

Sujet bac 2019 - Série D

Exercice 1

5 points

- 1 On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$(E) : Z^2 - 4Z + 8 = 0$$

- a. Résoudre l'équation (E) .
- b. Écrire la solution dont la partie imaginaire est négative sous la forme trigonométrique.
- 2 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $2 - 2i$ et $2 + 2i$.
- a. Écrire sous forme algébrique, le complexe $U = \frac{Z_B}{Z_A}$.
- b. En déduire la nature du triangle OAB .
- 3 On considère l'application f du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}} Z$.
- a. Préciser la nature de f .
- b. Écrire sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique, l'affixe $Z_{A'}$ du point A' tel que $A' = f(A)$.
- c. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 2

5 points

L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B}(\vec{i}, \vec{j})$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ défini par son expression analytique : quelque soit le vecteur $\vec{u}(x, y)$ de $\mathcal{E}$, l'image de $\vec{u}$ par f est le vecteur $\vec{u}'(x', y')$ tel que :
$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$$

- 1 Déterminer $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$.
- 2 En déduire la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
- 3 Soit $\vec{V}(3; -4)$ un vecteur de $\mathcal{E}$.
Donner son image $\vec{V}'$ par l'endomorphisme f .
- 4 Montrer que f est un endomorphisme bijectif.
- 5 a. Calculer $f \circ f(\vec{i})$ et $f \circ f(\vec{j})$.
- b. En déduire la nature de f .
- c. Déterminer alors la base et la direction de f .

Exercice 3

7 points

Partie I

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique : 2 cm.

- 1 Calculer la dérivée $g'(x)$ et donner son signe sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 2 Sachant que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, dresser le tableau de variation de g .

Partie II

Dans le même repère défini dans la partie I, on considère la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$

- 1
 - a. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $f(x) = g(x)$.
 - b. En déduire la position relative des courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.
- 2
 - a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - b. Montrer que $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier son signe pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
 - c. Établir le tableau de variation de f .
- 3 En remarquant que les axes de coordonnées sont asymptotes aux courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$, tracer soigneusement ces deux courbes dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donné.

Partie III

On note h et k les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ et $k(x) = f(x) - g(x)$.

- 1 Démontrer que h est une primitive de k sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 2 Calculer en cm^2 , l'aire A de la portion du plan comprise entre les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 4

3 points

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	a	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	b

- 1 Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de a et b .

- 2** **a.** Déterminer les réels a et b tels que : $E(X) = \frac{3}{2}$.
 b. Calculer la variance de X et l'écart-type
- 3** Donner la fonction de répartition de X

VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
FRANCE

VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
FRANCE