

Sujet bac 2014 - Série D

Exercice 1

5 points

- 1 Qu'appelle-t-on conjugué d'un nombre complexe ?
- 2
 - a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $(E) : Z^3 = 1$.
On donnera les résultats sous forme algébrique.
 - b. Justifier que les solutions sont deux à deux conjuguées.
Modification : Il s'agit plutôt de montrer que les solutions non réelles sont conjuguées entre elles.
- 3 Montrer que $Z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ est solution de l'équation $(E') : Z^3 = 8$.
- 4 Soit z'_0, z'_1, z'_2 les solutions de (E') où z'_1 et z'_2 sont deux complexes conjugués.
 - a Utiliser les solutions de (E) pour déduire les solutions de l'équation (E') .
 - b Montrer que $\frac{z'_1}{z'_2}$ est solution de (E) .

Exercice 2

5 points

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ qui associe à tout élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, l'élément (x', y', z') de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = x \end{cases}$$

- 1 Déterminer $f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$.
- 2 Déduire la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- 3
 - a. Quelles conditions faut-il remplir pour qu'un ensemble $\mathcal{E}$ soit un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
 - b. Montrer alors que l'ensemble $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- 4 Déterminer le noyau de f et en donner une base $(\vec{e}_1)$.
- 5 Déterminer l'image de f , puis une base de $\mathcal{B} = (\vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Exercice 3

7 points

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$, on considère la fonction g de la variable réelle x , définie par :

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - x$$

- 1 Préciser l'ensemble de définition de g .
- 2 Déterminer $g'(x)$, la fonction dérivée de g puis en déduire son signe.
- 3 Dresser le tableau de variation de g .
- 4 Démontrer que l'équation $\frac{e^x}{e^x+1} = x$ admet une solution unique $\alpha \in]-\infty; +\infty[$.
- 5 Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$. Unité graphique 2 cm.
 - a. Montrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $h'(x) > 0$
 - b. Dresser le tableau de variation de h .
 - c. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq h(x) \leq 1$.
- 6 On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$$
 - a. Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence que (u_n) est majorée par 1.
 - b. Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence que (u_n) est croissante.
 - c. En déduire la convergence de (u_n) , puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

Exercice 4

3 points

On considère la série statistique (x, y) définie par le tableau suivant :

$x \backslash y$	1	3
-1	1	2
0	0	a
2	2	0

- 1 Déterminer les séries marginales de x et y .
- 2 Déterminer le réel a pour que l'on ait $G\left(\frac{1}{6}, 2\right)$ où G désigne le point moyen de la série (x, y) .
- 3 On donne $a = 1$. Calculer la variance de x , la variance de y et la covariance de la série (x, y) .