# Sujet bac 2010 - Série D



## Exercice 1 — 4 points

Une urne contient deux boules blanches et trois boules noires toutes indiscernables au toucher.
On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne et on note leur couleur.
On définit sur l'univers $\Omega$ de cette expérience aléatoire, la variable aléatoire réelle $X$ par :

$X = -1$, si les deux boules tirées sont blanches ;

$X = 0$, si l'une est blanche et l'autre est noire ;

$X = 1$, si les deux boules tirées sont noires.

**1** Déterminer la loi de probabilité de $X$.

**2** Calculer l'espérance mathématique de $X$.

**3** **a.** Définir la fonction de répartition $F$ de $X$.

**b.** Tracer la courbe représentative de $F$ dans un repère orthogonal (on prendra 1 cm en abscisse et 5 cm en ordonnée pour unités graphiques).

## Exercice 2 — 4 points

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + i$ ; $z_2 = -\sqrt{3} + i$ et $z_3 = -2i$.

**1** Écrire une équation de degré 3 dont $z_1$, $z_2$ et $z_3$ sont solutions.

**2** Écrire les nombres complexes $z_1$, $z_2$ et $z_3$ sous la forme trigonométrique.

**3** **a.** Placer les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $z_1$, $z_2$ et $z_3$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

**b.** Montrer qu'une mesure de chacun des angles du triangle $ABC$ est $\frac{\pi}{3}$ radians.

**c.** En déduire la nature du triangle $ABC$.

## Problème — 12 points

### Partie A

VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
FRANCE

Soit $g$ la fonction de la variable réelle $x$ définie sur $]-\infty; 0[$ par :

$$g(x) = 2\ln(-x)$$

**1** Étudier les variations de $g$, puis dresser son tableau de variation.

**2** Calculer $g(-1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]-\infty ; 0[$.

# Partie B

On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 + 2x\ln|x| & \text{si } x < 0 \\ (x+2)\,\mathrm{e}^{-x} - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$, la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique : 1 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.
2. a. Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ au point $x = 0$.
   b. Pour $x \in ]-\infty\,; 0[$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
3. Étudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.
4. Montrer que qu'il existe deux solutions et deux seulement $\alpha$ et $\beta$ de l'équation $f(x) = 0$ vérifiant les inégalités suivantes :

$$1 < \alpha < \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad -4 < \beta < -3$$

(on ne cherchera pas à calculer $\alpha$ et $\beta$)

5. Étudier les branches infinies à $(\mathscr{C})$.
6. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.
7. $\alpha$ désigne le réel tel que : $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$
   **a.** Calculer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de l'ensemble des points M des coordonnées $(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

   **b.** Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque $\alpha$ tend vers 0.

# Partie C

Soit $h$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I = \big]-\infty\,; -1\big]$.

1. Montrer que $h$ définit une bijection de $I$ vers un intervalle $J$ à déterminer. On note $h^{-1}$ la réciproque de $h$.
2. Dresser le tableau de variation de $h^{-1}$.
3. Tracer $(\mathscr{H})$ la courbe représentative de $h^{-1}$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$.