Correction bac 2011 - Série D

Exercice 1

1 La matrice de l'application f est :

$$\begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 L'endomorphisme f est bijectif si le déterminant de sa matrice associée est non nul.

$$\begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a - 1$$

D'où, f est bijectif si $a \neq 1$.

3 **a.** $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3 ; \, f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}$.

Soit $\overrightarrow{u}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de $\mathscr{B}$. Alors x, y, z vérifient le système (S) : $\begin{cases} x = -x + y + 2z \\ y = x + 2y + z \\ z = x + y \end{cases}$

$$(S) \iff \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 & E_1 \\ x + y + z = 0 & E_2 \\ x + y - z = 0 & E_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 & E_1 \\ 3y + 4z = 0 & E_2' = E_1 + 2E_2 \\ 3y = 0 & E_3' = E_1 + 2E_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des vecteurs invariants par l'endomorphisme f est l'ensemble $\{(0, 0, 0)\}$.

b. $\operatorname{Ker} f = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3 ; \, f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}\}$.

Soit $\overrightarrow{u}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de $\operatorname{Ker} f$. Alors x, y, z vérifient le système : $\begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y \quad\;\; = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 0 & E_1 \\ x + 2y + z = 0 & E_2 \\ x + y \quad = 0 & E_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + 2z = 0 & E_1 \\ 3y + 3z = 0 & E_2' = E_1 + E_2 \\ 2y + 2z = 0 & E_3' = E_1 + E_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

Finalement, $\overrightarrow{u}(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\operatorname{Ker} f$ se décompose en : $(x, y, z) = (z, -z, z) = z(1, -1, 1)$.

On en déduit que $\operatorname{Ker} f$ est la droite engendré par le vecteur $(1, -1, 1)$, d'équation $\begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$.

c. $\operatorname{Im} f = \{f(\overrightarrow{u}) \; ; \; \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3\}$.

Soit $\overrightarrow{u'}(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de $\operatorname{Im} f$. Alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'}$.

(x', y', z') vérifie le système (S) : $\begin{cases} -x + y + 2z = x' & E_1 \\ x + 2y + z = y' & E_2 \\ x + y \quad = z' & E_3 \end{cases}$

$$S \iff \begin{cases} -x+y+2z = x' \\ \quad 3y+3z = x'+y' \\ \quad 2y+2z = x'+z' \end{cases} \left| \begin{array}{l} E_1 \\ E_2' = E_1+E_2 \\ E_3' = E_1+E_3 \end{array} \right. \iff \begin{cases} -x+y+2z = x' \\ \quad 3y+3z = x'+y' \\ \quad 0 = x'-2y'+3z' \end{cases} \left| \begin{array}{l} E_1 \\ E_2' \\ E_3'' = -2E_2'+3E_3' \end{array} \right.$$

Finalement, $(x',y',z') \in (S) \iff x'-2y'+3z' = 0$.
Les coordonnées (x',y',z') de $\mathrm{Im} f$ vérifient $x' = 2y'-3z'$.
D'où : $(x',y',z') = (2y'-3z',y',z') = y'(2,1,0)+z'(-3,0,1)$.
On en déduit que $\mathrm{Im} f$ est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\{(2,1,0),(-3,0,1)\}$, d'équation $x-2y+3z=0$

4

$$\overrightarrow{u} \in \ker f \iff f\big((1,\alpha,\beta)\big) = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} -1+\alpha+2\beta = 0 \\ \ 1+2\alpha+\beta = 0 \\ \ 1\ +\alpha \quad\ \ = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha+2\beta = 1 \\ 2\alpha+\beta = -1 \\ \quad \alpha = -1 \end{cases}$$

En remplaçant α par -1 dans l'une des deux premières équations, on obtient $\beta = 1$.

$\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}\, f$ si $\alpha = -1$ et $\beta = 1$.

Exercice 2

1 L'équation (E) a pour discriminant $\Delta = (1+3i)^2 - 4(4+4i) = -24-10i$.

Cherchons un nombre complexe $z = x+iy$ tel que $z^2 = -24-10i$.

$x^2-y^2+2ixy = -24-10i$. Par identification des parties réelles et des parties imaginaires, $x^2-y^2 = -24$ et $xy = -5$.

D'autre part, comme $|z|^2 = |-24-10i|$ alors $x^2+y^2 = 26$.

On obtient le système d'équations suivant : $\begin{cases} x^2-y^2 = -24 & (1) \\ x^2+y^2 = 26 & (2) \\ \quad xy = -5 & (3) \end{cases}$

En additionnant membre à membre l'équation (1) et (2) on obtient, $x^2 = 1$. On en déduit que $x=-1$ ou $x=1$;

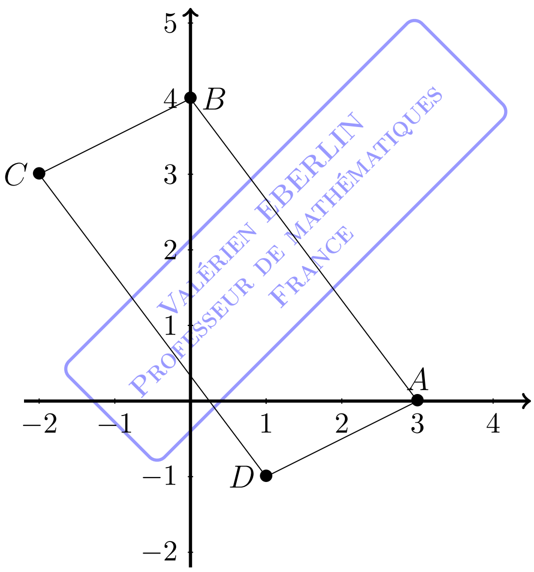
En multipliant l'équation (1) par -1, puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (2), on obtient $y^2 = 25$. On en déduit que $y=-5$ ou $y=5$;

L'équation (3) nous indique que x et y sont de signes contraires.

D'où $\Delta = (-1+5i)^2$.

Les solutions de l'équation (E) sont $Z_1 = \frac{1+3i-1+5i}{2} = 4i$ et $Z_2 = \frac{1+3i+1-5i}{2} = 1-i$.

2 **a.**



b. $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = -3+4i$; $Z_{\overrightarrow{DC}} = Z_C - Z_D = -3+4i$; $Z_{\overrightarrow{CB}} = Z_B - Z_C = 2+i$; $Z_{\overrightarrow{DA}} = Z_A - Z_D = 2+i$.

c. Comme $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$, alors le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Problème

Partie A

1 $a + \dfrac{b}{1+t} = \dfrac{at+a+b}{1+t}$. On cherche a tel que $\dfrac{1-t}{1+t} = \dfrac{a+b+at}{1+t}$.

Par identification, $a+b=1$ et $a=-1$

D'où $a=-1$ et $b=2$.

2 $\displaystyle\int_0^x \frac{1-t}{1+t}\,dt = \int_0^x \left(-1+\frac{2}{1+t}\right)dt = \Big[-t+2\ln(1+t)\Big]_0^x = -x+2\ln(1+x) = -x+\ln(1+x)^2$.

Partie B

1 La fonction $x \mapsto -x+\ln(x+1)^2$ existe si et seulement si $x+1 \neq 0$. Donc $E_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

2 La fonction f est dérivable sur E_f et on a : $\forall x \in E_f, \quad f'(x) = -1 + \dfrac{2(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{-x+1}{x+1}$.

Tableau de signes

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-x+1}{x+1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$f'(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty;-1[$ et f est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$.
$f'(x) > 0$ pour tout $x \in]-1;1[$ et f est strictement croissante sur $]-1;1[$.
$f'(x) < 0$ pour tout $x \in]1;+\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

3 Tableau de variation

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x\left(1 - 2\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = -\infty \quad ;$$
$$\lim_{x\to-1_-} f(x) = -\infty \ ; \quad \lim_{x\to-1_+} f(x) = -\infty.$$

x	$-\infty$		-1		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0		$-$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-1+\ln 4$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4 $f(2) \approx 0,197$; $f(3) \approx -0,227$.
La fonction f est continue, strictement décroissante sur $]2;3[$.
De plus, $f(2) \times f(3) < 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]2;3[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

5 $f(-2) = 2$; $f'(-2) = -3$.
$f(-\frac{3}{2}) \approx 0,11$; $f'(-\frac{3}{2}) = -5$.
$f(0) = 0$; $f'(0) = 1$.
$f(5) \approx -1,4$; $f'(5) \approx -0,67$.

6
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-1 + 2\frac{\ln|x+1|}{x}\right) = -1.$

  $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\Big[f(x) - (-x)\Big] = \lim_{x\to-\infty} \ln(x+1)^2 = +\infty.$

  Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\Big[f(x)-(-x)\Big] = +\infty$, alors la courbe $(\mathscr{C})$ admet une direction asymptotique (branche parabolique) de direction, la droite d'équation $y = -x$ en $-\infty$.

VALÉRIEN EBERLIN PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES FRANCE

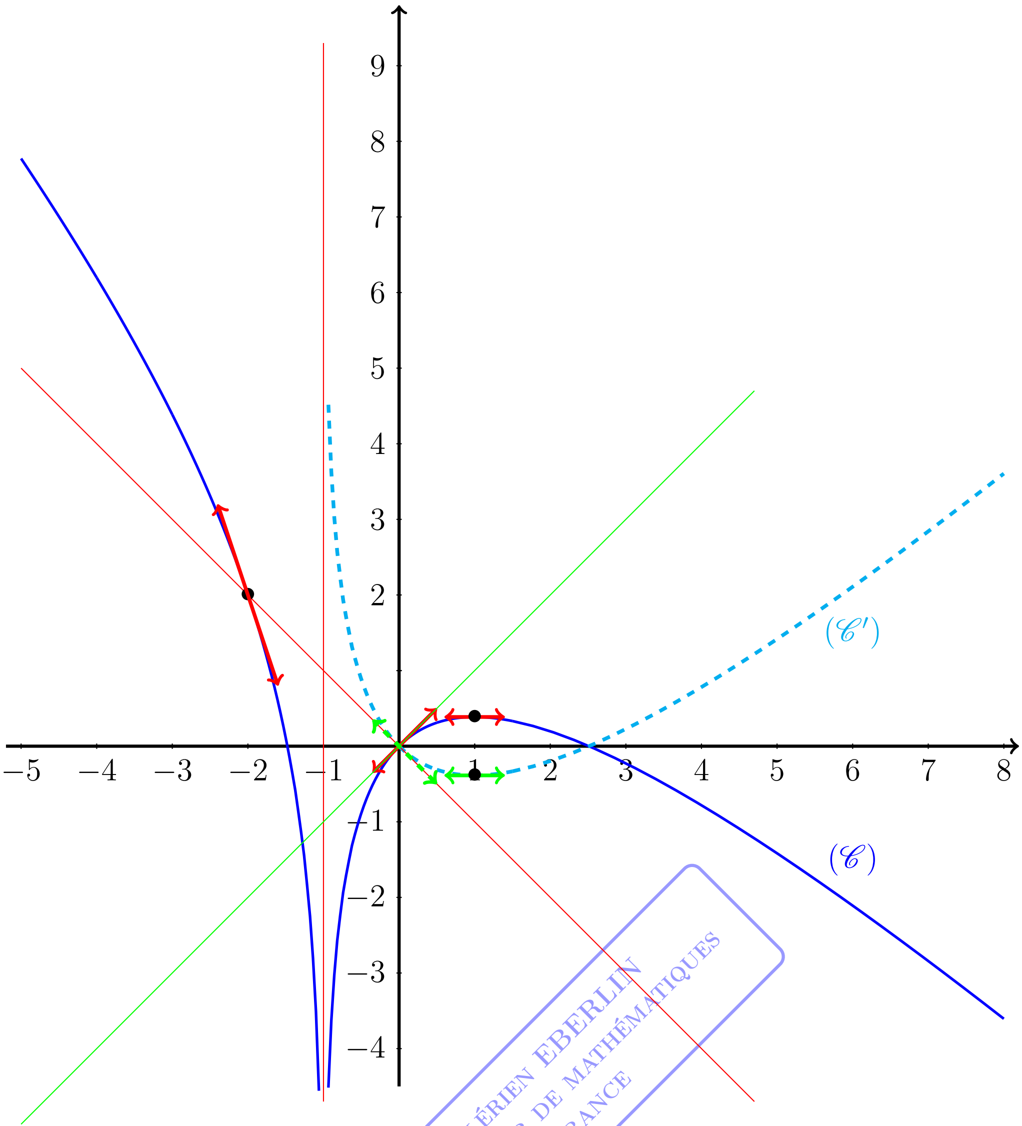
- On obtient de même : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \Big[f(x) - (-x)\Big] = +\infty$ et on en déduit que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une direction asymptotique de direction, la droite d'équation $y = -x$ en $+\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -1_-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1_+} f(x) = -\infty$. la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

7 Équation de la tangente en $x = -2$

L'équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ en $x = -2$ est donnée par la formule :
$y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$. D'où $\;y = -3x - 4$.

Équation de la tangente en $x = 0$

L'équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ en $x = 0$ est donnée par la formule : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$.
D'où $\;y = x$.



Partie C

1 Tableau de variation de h

x	-1		1		α		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$			
$h(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$1-\ln 4$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2 Voir graphique.

Valérien EBERLIN
Professeur de mathématiques
France