

Correction bac 2014 - Série D

Exercice 1

1 Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On appelle conjugué du nombre complexe z , le nombre $\bar{z} = x - iy$.

2 a. Posons $Z = r e^{i\theta}$.

$$Z^3 = 1 \iff r^3 e^{i3\theta} = 1 e^{i0} \iff \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta_k = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

D'où les solutions suivantes :

$$z_0 = 1 e^{i\theta_0} = e^{i0} = 1.$$

$$z_1 = 1 e^{i\theta_1} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$z_2 = 1 e^{i\theta_2} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b. Montrons que les solutions non réelles, sont conjuguées entre elles.

$$\text{On a } \overline{z_1} = \overline{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_2.$$

3 On peut remarquer que $Z_1 = 2 \times z_2$. On en déduit que $Z_1^3 = 2^3 \times z_2^3$.

Or z_2 est solution de l'équation (E) c'est à dire $z_2^3 = 1$.

$$\text{Ainsi, } Z_1^3 = 2^3 \times z_2^3 = 8 \times 1 = 8.$$

4 a. Soit z est une solution de l'équation (E). Alors $z^3 = 1$.

On en déduit que $(2z)^3 = 8 \times z^3 = 8$. Ce qui signifie que $2z$ est solution de l'équation (E').

Les solutions de l'équation (E') sont donc les doubles des solutions de l'équation (E).

$$\text{D'où : } z'_0 = 2z_0 = 2 ; \quad z'_1 = 2z_1 = -1 + i\sqrt{3} ; \quad z'_2 = 2z_2 = -1 - i\sqrt{3}.$$

b. Comme z'_1 et z'_2 sont des solutions de l'équation (E') alors $z'^3_1 = 8$ et $z'^3_2 = 8$.

$$\text{On en déduit que : } \left(\frac{z'_1}{z'_2}\right)^3 = \frac{z'^3_1}{z'^3_2} = \frac{8}{8} = 1.$$

Donc $\frac{z'_1}{z'_2}$ est une solution de l'équation (E).

Exercice 2

1 $f(\vec{i})$ est le vecteur de coordonnées : $\begin{cases} x' = 0 + 0 = 0 \\ y' = 1 + 0 + 0 = 1 \\ z' = 1 \end{cases}$ Donc $f(\vec{i}) = \vec{j} + \vec{k}$

$f(\vec{j})$ est le vecteur de coordonnées : $\begin{cases} x' = 1 + 0 = 1 \\ y' = 0 + 1 + 0 = 1 \\ z' = 0 \end{cases}$ Donc $f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j}$

$$f(\vec{k}) \text{ est le vecteur de coordonnées : } \begin{cases} x' = 0 + 1 = 1 \\ y' = 0 + 0 + 1 = 1 \\ z' = 0 \end{cases} \quad \text{Donc } f(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j}$$

2

$$\begin{array}{ccc} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{i} & \\ & \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{j} & \\ & \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{k} & \end{array}$$

3

a. Un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si :

- (i) $\mathcal{E} \neq \emptyset$
- (ii) Pour tous vecteurs $\vec{u} \in \mathcal{E}$ et $\vec{v} \in \mathcal{E}$ alors $\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{E}$.
- (iii) Pour tout vecteur $\vec{u} \in \mathcal{E}$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \vec{u} \in \mathcal{E}$.

b. (i) $(0, 0, 0) \in \mathcal{H}$ car $0 - 0 + 0 = 0$. D'où $\mathcal{H} \neq \emptyset$.

(ii) Soit $\vec{u}(x, y, z) \in \mathcal{H}$ et $\vec{v}(x', y', z') \in \mathcal{H}$.

$$\vec{u}(x, y, z) \in \mathcal{H} \iff x - y + z = 0.$$

$$\vec{v}(x', y', z') \in \mathcal{H} \iff x' - y' + z' = 0.$$

$$\text{On a : } (x + x') - (y + y') + (z + z') = \underbrace{(x - y + z)}_{=0} + \underbrace{(x' - y' + z')}_{=0} = 0.$$

Donc le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ de coordonnées $(x + x', y + y', z + z')$ appartient à $\mathcal{H}$.

(iii) Soit $\vec{u}(x, y, z) \in \mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\vec{u}(x, y, z) \in \mathcal{H} \iff x - y + z = 0.$$

$$\text{On a : } \lambda x - \lambda y + \lambda z = \lambda \underbrace{(x - y + z)}_{=0} = 0.$$

Donc le vecteur $\lambda \vec{u}$ de coordonnées $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à $\mathcal{H}$.

4

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, un élément du noyau de f . Alors, $f((x, y, z)) = \vec{0}$.

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -y \\ x = 0 \end{cases}$$

Un vecteur (x, y, z) du noyau s'écrit : $(x, y, z) = (0, y, -y) = y(0, 1, -1)$.

Le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_1 = (0, 1, -1)$, d'équation :

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

5

Soit $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, un élément de l'image de f . Alors, il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f((x, y, z)) = (x', y', z')$.

$$f((x, y, z)) = (x', y', z') \iff \begin{cases} y + z = x' \\ x + y + z = y' \\ x = z' \end{cases}$$

L'on relève sans difficulté que : $x' - y' + z' = 0$.

Les coordonnées (x', y', z') de l'image de f vérifient $y' = x' + z'$.

D'où : $(x', y', z') = (x', x' + z', z') = x'(1, 1, 0) + z'(0, 1, 1)$.

On en déduit que l'image de f est le plan engendré par les vecteurs $\vec{e}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{e}_3 = (0, 1, 1)$, d'équation $x - y + z = 0$.

Exercice 3

- 1** Comme $e^x + 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors la fonction $x : \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1} - x$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc l'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}$.

- 2** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} - 1 = -\frac{e^{2x} + e^x + 1}{(e^x + 1)^2}.$$

Les fonctions $x : \mapsto e^x$ et $x : \mapsto e^{2x}$ étant strictement positives, on en déduit que g' est strictement négative sur $\mathbb{R}$.

- 3** Tableau de variation de g

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - x \right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - x \right) = +\infty$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		—	
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

- 4** La fonction g est continue, strictement décroissante sur $] -\infty ; +\infty[$.

De plus, $0 \in] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) [=] -\infty ; +\infty [$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in] -\infty ; +\infty [$ tel que $g(\alpha) = 0$.

On en déduit que $\frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha$ et α est solution de l'équation $\frac{e^x}{e^x + 1} = x$.

- 5 a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

La fonction $x \mapsto e^x$ étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) > 0.$$

- b.** Tableau de variation de h

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0.$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	+	
$h(x)$	0	1

c. h est strictement croissante sur $] -\infty ; +\infty[$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq h(x) \leq 1$.

6 a. Notons $\mathcal{P}_n$, la propriété : $u_n \leq 1$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$.

Initialisation

$$u_0 = 0 \leq 1.$$

$$u_1 = h(u_0) = \frac{e^0}{e^0 + 1} = \frac{1}{2} \leq 1.$$

Donc les propriétés $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vérifiées.

Hérédité

Supposons $\mathcal{P}_n$ c'est à dire supposons que $u_n \leq 1$.

Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $u_{n+1} \leq 1$.

On a : $u_n \leq 1$.

D'après 5. c., $h(u_n) \leq 1$. D'où $u_{n+1} \leq 1$.

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n .

b. Notons $\mathcal{P}_n$, la propriété : $u_n \leq u_{n+1}$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$.

Initialisation

$$u_0 = 0 \text{ et } u_1 = h(u_0) = \frac{1}{2}. \text{ D'où } u_0 \leq u_1.$$

Donc la propriété $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

Hérédité

Supposons $\mathcal{P}_n$ c'est à dire supposons que $u_n \leq u_{n+1}$.

Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

On a $u_n \leq u_{n+1}$.

Comme h est une fonction croissante, alors $h(u_n) \leq h(u_{n+1})$. D'où $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n .

c. La suite (u_n) est une suite croissante et majorée donc elle est convergente.

Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

Pour justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$, les étapes (i) ; (ii) et (iii) sont nécessaires.

(i) Montrons d'abord que : $\forall x \in [0; 1], 0 < h'(x) \leq \frac{e}{4}$

Soit $x \in [0; 1]$.

Alors $x \geq 0$. On en déduit que $e^x \geq 1$ et $e^x + 1 \geq 2$.

Par croissance de la fonction carré sur $[0; 1]$, on a $(e^x + 1)^2 \geq 4$.

Par décroissance de la fonction inverse sur $]0; 1]$, on a $\frac{1}{(e^x + 1)^2} \leq \frac{1}{4}$.

D'où $\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \leq \frac{e^x}{4}$.

$e^x \leq e$ (car $x \leq 1$). On en déduit que $0 < \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \leq \frac{e}{4}$.

D'où $0 < h'(x) \leq \frac{e}{4}$

(ii) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{e}{4} |u_n - \alpha|$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

h est continue et dérivable sur $[0; 1]$.

De plus, $|h'(x)| = h'(x) \leq \frac{e}{4}$ pour tout $x \in [0; 1]$.

D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall x \in [0; 1], \forall y \in [0; 1], |h(x) - h(y)| \leq \frac{e}{4} |x - y|$$

Comme $h(\alpha) = \alpha$, on en déduit d'après 5.c., que $\alpha \in [0; 1]$.

De plus, d'après 5. c. et par définition de la suite (u_n) , on en déduit que $u_n \in [0; 1]$.

Ainsi, on peut appliquer l'inégalité précédente en $x = u_n$ et $y = \alpha$.

On a alors :

$$|h(u_n) - h(\alpha)| \leq \frac{e}{4} |u_n - \alpha|$$

Mais $h(u_n) = u_{n+1}$ par définition de la suite (u_n) et rappelons que $h(\alpha) = \alpha$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{e}{4} |u_n - \alpha|$.

(iii) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$

Soit $\mathcal{P}_n$, la propriété : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n$.

Initialisation

D'après (ii), on a $|u_1 - \alpha| \leq \frac{e}{4} |u_0 - \alpha|$.

La propriété $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

Hérédité

Supposons $\mathcal{P}_n$ c'est à dire supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{e}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$.

D'après (ii), $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{e}{4} |u_n - \alpha|$ et par hypothèse de récurrence, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Ainsi, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{e}{4} |u_n - \alpha| \leq \frac{e}{4} \left(\frac{e}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| = \left(\frac{e}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Justifions enfin que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

$$\text{Par passage à la limite, } 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$$

$$\text{Par conséquent, } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha.$$

Exercice 4

Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable x , et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable y .

Dans ce cas, on a : $\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N .

1

x	-1	0	2
$n_{i\bullet}$	3	a	2

y	1	3
$n_{\bullet j}$	3	$a+2$

2

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 n_{i\bullet} x_i = \frac{3 \times (-1) + a \times 0 + 2 \times 2}{a+5} = \frac{1}{5+a}.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^2 n_{\bullet j} y_j = \frac{3 \times 1 + (a+2) \times 3}{5+a} = \frac{3a+9}{a+5}.$$

On cherche a tel que :

$$\begin{cases} \frac{1}{5+a} = \frac{1}{6} \\ \frac{3a+9}{a+5} = 2 \end{cases} \quad \text{D'où } a = 1.$$

3

Pour $a = 1$, $\bar{x} = \frac{1}{6}$ et $\bar{y} = 2$.

Variance de x .

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 n_{i\bullet} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{3(-1)^2 + 1 \times 0^2 + 2 \times 2^2}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{65}{36}$$

Variance de y .

$$V(y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^2 n_{\bullet j} y_j^2 - \bar{y}^2 = \frac{3 \times 1^2 + 3 \times 3^2}{6} - 2^2 = 1$$

Covariance de la série (x, y) .

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x, y) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 n_{ij} x_i y_j - \bar{x} \bar{y} \quad \text{où } n_{ij} \text{ est le coefficient associé au couple } (x_i, y_j) \\ &= \frac{-1 - 6 + 0 + 0 + 4 + 0}{6} - \frac{1}{6} \times 2 = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$