

Sujet bac 2009 - Série D

Exercice 1 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le polynôme complexe p défini pour tout complexe z par :

$$p(z) = z^3 - 10iz^2 - (12 - 16i)z + 160 + 120i$$

- 1** Montrer que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution z_0 de la forme $i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
- 2** Déterminer les complexes a et b pour lesquels $p(z) = (z - 10i)(z^2 + az + b)$.
- 3** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $p(z) = 0$.
- 4** Soit I , J et K les points du plan complexe dont les affixes sont respectivement :
 $z_1 = -4 + 2i$; $z_2 = 4 - 2i$ et $z_3 = 10i$.
 - a.** Démontrer que l'écriture complexe de la similitude plane directe S telle que $S(K) = K$ et $S(J) = I$ est $z' = \frac{1}{2}(1 - i)z - 5 + 5i$.
 - b.** Donner les éléments caractéristiques de S (centre, rapport et une mesure de son angle).

Exercice 2 5 points

Le plan vectoriel $(\vec{\mathcal{P}})$ est rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Soit f un endomorphisme de $(\vec{\mathcal{P}})$ qui à tout vecteur $\vec{u}(x, y)$ associe $\vec{u}'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \\ y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \end{cases}$$

- 1** Démontrer que f est une symétrie vectorielle.
- 2** Déterminer sa base (ensemble des vecteurs invariants).
- 3** Déterminer sa direction (ensemble des vecteurs transformés en leur opposés).

Problème 5 points

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1 + \ln x}{x}$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = x^2 - \ln x$$

- 1 Dresser le tableau de variation de g .
- 2 En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie B

- 1
 - a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 - b. Dresser le tableau de variation de f .
 - c. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique à déterminer.
- 2 Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet deux branches infinies.
- 3
 - a. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.
 - b. Préciser la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (Δ) .
 - c. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (Δ) .

Partie C

- 1
 - a. Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
 - b. Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - c. Déterminer $(f^{-1})'(0)$.
- 2 Construire la courbe $(\mathcal{C}^{-1})$ de f^{-1} dans le même repère que $(\mathcal{C})$.
- 3
 - a. Déterminer l'aire de la partie du plan limitée par la courbes $(\mathcal{C})$, la droite $y = x - 2$ et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$, $x = m$ où m est un réel supérieur à 1.
 - b. Calculer la limite de cette aire en $+\infty$.