

Correction bac 2020 - Série C

Exercice 1

1

$$\begin{aligned}
2x - 7y = 3 &\iff 2x - 3 = 7y, \text{ avec } y \in \mathbb{Z} \\
&\iff 2x - 3 \text{ est un multiple de } 7 \\
&\iff 2x - 3 \equiv 0 [7] \\
&\iff 2x \equiv 3 [7]
\end{aligned}$$

D'où les équations (E_0) et (E_1) sont équivalentes.

2

Déterminons d'abord une solution particulière de l'équation $2x \equiv 3 [7]$

2 et -7 étant premiers entre eux, déterminons $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $2u - 7v = 1$.

De l'égalité $7 = 2 \times 3 + 1$, on en déduit que $2 \times (-3) - 7 \times (-1) = 1$.

En multipliant membre à membre l'égalité précédente par 3, on obtient : $2 \times (-9) - 7 \times (-3) = 3$.

On en déduit que $(-9, -3)$ est une solution particulière de (E_1) et on a $2 \times (-9) \equiv 3 [7]$.

Déterminons l'ensemble de solutions de l'équation (E_1)

$$\begin{cases} 2x \equiv 3 [7] \\ 2 \times (-9) \equiv 3 [7] \end{cases} \iff 2x \equiv 2 \times (-9) [7] \iff 2(x + 9) \equiv 0 [7] \iff 7 \text{ divise } 2(x + 9).$$

Comme 7 est premier avec 2, alors d'après le théorème de Gauss, 7 divise $x + 9$.

Il existe donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 9 = 7k$. D'où $x = -9 + 7k$.

Les solutions de l'équation (E_1) sont l'ensemble $\{-9 + 7k ; k \in \mathbb{Z}\}$.

3

En remplaçant x par $-9 + 7k$ dans l'équation (E_0) : $2x - 7y = 3$, on obtient : $y = -3 + 2k$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E_0) est l'ensemble $\{(-9 + 7k, -3 + 2k) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

4

a. $A = \{1; 5; 19; 95\}$.

b. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant le système :
$$\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ xy = 95 \end{cases}$$

Comme $2x - 7y = 3$, alors $2x - 7y > 0$. Donc $x > y$.

En utilisant 4. a., on en déduit que les solutions (x, y) de l'équation $xy = 95$ vérifiant $x > y$ appartiennent à l'ensemble : $I = \{(95, 1), (-1, -95), (-5, -19), (19, 5)\}$.

Déterminons le couple $(x, y) \in I$ solution de l'équation $2x - 7y = 3$

- $2 \times 95 - 7 \times 1 \neq 3$. Donc $(95, 1)$ n'est pas solution de l'équation $2x - 7y = 3$.
- $2 \times (-1) - 7 \times (-95) \neq 3$. Donc $(-1, -95)$ n'est pas solution de l'équation $2x - 7y = 3$.
- $2 \times (-5) - 7 \times (-19) \neq 3$. Donc $(-5, -19)$ n'est pas solution de l'équation $2x - 7y = 3$.
- $2 \times 19 - 7 \times 5 = 3$. Donc $(19, 5)$ est solution de l'équation $2x - 7y = 3$.

D'où $(19, 5)$ est le seul couple solution du système
$$\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ xy = 95 \end{cases}$$

Autre méthode

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant le système :
$$\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ xy = 95 \end{cases}$$

(x, y) vérifie $2x - 7y = 3$. D'après 3., (x, y) est de la forme $(-9 + 7k, -3 + 2k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Et, $(-9 + 7k, -3 + 2k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ vérifie $xy = 95$ si $(-9 + 7k)(-3 + 2k) = 95$ ou encore $14k^2 - 39k - 68 = 0$.

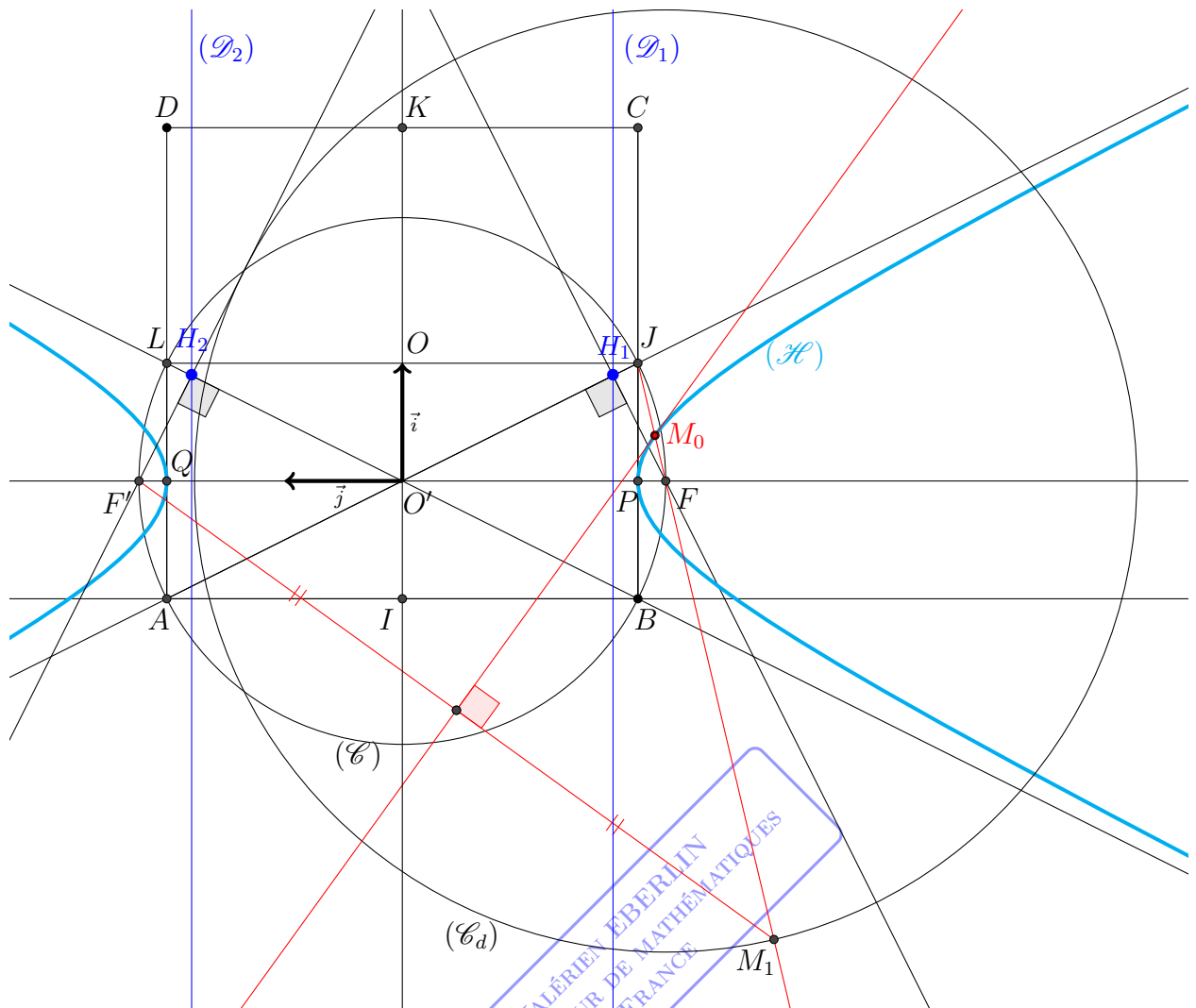
L'équation $14k^2 - 39k - 68 = 0$ admet dans $\mathbb{Z}$ une seule solution $k = 4$.

En remplaçant k par 4 dans $(-9+7k, -3+2k)$, on a $(-9+7\times 4, -3+2\times 4) = (19, 5)$.

Donc $(19, 5)$ est le seul couple solution du système $\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ xy = 95 \end{cases}$

Exercice 2

1



2 a. Déterminons le vecteur $\vec{u}$

$$f(D) = I.$$
$$f(D) = t_{\vec{u}} \circ S_{(OL)}(D) = t_{\vec{u}}(A).$$

On en déduit que $t_{\vec{u}}(A) = I$. D'où $\vec{u} = \vec{AI}$.

b. Déterminons $f(K)$

$$f(K) = t_{\vec{AI}} \circ S_{(OL)}(K) = t_{\vec{AI}}(I) = B.$$

- 3**
- a.** Les asymptotes de $(\mathcal{H})$ sont les droites (AJ) et (BL) .
 - b.** Les foyers sont les points d'intersection du cercle fondamental (cercle de centre O' et de rayon $O'J$) et de l'axe focal (PQ) .
 - c.** P et Q sont les sommets de l'hyperbole $(\mathcal{H})$.
 - d.** Le projeté orthogonal H_1 du foyer F sur la diagonale $[AJ]$ du rectangle fondamental $ABJL$ est un point de la directrice associé au foyer F .
D'où $(\mathcal{D}_1)$ est la perpendiculaire à (PQ) passant par H_1 .

De même, le projeté orthogonal H_2 du foyer F' sur la diagonale $[LB]$ du rectangle fondamental $ABJL$ est un point de la directrice associé au foyer F' .

D'où $(\mathcal{D}_2)$ est la perpendiculaire à (PQ) passant par H_2 .

- e.** Soit M_1 le point d'intersection de la demi-droite $[JF)$ et du cercle directeur $(\mathcal{C}_d)$ associé à F (cercle de centre F et de rayon $2 \times O'P$).

Alors, M_0 est le point d'intersection de la médiatrice de $[F'M_1]$ et du segment $[FJ]$.

En effet,

$$M_0F' - M_0F = M_0M_1 - M_0F = FM_1 = 2 \times O'P. \text{ Ce qui prouve que } M_0 \in (\mathcal{H}).$$

- f.** $O'P = 3$ et $O'J = \sqrt{OP^2 + PJ^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$.

$$\text{D'où l'excentricité } e = \frac{O'J}{O'P} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

- g.** Voir figure.

- 4**
- a.** $(O', \vec{j})$ et $(O', \vec{i})$ étant respectivement l'axe focal et l'axe non focal de $(\mathcal{H})$, on en déduit que l'équation cartésienne de $(\mathcal{H})$ est : $-\frac{x^2}{O'O^2} + \frac{y^2}{O'Q^2} = 1$.

$$\text{Or } O'O = \|\vec{i}\| = 1 \text{ et } O'Q = 2 \times \|\vec{j}\| = 2.$$

$$\text{D'où l'équation cartésienne de } (\mathcal{H}) : -\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \text{ ou encore } x^2 - \frac{y^2}{4} = -1.$$

- b.** Soit $M(x, y)$ un point de $(\mathcal{H})$ et H le projeté orthogonal de M sur la directrice $(\mathcal{D}_1)$ associé à F .

$$\text{Montrons que } \frac{MF}{MH} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

De l'équation $(\mathcal{H}) : -\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, on en déduit que l'hyperbole $(\mathcal{H})$:

- a pour sommets les points : $Q(0, 2)$, $P(0, -2)$;
- a pour foyers les points : $F'(0, \sqrt{5})$, $F(0, -\sqrt{5})$;
- pour directrices, les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ d'équations respectives $y = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ et $y = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

H a pour coordonnées : $H(x, -\frac{4}{\sqrt{5}})$.

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } MF^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 MH^2 &= x^2 + (y + \sqrt{5})^2 - \frac{5}{4} \left(y + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 \\
 &= x^2 + y^2 + 2\sqrt{5}y + 5 - \frac{5}{4} \left(y^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}y + \frac{16}{5}\right) \\
 &= x^2 - \frac{y^2}{4} + 4 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{MF}{MH} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Donc l'excentricité $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3

1 a. f' est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{x^2 - 4}{2x} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x}.$$

b. f' est du signe de la fonction : $x \mapsto x - 2$ sur $]0; +\infty[$.

Limites de f aux bornes de $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{1}{4} - 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} - \frac{2 \ln x}{x^2} \right) = +\infty.$$

D'où le tableau de variation :

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{4} - 2 \ln 2$	$+\infty$

c. $f(3) \approx -0,197$ et $f(4) \approx 0,977$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]3; 4[$.

De plus $f(3) \cdot f(4) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in [3; 4]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

2 a. Remarquons d'abord que si $x \geq 3$, $8 \ln x + 1 > 0$.

On a :

$$f(x) = 0 \iff \frac{x^2 - 1}{4} = 2 \ln x$$

$$\iff x^2 = 8 \ln x + 1$$

$$\iff x = \sqrt{8 \ln x + 1} \quad (\text{le cas } x = -\sqrt{8 \ln x + 1} \text{ est impossible car } x \geq 3)$$

D'où les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = x$ sont équivalentes sur $[3; +\infty[$.

b. g est continue et dérivable sur $[3; 4]$.

De plus, $|g'(x)| \leq \frac{4}{9}$ pour tout $x \in [3; 4]$.

D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall x \in [3; 4], \forall y \in [3; 4], |g(x) - g(y)| \leq \frac{4}{9}|x - y|$$

Comme $\alpha \in [3; 4]$, on peut appliquer l'inégalité précédente en x quelconque où $x \in [3; 4]$ et en $y = \alpha$.

On a alors :

$$\forall x \in [3; 4], |g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{4}{9}|x - \alpha|$$

Or d'après 2. a., $g(\alpha) = \alpha$. Il en résulte que : $\forall x \in [3; 4], |g(x) - \alpha| \leq \frac{4}{9}|x - \alpha|$.

3 a. Soit $\mathcal{P}_n$, la propriété : $u_n \in [3; 4]$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$.

Initialisation

$u_0 = 3 \in [3; 4]$.

Comme $u_0 \in [3; 4]$, alors d'après 2. b., $u_1 = g(u_0) \in [3; 4]$.

Les propriétés $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vérifiées.

Hérédité

Supposons $\mathcal{P}_n$ c'est à dire supposons que : $u_n \in [3; 4]$.

Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que : $u_{n+1} \in [3; 4]$.

On a $u_n \in [3; 4]$.

On en déduit d'après 2. b., que $g(u_n) \in [3; 4]$.

Or $g(u_n) = u_{n+1}$. D'où $u_{n+1} \in [3; 4]$.

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On peut appliquer l'inégalité obtenue en 2.b., en $x = u_n$ (car $u_n \in I$).

On a alors :

$$|g(u_n) - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$$

Or $g(u_n) = u_{n+1}$. Il en résulte que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Soit $\mathcal{P}_n$, la propriété : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$.

Initialisation

Comme $3 \leq \alpha \leq 4$, alors $-1 \leq u_0 - \alpha \leq 0$ donc $|u_0 - \alpha| \leq 1 = \left(\frac{4}{9}\right)^0$.

La propriété $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

Hérédité

Supposons $\mathcal{P}_n$ c'est à dire supposons que : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$.

D'après 3. b. $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$, et par hypothèse de récurrence, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Ainsi, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha| \leq \frac{4}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$.

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Par passage à la limite, $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$.

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

e. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-2}$.

Par croissance de la fonction logarithme, on a : $n \ln \frac{4}{9} \leq -2 \ln 10$.

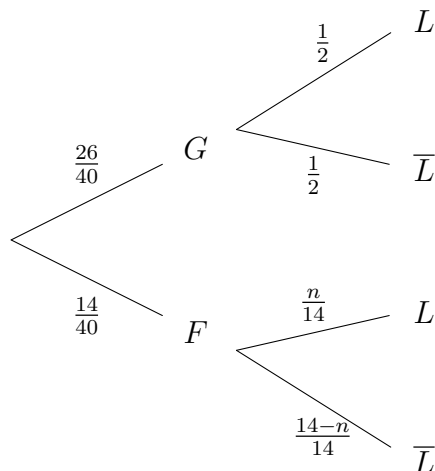
D'où $n \geq \frac{2 \ln 10}{\ln 9 - \ln 4} (\approx 5,67)$.

Donc $n_0 = 6$.

Exercice 4

1 $P(G) = \frac{26}{40}; P(F) = \frac{14}{40}$.

2



3 Première solution

13 garçons et n filles sur un effectif total de 40 élèves sont inscrits dans un centre d'apprentissage de langues.

Donc la probabilité L qu'une personne choisie soit inscrite dans un centre d'apprentissage de langues est de $\frac{13+n}{40}$.

Seconde solution

D'après l'arbre réalisé en 2., on en déduit que :

$$P(L) = \frac{26}{40} \times \frac{1}{2} + \frac{14}{40} \times \frac{n}{14} = \frac{13+n}{40}.$$

4

Les événements L et G sont indépendants $\Leftrightarrow P_G(L) = P(L)$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{13+n}{40}$
 $\Leftrightarrow n = 7$

VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
FRANCE