

Correction bac 2010 - Série D

Exercice 1

1

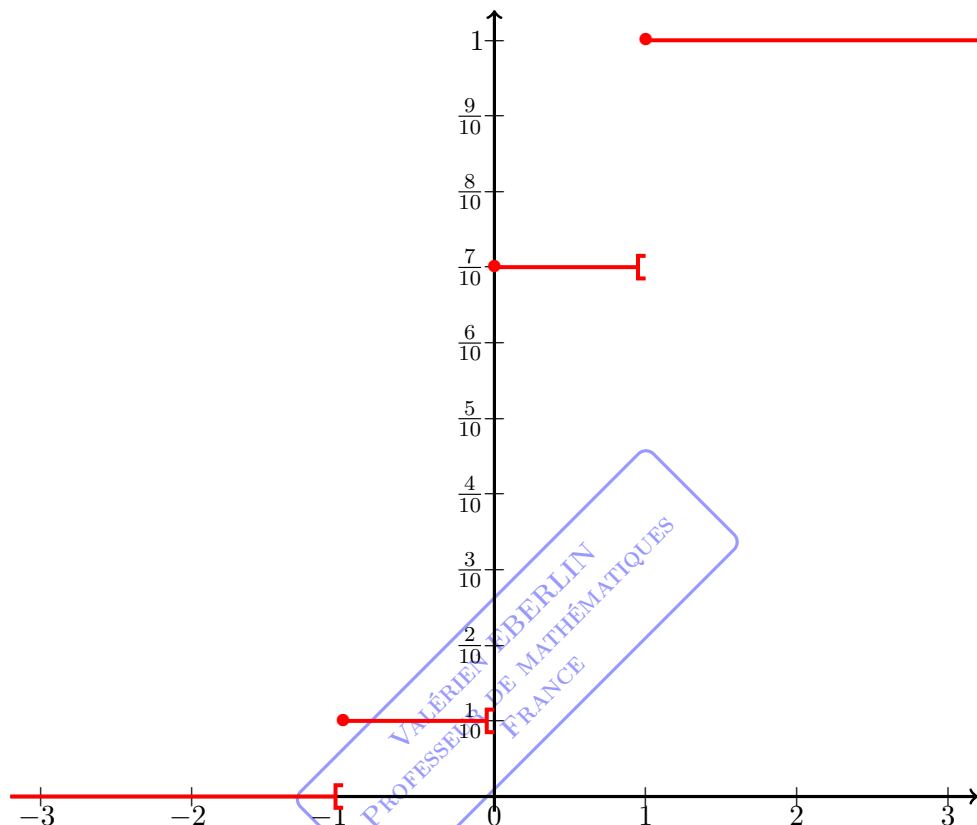
X	-1	0	1
p	$\frac{C_2^2 \cdot C_3^0}{C_5^2} = \frac{1}{10}$	$\frac{C_2^1 \cdot C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}$	$\frac{C_2^0 \cdot C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$

2 $E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = -1 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{6}{10} + 1 \times \frac{3}{10} = \frac{2}{10}.$

3 a. La fonction de répartition de la variable aléatoire X est donnée par le tableau :

X	$] -\infty; -1[$	$[-1; 0[$	$[0; 1[$	$[1; +\infty[$
$F_X(x)$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

b.



Exercice 2

1 On peut prendre pour polynôme de degré 3, le polynôme : $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$.

En remarquant que $\overline{z_2} = -z_1$, on a :

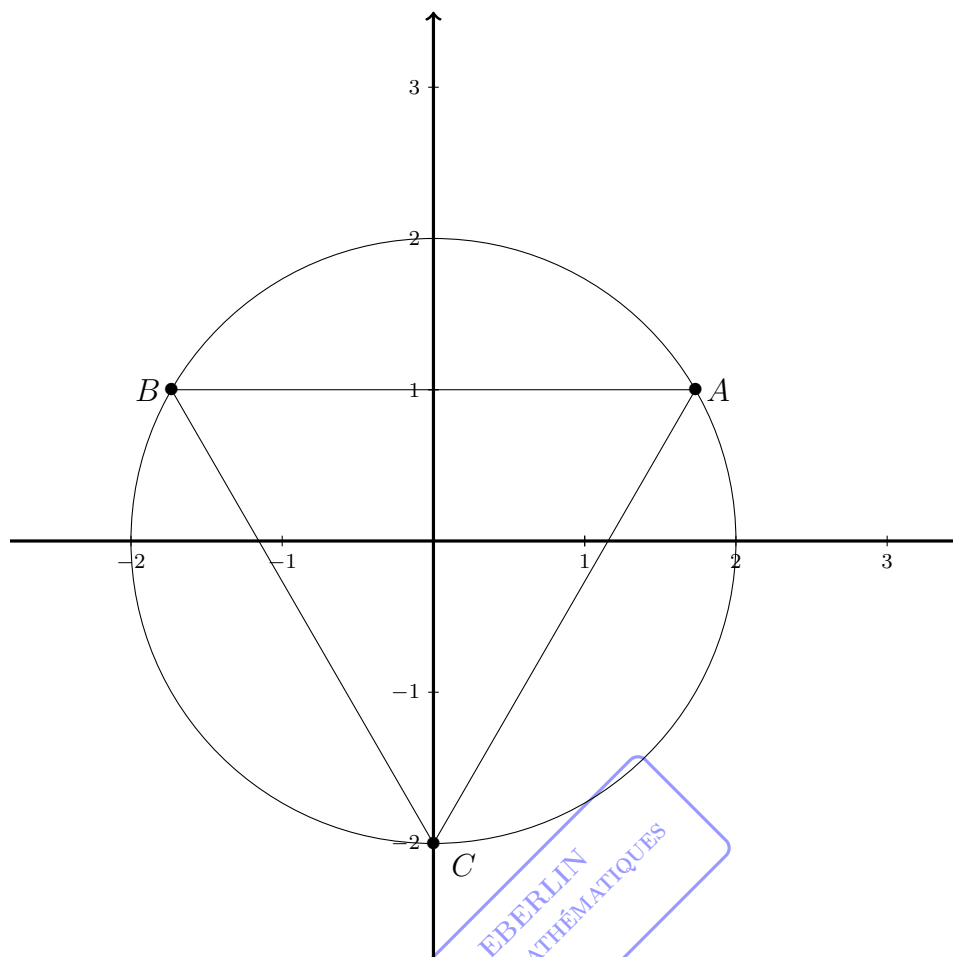
$$\begin{aligned}(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) &= (z - z_1)(z + \overline{z_1})(z - z_3) \\ &= (z^2 + (\overline{z_1} - z_1)z - |z_1|^2)(z - z_3) \\ &= (z^2 - 2iz - 4)(z - z_3) \\ &= z^3 + (-z_3 - 2i)z^2 + (2iz_3 - 4)z + 4z_3 \\ &= z^3 - 8i\end{aligned}$$

2 $\sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right).$

$$-\sqrt{3} + i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right).$$

$$-2i = 2 \times (-i) = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right).$$

3 a.



b. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi] \equiv \arg\left(\frac{-\sqrt{3} - 3i}{-2\sqrt{3}}\right) \equiv \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) [2\pi] \equiv \arg\left(\frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i}\right) \equiv \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

La somme des angles dans un triangle étant égale à 180° , on en déduit que l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

c. Le triangle ABC est équilatéral.

Problème

Partie A

1 La fonction g est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et on a : $g'(x) = \frac{2}{x}$.

$\forall x \in] -\infty; 0[, g'(x) < 0$.

La fonction g est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$.

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	0
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

2 $g(-1) = 2\ln(1) = 0$.

Signes de g

g est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$.

De plus, $g(-1) = 0$.

On en déduit que :

$g(x) > 0$ pour tout $x \in] -\infty; -1[$;

$g(x) < 0$ pour tout $x \in] -1; 0[$.

Partie B

1 La fonction $x \mapsto -2x + 1 + 2x \ln |x|$ existe pour tout $x < 0$.

La fonction $x \mapsto (x + 2)e^{-x} - 1$ existe pour tout $x \geq 0$.

Donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2 a. Continuité en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x + 1 + 2x \ln |x|) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((x + 2)e^{-x} - 1) = 1 = f(0).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, alors la fonction f est continue en 0.

Dérivabilité en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2 + 2 \ln |x|) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} + 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x} - 1}{x} = 1.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ n'est pas une valeur finie, on en déduit que f n'est pas dérivable en 0.

b. $|x| = -x$ si $x < 0$.

La fonction f s'écrit $f(x) = -2x + 1 + 2x \ln(-x)$ si $x < 0$.

$$\text{D'où : } \forall x \in]-\infty; 0[, \quad f'(x) = -2 + 2 \times \ln(-x) + 2x \times \frac{-1}{-x} = 2 \ln(-x) = g(x).$$

3

f est dérivable sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ et on a : $f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ -(x+1)e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On en déduit que :

- pour tout $x \in]-\infty; -1[$, $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $] -\infty; -1[$;
- pour tout $x \in]-1; 0[$, $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $] -1; 0[$.
- pour tout $x > 0$, $f'(x) = -(x+1)e^{-x} < 0$ et f est strictement décroissante sur $] 0; +\infty[$.

Tableau de variation

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln |x| \left(\frac{-2}{\ln |x|} + \frac{1}{x \ln |x|} + 2 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2)e^{-x} - 1] = -1.$$

x	$-\infty$	β	-1	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\searrow$	-1

4

Montrons qu'il existe α vérifiant $1 < \alpha < \frac{3}{2}$, solution de l'équation $f(x) = 0$

$$f(1) \approx 0,10 \text{ et } f\left(\frac{3}{2}\right) \approx -0,22.$$

La fonction f est continue, strictement décroissante sur $]1; \frac{3}{2}[$.

$$\text{De plus, } f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]1; \frac{3}{2}[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Montrons qu'il existe β vérifiant $-4 < \beta < -3$, solution de l'équation $f(x) = 0$

$f(-4) \approx -2,09$ et $f(-3) \approx 0,41$.

La fonction f est continue, strictement croissante sur $] -4; -3[$.

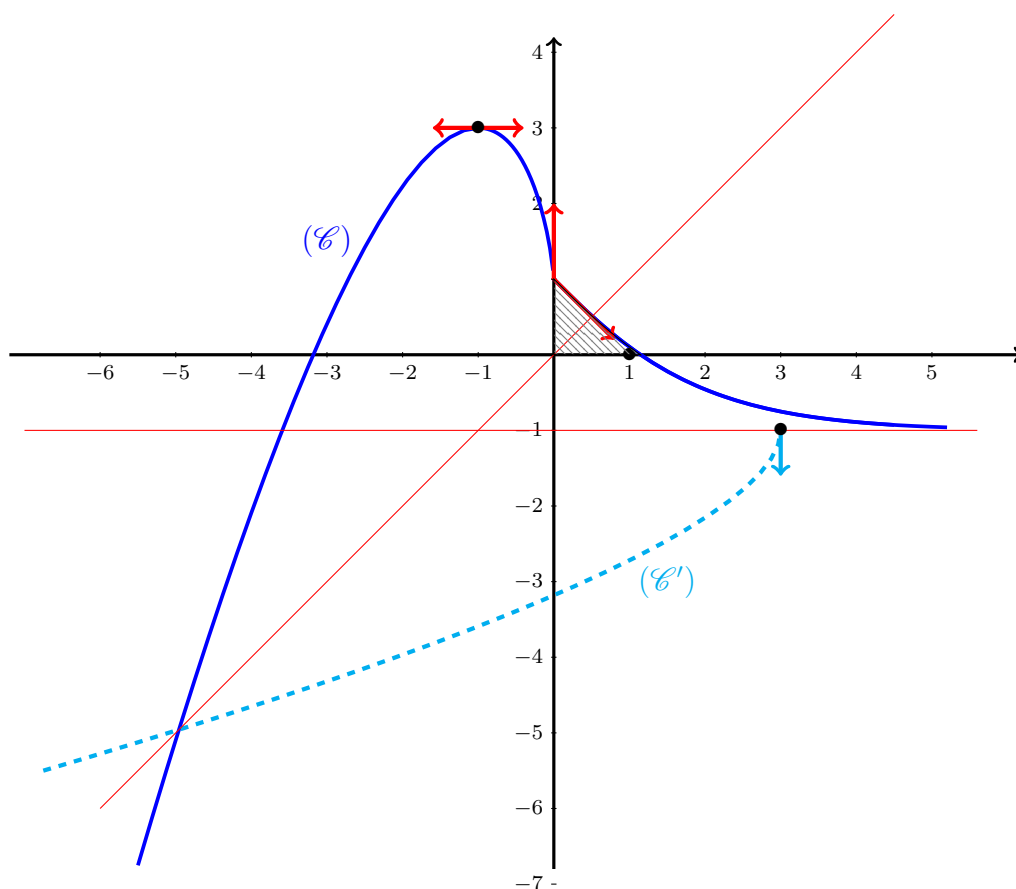
De plus, $f(-4) \times f(-3) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\beta \in] -4; -3[$ tel que $f(\beta) = 0$.

5 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{1}{x} + 2 \ln |x| \right) = +\infty$. La courbe $(\mathcal{C})$ admet une direction asymptotique de direction (Oy) en $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$. La courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$.

6



7 a. $\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^\alpha [f(x) - 0] dx = \int_0^\alpha [(x+2)e^{-x} - 1] dx = -\alpha + \int_0^\alpha (x+2)e^{-x} dx.$

Intégrons $\int_0^\alpha (x+2)e^{-x} dx.$

Si l'on choisit $\begin{cases} u(x) = x+2 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties :

$$\int_0^\alpha (x+2)e^{-x} dx = \left[-(x+2)e^{-x} \right]_0^\alpha + \int_0^\alpha e^{-x} dx.$$

$$\text{D'où } \mathcal{A}(\alpha) = \left[-(\alpha+3)e^{-\alpha} - \alpha + 3 \right] \text{ cm}^2.$$

b. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{A}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [-(\alpha + 3)e^{-\alpha} - \alpha + 3] = 0.$

Partie C

1 h est une fonction continue, strictement croissante sur $] -\infty; -1]$.

Donc h réalise une bijection de $] -\infty; -1]$ sur $] \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x); h(-1)] =] -\infty; 3]$.

J est l'intervalle $] -\infty; 3]$.

2

Comme h et h^{-1} ont le même sens de variation, on en déduit le tableau de variation de h^{-1} .

x	$-\infty$	3
$(h^{-1})'(x)$	+	
$h^{-1}(x)$	$-\infty$	-1