

Sujet bac 2016 - Série D

Exercice 1 5 points

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application S définie par :

$$z' = (1 + i)z$$

- 1** Déterminer la nature, le rapport et l'angle de l'application S .
- 2** Soit le point A d'affixe $z_A = 2i$. Déterminer les affixes des points B et C définis par $S(A) = B$ et $S(B) = C$.
- 3** Placer les points A , B , et C dans un repère du plan.
- 4** Soit le point I milieu du segment $[OC]$. Montrer que le triangle ABI est rectangle et isocèle en B .
- 5** Écrire une équation de troisième degré dont les affixes z_A , z_B et z_C définies ci-dessus sont solutions.

Exercice 2 5 points

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ par :

$$f(\vec{j}) = 3\vec{i} - 2\vec{j} \quad \text{et} \quad f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$$

- 1** Calculer $f(\vec{i})$ et $f \circ f(\vec{i})$.
- 2** En déduire la nature de l'application f .
- 3**
 - a.** Qu'est ce qu'un automorphisme ?
 - b.** Prouver que f est un automorphisme involutif.
 - c.** Caractériser l'application f .
- 4** Soit les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = -3\vec{i} + \vec{j}$.
 - a.** Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
 - b.** Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3 7 points

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm, on considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

On note $(\mathcal{C})$, la courbe de f dans le plan.

- 1** Calculer les limites de f en 0 à droite et en $+\infty$.
- 2** Dédurre que la fonction f admet deux asymptotes que l'on précisera.

- 3** a. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$.
 b. Donner le sens de variation de f .
 c. Dresser son tableau de variation.
- 4** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ ainsi que ses asymptotes.
- 5** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = f(x)$.
 Construire la courbe $(\mathcal{C}')$ de g dans le même repère que $(\mathcal{C})$.
- 6** Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la portion du plan délimitée par les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 4

3 points

Soit le tableau statistique à double entrée :

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	1	m	1
1	1	0	2
2	2	3	n

- 1** Déterminer les lois marginales de X et de Y en fonction de n et m .
- 2** Déterminer m et n sachant que le point moyen du nuage statistique est $G(1; 1)$.
- 3** On pose $m = 1$ et $n = 1$.
 a. Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de Y en X sachant que la covariance de X et Y est égale à $-\frac{1}{12}$, la variance de X est $\frac{1}{2}$ et celle de Y est $\frac{1}{6}$.
 b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .