

Sujet bac 2015 - Série D

Exercice 1 5 points

On considère l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et on rappelle que $i^2 = -1$.

1 Déterminer les racines carrées du nombre complexe $u = 6 + 6i\sqrt{3}$.

2 Soit l'équation (E) définie dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$(E) : 4Z^3 - 6i\sqrt{3}Z^2 - (9 + 3i\sqrt{3})Z - 4 = 0$$

a. Vérifier que $Z_0 = -\frac{1}{2}$ est solution de l'équation (E) .

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

3 Le plan complexe $\mathbb{C}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les trois points A, B, C d'affixes respectives $Z_A = -\frac{1}{2}$, $Z_B = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $Z_C = 1 + i\sqrt{3}$.

a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C .

b. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S .

Exercice 2 5 points

Soit $\mathcal{E}$ le plan vectoriel rapporté à sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$.

On donne les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathcal{E}$ telle que $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ et $f(\vec{e}_2) = \vec{0}$.

1 Vérifier que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\mathcal{E}$.

2 Écrire la matrice de f dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

3 Soit $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ l'image de $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ par l'endomorphisme f telle que $f(\vec{u}) = \vec{u}'$.

a. Montrer que $f(\vec{i}) = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = -2\vec{i} - 2\vec{j}$.

b. Exprimer les coordonnées x' et y' de $\vec{u}'$ en fonction des coordonnées x et y de $\vec{u}$.

c. Calculer $f \circ f(\vec{u})$.

d. En déduire la nature de f .

e. Déterminer les caractéristiques de f .

Exercice 3 6 points

On considère la fonction numérique f à variable réelle x , définie telle que

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- 1 Montrer que f est définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
- 2 Vérifier que la dérivée f' de f est $f'(x) = \frac{-1 - \ln x}{(x \ln x)^2}$.
- 3
 - a. Étudier le signe de f' .
 - b. Dresser le tableau de variation de f .
 - c. Étudier les branches infinies à $(\mathcal{C})$.
 - d. Tracer $(\mathcal{C})$.
- 4
 - a. Montrer que f peut encore s'écrire $f(x) = \frac{1}{\frac{x}{\ln x}}$.
 - b. Calculer l'intégrale $I = \int_e^3 f(x)dx$.
 - c. En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ de f , l'axe (Ox) des abscisses et les droites d'équations $x = e$ et $x = 3$. Unité graphique : 2 cm.

Exercice 4

4 points

On considère la série statistique (x_i, y_j, n_{ij}) représentée par le tableau à double entrée suivant :

$X \backslash Y$	-1	1
-1	2	1
0	3	2
2	1	1

- 1 Déterminer les deux séries marginales.
- 2 Déterminer les coordonnées $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ du point moyen du nuage statistique.
- 3 Calculer l'inertie du nuage par rapport au point moyen G .
- 4 Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .