

Correction bac 2013 - Série D

Exercice 1

Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable X , et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable Y .

Dans ce cas, on a : $\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N .

1

X	-2	-1	0
$n_{i\bullet}$	6	8	5

Y	-1	0	2
$n_{\bullet j}$	9	6	4

$$2 \quad \bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 n_{i\bullet} x_i = \frac{6 \times (-2) + 8 \times (-1) + 5 \times 0}{19} = -\frac{20}{19}.$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^3 n_{\bullet j} y_j = \frac{9 \times (-1) + 6 \times 0 + 4 \times 2}{19} = \frac{-1}{19}.$$

Le point moyen a pour coordonnées $G\left(-\frac{20}{19}, -\frac{1}{19}\right)$.

3 L'équation de régression linéaire de Y en X est donnée par l'équation :

$$Y = aX + b \text{ où } a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X}.$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 n_{ij} x_i y_j - \bar{X}\bar{Y} \quad \text{où } n_{ij} \text{ est le coefficient associé au couple } (x_i, y_j) \\ &= \frac{8 + 0 - 8 + 3 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}{19} - \frac{20}{19^2} = \frac{37}{361} \end{aligned}$$

$$V(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 n_{i\bullet} x_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{6(-2)^2 + 8(-1)^2 + 5 \times 0^2}{19} - \left(-\frac{20}{19}\right)^2 = \frac{208}{361}$$

$$\text{Ainsi, } a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{37}{208} \text{ et } b = \frac{-1}{19} - \frac{37}{208} \times \frac{-20}{19} = \frac{7}{52}.$$

D'où l'équation de la droite de régression linéaire $Y = \frac{37}{208}X + \frac{7}{52}$.

4 Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est : $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$.

$$V(Y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^3 n_{\bullet j} y_j^2 - \bar{Y}^2 = \frac{9 \times (-1)^2 + 6 \times 0^2 + 4 \times 2^2}{19} - \left(\frac{-1}{19}\right)^2 = \frac{474}{361}.$$

$$\text{D'où } \rho_{X,Y} = \frac{\frac{37}{361}}{\sqrt{\frac{208}{361}}\sqrt{\frac{474}{361}}} = 0,117.$$

Exercice 2

1 Posons $Z = r e^{i\theta}$.

$$Z^3 = -8 \iff r^3 e^{i3\theta} = 8 e^{i\pi} \iff \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta \equiv \pi [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2 \\ \theta_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

D'où les solutions suivantes :

$$z_0 = 2 e^{i\theta_0} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

$$z_1 = 2 e^{i\theta_1} = 2 e^{i\pi} = -2.$$

$$z_2 = 2 e^{i\theta_2} = 2 e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2 \left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

2 a. $U = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-2i\sqrt{3}}{-3 - i\sqrt{3}} = \frac{(-2i\sqrt{3})(-3 + i\sqrt{3})}{(-3 - i\sqrt{3})(-3 + i\sqrt{3})} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

D'où $|U| = 1$ et $\arg(U) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$. On peut choisir comme argument de U la valeur $\frac{\pi}{3}$.

b. Comme $\left| \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \right| = 1$ alors $|Z_C - Z_A| = |Z_B - Z_A|$. D'où $AC = AB$.

$$\text{D'autre part, } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

Le triangle ABC est isocèle en A et a un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$. C'est donc un triangle équilatéral.

3 a. Soit $Z' = aZ + b$ l'expression complexe de la rotation S .

$$\begin{cases} S(A) = C \\ S(C) = B \end{cases} \iff \begin{cases} Z_C = aZ_A + b & (1) \\ Z_B = aZ_C + b & (2) \end{cases}$$

En multipliant l'équation (2) par -1 puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (1), il s'ensuit que :

$$a = \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_C} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En remplaçant a par $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'expression $b = Z_C - aZ_A$, on trouve :

$$b = 1 - i\sqrt{3} - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i\sqrt{3}) = 0.$$

$$\text{D'où l'expression de la rotation } S : Z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) Z.$$

b. $Z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) Z = e^{i(\frac{4\pi}{3})} Z.$

S est de la forme $Z' - Z_O = a(Z - Z_O)$ avec $a = e^{i(\frac{4\pi}{3})}$ et $Z_O = 0$. C'est donc la rotation de centre $Z_O = 0$ et d'angle $\frac{4\pi}{3}$.

Problème

Partie A

- 1** La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$g'(x) = -\frac{2x^2 + 1}{x} \text{ pour tout } x \in]0, +\infty[.$$

Signe de g'

$$g'(x) < 0 \text{ pour tout } x \in]0, +\infty[.$$

Tableau de variation

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		—	
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

- 2** g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

De plus, $g(1) = 0$.

On en déduit que :

$$g(x) > 0 \text{ pour tout } x \in]0; 1[.$$

$$g(x) < 0 \text{ pour tout } x \in]1; +\infty[.$$

Partie B

- 1** La fonction $x \mapsto 1 + x - e^{1-x}$ existe sur $] -\infty; 1]$;

$$\text{la fonction } x \mapsto \frac{2x - x^2 + \ln x}{x} \text{ existe sur }]1; +\infty[.$$

Donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

- 2 a.** Continuité de la fonction f au point $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - x^2 + \ln x}{x} = 1.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, alors la fonction f est continue au point $x = 1$.

Dérivabilité de la fonction f au point $x = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - e^{1-x}}{x - 1} \\ &= 1 + \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1}{u} \quad \text{où l'on a posé } u = 1 - x \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x - x^2 + \ln x}{x(x - 1)} \\
 &= -1 + \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln x}{x(x - 1)} \\
 &= -1 + \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln x - \ln 1}{(x - 1)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, alors la fonction f n'est pas dérivable au point $x = 1$.

b. Pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

3 f est dérivable sur $] - \infty; 1[\cup]1; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in] - \infty; 1[, \quad f'(x) = 1 + e^{1-x}.$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

Signe de f'

$$f'(x) > 0 \text{ pour tout } x \in] - \infty; 1[;$$

$$f'(x) \text{ est du signe de } g(x) \text{ sur }]1; +\infty[. \text{ Par conséquent, } f'(x) < 0 \text{ pour tout } x \in]1; +\infty[.$$

Tableau de variation de f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x - e^{1-x}) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - x + \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\parallel$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

4 (Δ) asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2 - x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, alors la droite (Δ) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

Position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ)

$$f(x) - (2 - x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Comme la fonction $x : \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est strictement positive pour $x > 1$, alors la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de la droite (Δ) pour $x > 1$.

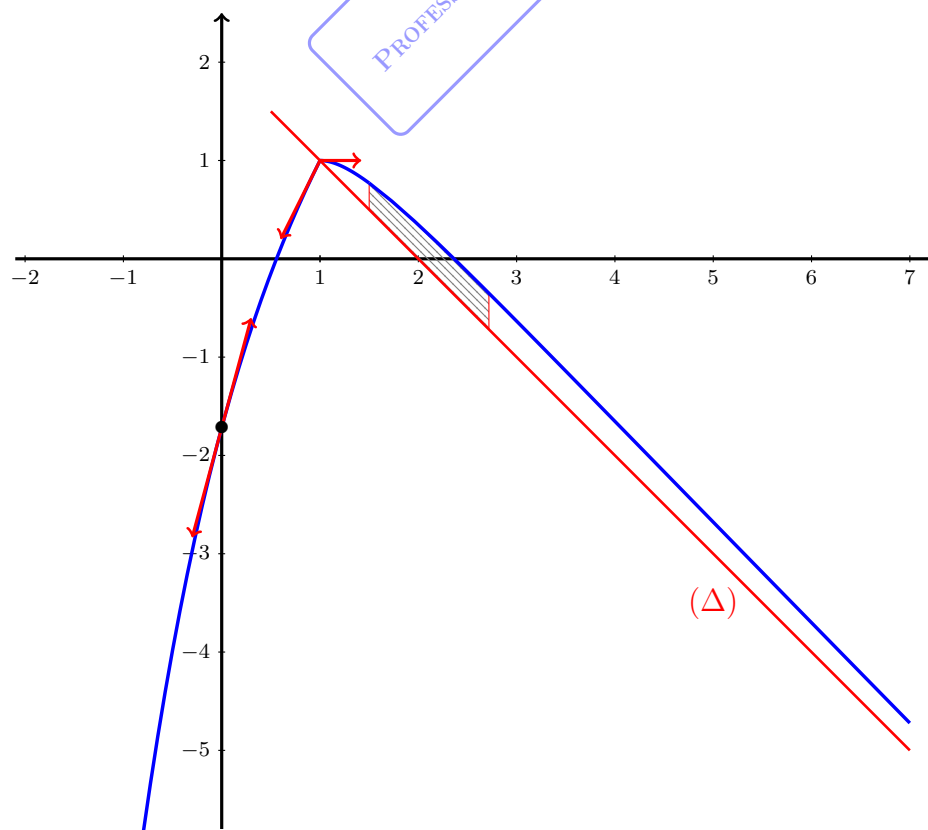
5 L'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ en $x = 0$ est donnée par la formule : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. D'où $(\mathcal{T}) : y = (1 + e)x + 1 - e$.

- 6** • $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 - \frac{e^{1-x}}{x} \right) = 1 - e \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 1 + e \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$ où l'on a posé $u = -x$.

La courbe ($\mathcal{C}$) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

- La droite (Δ) d'équation $y = 2 - x$ est une asymptote oblique à la courbe ($\mathcal{C}$) en $+\infty$.

7



8 $\mathcal{A}(D) = \int_{\frac{3}{2}}^e [f(x) - (2 - x)] dx = \int_{\frac{3}{2}}^e \frac{\ln x}{x} dx.$

Si l'on choisit $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \ln x \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties : $\int_{\frac{3}{2}}^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[(\ln x)^2 \right]_{\frac{3}{2}}^e - \int_{\frac{3}{2}}^e \frac{\ln x}{x} dx.$

D'où $\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2} \left[(\ln x)^2 \right]_{\frac{3}{2}}^e = \frac{1 - (\ln \frac{3}{2})^2}{2} \text{ u.a} = 2 \left[1 - (\ln \frac{3}{2})^2 \right] \text{ cm}^2$