

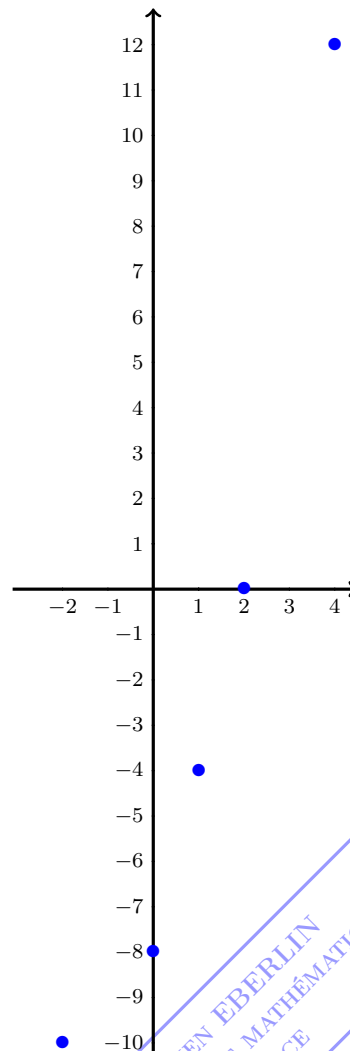
Correction bac 2012 - Série D

Exercice 1

$$1 \quad \bar{X} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{a+3}{5} \quad \text{et} \quad \bar{Y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i = \frac{b-6}{5}.$$

Les coordonnées du point moyen vérifient :

$$\begin{cases} \frac{a+3}{5} = 1 \\ \frac{b-6}{5} = -2 \end{cases} \quad \text{D'où } a = 2 \text{ et } b = -4.$$



- 2 a. Voir graphique.
 b. Pour $a = 2$ et $b = -4$, $\bar{X} = 1$, $\bar{Y} = -2$.

L'équation de régression linéaire de X en Y est donnée par l'équation :

$$X = aY + b \text{ où } a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(Y)} \text{ et } b = \bar{X} - a\bar{Y}.$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i y_i - \bar{X} \cdot \bar{Y} \\ &= \frac{1}{5} (-2 \times (-10) + 0 \times (-8) + 1 \times (-4) + 2 \times 0 + 4 \times 12) - 1 \times (-2) \\ &= 14,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i^2 - \bar{Y}^2 \\ &= \frac{1}{5} ((-10)^2 + (-8)^2 + (-4)^2 + 0^2 + 12^2) - (-2)^2 \\ &= 60,8 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)} = 0,243 \text{ et } b = 1 - 0,243 \times (-2) = 1,486.$$

L'équation de la droite de régression linéaire de X en Y est : $X = 0,243Y + 1,486$.

c. Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est : $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}}.$

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i^2 - \bar{X}^2 \\ &= \frac{1}{5} ((-2)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2) - 1^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \rho_{X,Y} = \frac{14,8}{\sqrt{4} \sqrt{60,8}} = 0,949.$$

Interprétation

Le coefficient de corrélation linéaire est proche de 1. Cela indique qu'il existe une relation linéaire forte entre les variables X et Y . Ce coefficient est également positif, cela signifie que lorsqu'une variable augmente, l'autre variable augmente aussi.

Exercice 2

1 a. Soit $z = r e^{i\theta}$, une solution de l'équation (E).

$$z^2 = -8\sqrt{3} + 8i \iff r^2 e^{i2\theta} = 16 e^{i\frac{5\pi}{6}} \iff \begin{cases} r^2 = 16 \\ 2\theta \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 4 \\ \theta_k = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

D'où les solutions :

$$z_1 = 4 e^{i\theta_0} = 4 e^{i\frac{5\pi}{12}} = 4 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right).$$

$$z_2 = 4 e^{i\theta_1} = 4 e^{i(\frac{5\pi}{12} + \pi)} = 4 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12} + \pi\right) \right) = 4 \left(-\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) - i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right).$$

b. On cherche un nombre complexe $z = x + iy$ tel que $z^2 = -8\sqrt{3} + 8i$.

$x^2 - y^2 + 2ixy = -8\sqrt{3} + 8i$. Par identification des parties réelles et des parties imaginaires, $x^2 - y^2 = -8\sqrt{3}$ et $xy = 4$.

D'autre part, comme $|z|^2 = |-8\sqrt{3} + 8i|$ alors $x^2 + y^2 = 16$.

On obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8\sqrt{3} & (1) \\ x^2 + y^2 = 16 & (2) \\ xy = 4 & (3) \end{cases}$$

En additionnant membre à membre l'équation (1) et (2), on obtient :

$$x^2 = 8 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{2} - \sqrt{6})^2. \text{ On en déduit que } x = \sqrt{2} - \sqrt{6} \text{ ou } x = -\sqrt{2} + \sqrt{6};$$

En multipliant l'équation (1) par -1 , puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (2), on obtient $y^2 = 8 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$. On en déduit que $y = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ ou $y = -\sqrt{2} - \sqrt{6}$;

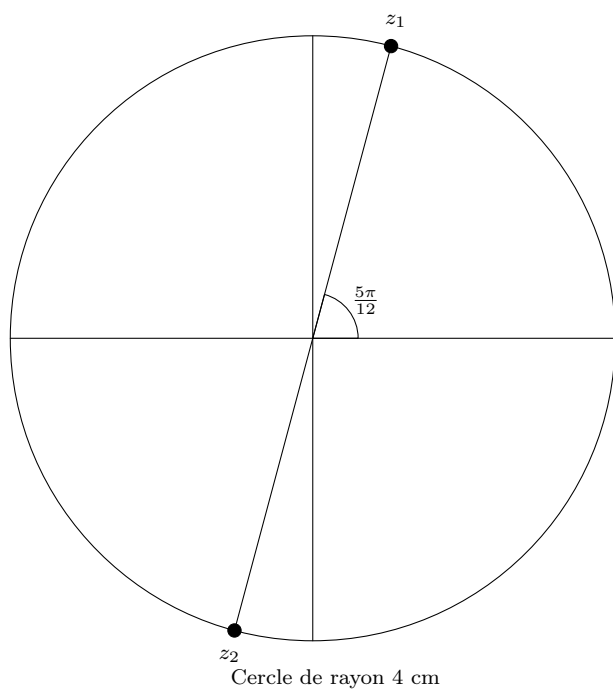
L'équation (3) nous indique que x et y sont de même signe.

Les solutions de l'équation $z^2 = -8\sqrt{3} + 8i$ sont : $-\sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ et $\sqrt{2} - \sqrt{6} - i(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

En comparant les signes des parties réelles et imaginaires de z_1 et z_2 , on en déduit que :

$$z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \text{ et } z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{6} - i(\sqrt{2} + \sqrt{6}).$$

2



3 De l'égalité $-\sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6}) = 4 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)$, on en déduit que :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

Problème

Partie A

- 1** L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est : $r^2 + 2r + 1 = 0$. Elle admet une racine double $r_1 = r_2 = -1$.

Donc la solution générale de l'équation différentielle est : $y(x) = (c_1x + c_2)e^{-x}$ où c_1, c_2 sont des constantes réelles quelconques.

- 2** u est de la forme $u(x) = (c_1x + c_2)e^{-x}$ avec $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.

$$\begin{cases} u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 e^{-0} = 1 \\ c_1 e^{-0} - c_2 e^{-0} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

La solution particulière est la fonction u définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $u(x) = (x+1)e^{-x}$.

Partie B

- 3** La fonction $x \mapsto (x+1)e^{-x}$ existe sur $] -\infty; 0]$.

La fonction $x \mapsto 1 - 2x + x \ln x$ existe si et seulement si $x > 0$.

Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

- 4** Continuité en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = (0+1)e^{-0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 2x + x \ln x) = 1.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, la fonction f est continue en 0.

Dérivabilité en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1)e^{-x} - 1}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} - 1}{x} = 1 - \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{e^X - 1}{X} = 1 - 1 = 0$$

où l'on a posé $X = -x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2 + \ln x) = -\infty.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ n'est pas une valeur finie, on en déduit que f n'est pas dérivable en 0.

- 5** La fonction f est dérivable sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x < 0, \quad f'(x) = -xe^{-x}.$$

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -1 + \ln x.$$

Signe de f'

$$f'(x) = 0 \iff -1 + \ln x = 0 \iff x = e$$

$$f'(x) < 0 \text{ pour tout } x \in]0; e[;$$

$$f'(x) > 0 \text{ pour tout } x \in]e; +\infty[.$$

$$f'(x) > 0 \text{ pour tout } x \in]-\infty; 0[;$$

Tableau de variation

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{-x} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x \left(\frac{1}{x \ln x} - \frac{2}{\ln x} + 1 \right) = +\infty.$$

x	$-\infty$	0	e	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	1	$1-e$	0	$+\infty$

6

Point d'intersection avec l'axe des abscisses pour $x \leq 0$

$$\begin{aligned} \text{Si } x \leq 0, \quad f(x) = 0 &\iff (x+1)e^{-x} = 0 \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

Le point d'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses est le point $(-1, 0)$.

Équation de la tangente

L'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C})$ est donnée par la formule $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$
D'où $(\mathcal{T}) : y = e x + e$.

7

$$f(6) \approx -0,25; f(7) \approx 0,62.$$

La fonction f est continue, strictement croissante sur $]6; 7[$.

De plus, $f(6) \times f(7) < 0$.

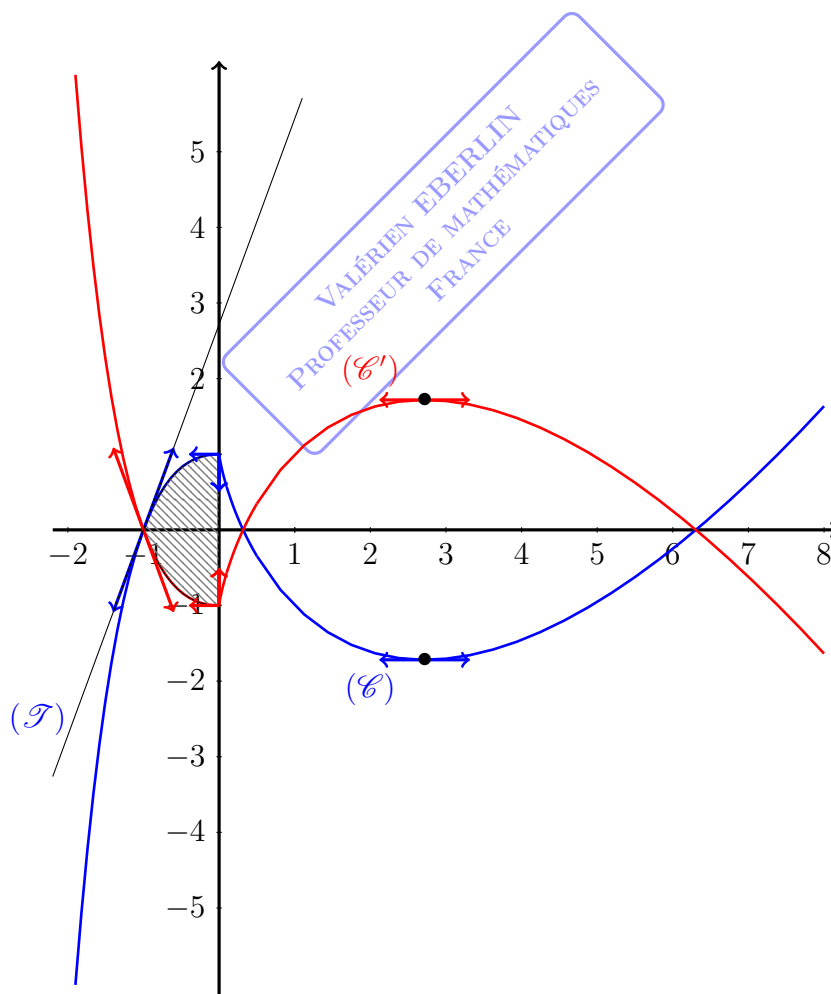
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]6; 7[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

8

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$. La courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 2 + \ln x\right) = +\infty$. La courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

b.



Partie C

9

a.

x	$-\infty$	0	e	α	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$ $	$+$	0	$-$
$h(x)$	$+\infty$	-1	$-1 + e$	0	$-\infty$

b. Voir graphique.

$$c. \mathcal{A} = \int_{-1}^0 [f(x) - h(x)] dx = 2 \int_{-1}^0 (1+x)e^{-x} dx.$$

Si l'on choisit $\begin{cases} u(x) = 1+x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties :

$$\mathcal{A} = 2 \int_{-1}^0 (1+x) e^{-x} dx = -2 \left[(1+x) e^{-x} \right]_{-1}^0 + 2 \int_{-1}^0 e^{-x} dx.$$

$$\text{D'où } \mathcal{A} = 2(-2 + e) \text{ u.a} = 8(-2 + e) \text{ cm}^2$$

VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
FRANCE

VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
FRANCE