'ensemble $\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 / f(\vec{u}) = \vec{0}\}$.

Soit $\vec{u}(x, y)$ un élément de la direction de f .

$$f(\vec{u}) = \vec{0} \iff \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \iff 3x - 2y = 0.$$

On en déduit que la direction de f est la droite vectorielle d'équation $3x - 2y = 0$, engendrée par le vecteur $(2, 3)$.

Exercice 3

1

$$\begin{aligned} \frac{1}{x \ln x} \text{ existe} &\iff \ln x \text{ existe et } x \ln x \neq 0 \\ &\iff x > 0 \text{ et } x \neq 1 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble de définition de f est $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

$$2 \quad \forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, \quad f'(x) = -\frac{\ln x + x \frac{1}{x}}{(x \ln x)^2} = \frac{-\ln x - 1}{(x \ln x)^2}.$$

$$3 \quad \text{a. } f' \text{ est du signe de } -1 - \ln x \text{ et s'annule pour } x = \frac{1}{e}.$$

D'où le tableau de signes :

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$(x \ln x)^2$		+	0	+
$-1 - \ln x$		+	0	-
$\frac{-1 - \ln x}{(x \ln x)^2}$		+	0	-

b. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x \ln x} = - \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{\ln u} = -\infty$ où l'on a posé $u = \frac{1}{x}$.

$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{\ln x} = -\infty.$

$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{\ln x} = +\infty.$

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$-\infty$	$-\infty$	0

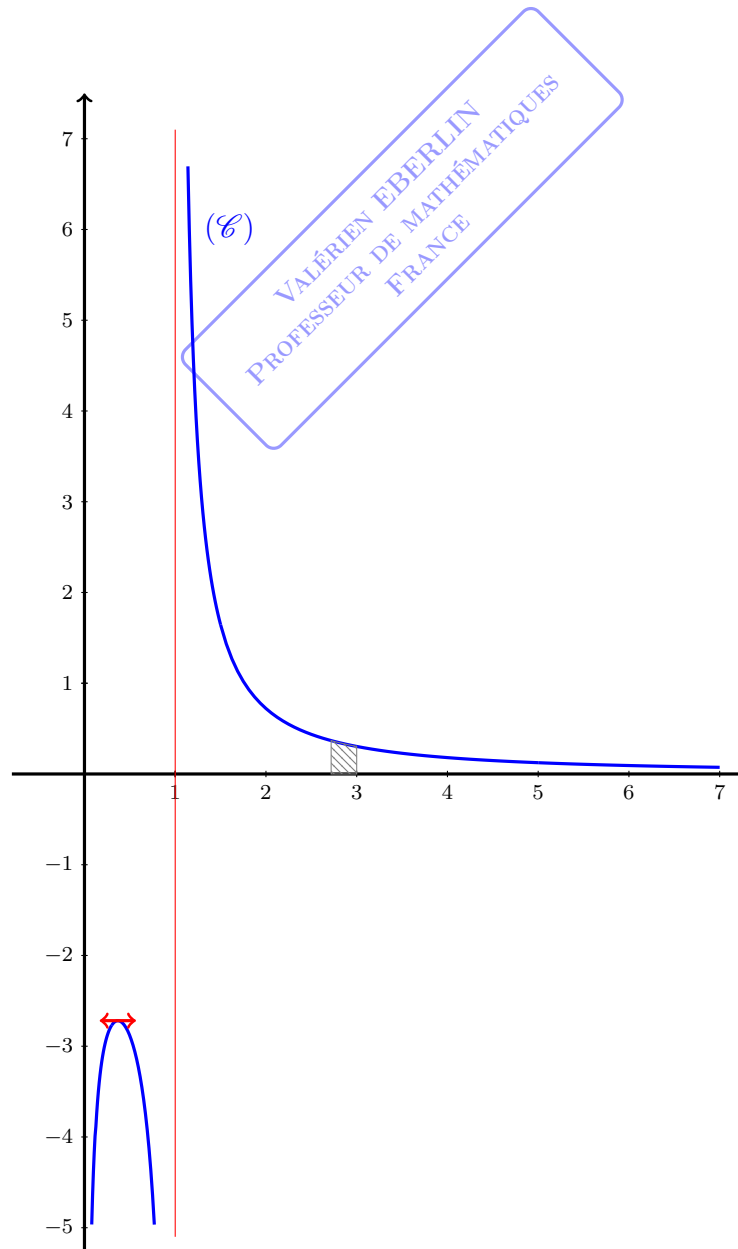
c. Branches infinies

$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\infty$. La courbe ($\mathcal{C}$) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$;

$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = +\infty$. La courbe ($\mathcal{C}$) admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. La courbe ($\mathcal{C}$) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

d.



- 4 a.** Pour b , c , et d nombres réels tous non nuls, on sait que $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

D'où $\frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$.

- b.** En remarquant que $\frac{1}{x \ln x}$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = \ln x$, on en déduit que :

$$I = \int_e^3 \frac{1}{x \ln x} dx = \int_e^3 \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \left[\ln(\ln x) \right]_e^3 = \ln(\ln 3) - \ln(\ln e) = \ln \ln 3.$$

- c.** $\mathcal{A} = \ln(\ln 3)$ u.a = $4 \ln(\ln 3)$ cm².

Exercice 4

Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable X , et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable Y .

Dans ce cas, on a : $\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N .

1

Loi marginale de X .

X	-1	0	2
$n_{i\bullet}$	3	5	2

Loi marginale de Y .

Y	-1	1
$n_{\bullet j}$	6	4

2

Les coordonnées du point moyen en fonction de m et n ,

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 n_{i\bullet} x_i = \frac{3 \times (-1) + 5 \times 0 + 2 \times 2}{10} = 0,1.$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^2 n_{\bullet j} y_j = \frac{6 \times (-1) + 4 \times 1}{10} = -0,2.$$

3

L'inertie du nuage I_G qui est une mesure de la dispersion du nuage autour du point moyen G , est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} I_G &= \sum_{i=1}^3 n_{i\bullet} (x_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^2 n_{\bullet j} (y_j - \bar{Y})^2 \\ &= 3(-1 - 0,1)^2 + 5(0 - 0,1)^2 + 2(2 - 0,1)^2 + 6(-1 + 0,2)^2 + 4(1 + 0,2)^2 \\ &= 20,5 \end{aligned}$$

4

Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est : $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}.$

$$V(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 n_{i\bullet} x_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{10} [3 \times (-1)^2 + 5 \times 0^2 + 2 \times 2^2] - 0,1^2 = 1,09$$

$$V(Y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^2 n_{\bullet j} y_j^2 - \bar{Y}^2 = \frac{1}{10} [6 \times (-1)^2 + 4 \times 1^2] - (-0,2)^2 = 0,96$$

$$\text{Cov}(X,Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 n_{ij} x_i y_j - \bar{X} \bar{Y}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{10} (2 - 1 + 0 + 0 - 2 + 2) - 0,1 \times (-0,2) \\ &= 0,12 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \rho_{X,Y} = \frac{0,12}{\sqrt{1,09} \cdot \sqrt{0,96}} = 0,117$$