

Sujet bac 2017 - Série D

Exercice 1

5 points

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ cm.
On considère le polynôme P défini par : $P(Z) = Z^3 + Z^2 - 2$.

- 1**
 - a. Montrer que 1 est une racine de $P(Z)$.
 - b. Vérifier que $P(Z)$ peut s'écrire sous la forme : $P(Z) = (Z - 1)(Z^2 + 2Z + 2)$.
 - c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$
- 2** On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
 $Z_A = 1$; $Z_B = -1 + i$; $Z_C = -1 - i$
 - a. Construire le triangle ABC .
 - b. Déterminer l'axe Z_D du point D telle que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- 3** Soit R la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$
 - a. Montrer que l'expression complexe de R est telle que :

$$Z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) Z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
 - b. Soit M et M' les points d'affixes respectives $Z = x + iy$ et $Z' = x' + iy'$.
Exprimer les coordonnées x' et y' du point M' en fonction de x et y .

Exercice 2

5 points

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan vectoriel $\mathcal{E}$, f désigne l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\begin{cases} 5f(\vec{i}) = a\vec{i} + 4\vec{j} \\ f(\vec{j}) = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j} \end{cases} \quad (1)$$

- 1** Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
- 2** Déterminer l'expression analytique de f .
- 3** Déterminer le réel a pour que f soit une symétrie vectorielle.
- 4** On pose $a = 3$.
 - a. Déterminer les éléments caractéristiques de f (base et direction).
 - b. Déterminer un vecteur directeur $(\vec{e}_1)$ de la base.
 - c. Déterminer un vecteur directeur $(\vec{e}_2)$ de la direction.
 - d. Soit $\vec{e}_1 = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j}$ deux vecteurs.
Démontrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
 - e. Donner la matrice de f relativement à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Exercice 3

7 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -\frac{1}{x} + \ln(x)$.

- 1** Calculer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
- 2**
 - a.** Calculer la dérivée g' de g sur $]0; +\infty[$.
 - b.** Dresser le tableau de variation de g .
- 3**
 - a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]\frac{3}{2}; 2[$.
 - b.** En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - (x - 1) \ln(x).$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1** Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
- 2**
 - a.** Montrer que la dérivée f' de f est $f'(x) = -g(x)$.
 - b.** Dresser le tableau de variation de f .

On prendra $\alpha = 1,7$ et $f(\alpha) = 1,3$.
- 3** On admet que l'équation $f(x) = 0$, admet deux solutions x_0 et x_1 avec $x_0 \in]\frac{1}{2}; 1[$ et $x_1 \in]\frac{7}{2}; 4[$.
 - a.** Étudier la branche infinie à $(\mathcal{C})$.
Remplacer la question par : « Étudier les branches infinies à $(\mathcal{C})$. »
 - b.** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.
- 4** Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ de la fonction h définie par $h(x) = -f(x)$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

Exercice 4

3 points

On rappelle que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau :

X	$] -\infty; x_1[$	$[x_1; x_2[$	$[x_2; x_3[$	$\dots$	$[x_n; +\infty[$
$F(X)$	0	P_1	$P_1 + P_2$	$\dots$	$P_1 + P_2 + \dots + P_n$

où P_i est la probabilité associée à la valeur x_i .

Soit la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X , définie par le tableau ci-après :

X	$] - \infty; 2[$	$[2; 3[$	$[3; 4[$	$[4; 5[$	$[5; 6[$	$[6; +\infty[$
$F(X)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{3}$	1

- 1 Donner les valeurs exactes prises par X .
- 2 Établir la loi de probabilité de X .
- 3 Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
FRANCE