

Correction bac 2019 - Série C

Exercice 1

- 1** Déterminons le PGCD de 109 et 226 par l'algorithme d'Euclide donne :

$$226 = 109 \times 2 + 8$$

$$109 = 8 \times 13 + 5$$

$$8 = 5 \times 1 + 3$$

$$5 = 3 \times 1 + 2$$

$$3 = 2 \times 1 + \boxed{1}$$

$$2 = 1 \times 2 + 0$$

Le PGCD étant le dernier reste non nul, il est donc égal à 1.

- 2** $\text{PGCD}(109; 226)=1$. D'après le théorème de Bézout, l'équation $109x - 226y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- 3** $109 \times 141 = 15369 = 1 + 226 \times 68 \equiv 1 [226]$.
D'où 141 est l'inverse de 109 modulo 226.

- 4** a.

$$\begin{aligned} 109x - 226y = 1 &\iff 109x - 1 = 226y, \text{ avec } y \in \mathbb{Z} \\ &\iff 109x - 1 \text{ est un multiple de } 226 \\ &\iff 109x - 1 \equiv 0 [226] \\ &\iff 109x \equiv 1 [226] \end{aligned}$$

Les équations (E) et (E') sont équivalentes.

- b.** 141 est une solution particulière de l'équation $109x \equiv 1 [226]$.

Soit x une solution de l'équation $109x \equiv 1 [226]$,

$$\begin{cases} 109x \equiv 1 [226] \\ 109 \times 141 \equiv 1 [226] \end{cases} \iff 109x \equiv 109 \times 141 [226] \iff 109(x - 141) \equiv 0 [226]$$

$$\iff 226 \text{ divise } 109(x - 141).$$

Comme 226 est premier avec 109, alors d'après le théorème de Gauss, 226 divise $x - 141$.

Il existe donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 141 = 226k$. D'où $x = 141 + 226k$.

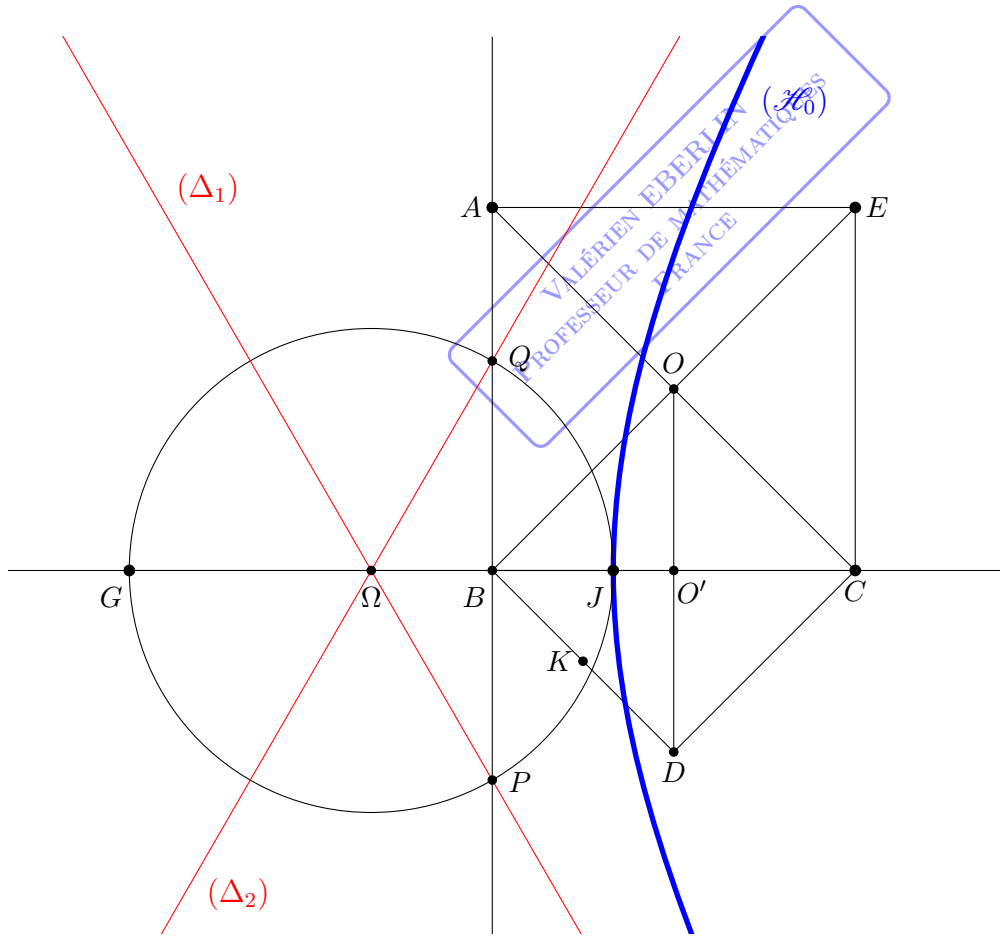
Les solutions de l'équation (E') sont l'ensemble $\{141 + 226k; k \in \mathbb{Z}\}$.

- c.** En remplaçant x par $141 + 226k$ dans l'équation (E) : $109x - 226y = 1$, on obtient :
 $y = 68 + 109k$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble $\{(141 + 226k, 68 + 109k); k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2

1



- 2** a. Le centre de rotation de f est le point d'intersection des médiatrices des segments $[OD]$ et $[AC]$. C'est le point B .
- b. Comme $f(B) = B$ et $f(A) = C$, alors $\theta = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.
- c. $S_{(BA)} \circ S_{(BO)}$ est la rotation de centre B et d'angle $2 \times \overline{((BO), (BA))} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
D'où $S_{(BA)} \circ S_{(BO)}$ est la réciproque de f .
- 3** a. Comme g est la composée d'une symétrie axiale et d'une rotation dont le centre n'appartient pas à l'axe de la symétrie, alors g est une symétrie glissée.
- b. $g(B) = S_{(OD)} \circ R_{(B, \frac{\pi}{2})}(B) = S_{(OD)}(B) = C$.
 $g(C) = S_{(OD)} \circ R_{(B, \frac{\pi}{2})}(C) = S_{(OD)}(A) = E$.
- c. $g \circ g(B) = g(C) = E$.
 g est une symétrie glissée telle que $g \circ g(B) = E$, on en déduit que le vecteur $\vec{u}$ de g vérifie $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BO}$.
- d. Comme $g(B) = C$ alors l'axe de g est la droite dirigée par $\overrightarrow{BO}$ et passant par le milieu O' du segment $[BC]$. C'est par conséquent la droite (KO') .
- e.

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma) &\iff g(M) = f^{-1}(M) \\ &\iff S_{(OD)}\left(R_{(B, \frac{\pi}{2})}(M)\right) = R_{(B, \frac{\pi}{2})}(M) \text{ car } f^{-1} \text{ est la rotation de centre } B \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2} \\ &\iff R_{(B, \frac{\pi}{2})}(M) \in (OD) \\ &\iff M \in R_{(B, \frac{\pi}{2})}^{-1}((OD)) = R_{(B, -\frac{\pi}{2})}((OD)) \end{aligned}$$

(Γ) est alors la droite $R_{(B, -\frac{\pi}{2})}((OD))$. C'est par conséquent une droite perpendiculaire à (OD) .

Comme $R_{(B, -\frac{\pi}{2})}(O) = D$, on en déduit que (Γ) est la droite perpendiculaire à (OD) passant par le point D .

- 4 a.** Soit S un sommet de l'hyperbole $(\mathcal{H})$, d'excentricité 2.

$$\frac{SC}{SB} = 2 \iff SC^2 - 4SB^2 = 0 \iff (\overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{SB}) \cdot (\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SB}) = 0.$$

Comme les points B, C et S sont alignés, alors $\overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{SB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SB} = \vec{0}$.

Déterminons S tel que $\overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{SB} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SB} \iff \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{SB} \iff \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{BC}. \text{ D'où } S = G.$$

Donc G est le premier sommet de l'hyperbole $(\mathcal{H})$.

Déterminons S tel que $\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SB} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{SC} = -2\overrightarrow{SB} \iff \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{SB} \iff \overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}. \text{ D'où } S = J \text{ par définition du point } J.$$

Donc J est le second sommet de l'hyperbole $(\mathcal{H})$.

- b.** Le centre Ω est le milieu du segment $[GJ]$.

- c.** Les asymptotes sont données par les droites (ΩP) et (ΩQ) où P et Q sont les points d'intersection du cercle principal et de la directrice (BA) (voir figure).

- d.** Voir figure ci-dessus.

- e.** Soit (x, y) les coordonnées d'un point M de $(\mathcal{H})$ dans le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $H(0, y)$ le projeté orthogonal de M sur la directrice (BA) .

Le foyer C a pour coordonnée $C(1, 0)$.

$$M \in (\mathcal{H}) \iff \frac{MC}{MH} = 2$$

$$MC^2 = 4MH^2 \iff (1-x)^2 + y^2 = 4x^2.$$

D'où l'équation cartésienne de $(\mathcal{H})$: $3x^2 + 2x - y^2 - 1 = 0$.

Exercice 3

- 1** L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = 0$ est $r^2 + 3r + 2 = 0$. Elle admet deux racines distinctes : $r_1 = -2$ et $r_2 = -1$.

Donc la solution générale est : $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$ où c_1, c_2 sont des constantes réelles quelconques.

- 2** h est de la forme $h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$ avec $h'(0) = 1$.

$$\begin{cases} h(0) = 1 \\ h'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -e^{-2x} + 2e^{-x}$.

- 3 a.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{-2x} + 2e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-2x}(1 - 2e^x) = -\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-2x} + 2e^{-x}) = 0$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{-2x}(1 - e^x)$.

c. $f'(x)$ est du signe de $1 - e^x$ et s'annule pour $x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

d. D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	1	0

e. $f(x) = 0 \iff e^{-2x}(-1 + 2e^x) = 0 \iff -1 + 2e^x = 0 \iff x = -\ln 2$.

Le point d'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses est le point $(-\ln 2, 0)$.

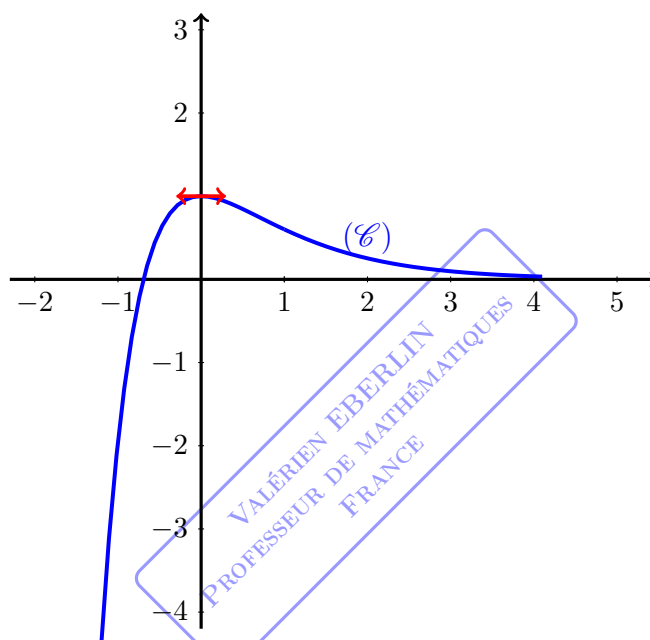
f.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-2x} + 2e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-2x}}{x} (1 - 2e^x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{2u}}{u} (1 - 2e^{-u}) = +\infty$$

où l'on a posé $u = -x$.

La courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

g.

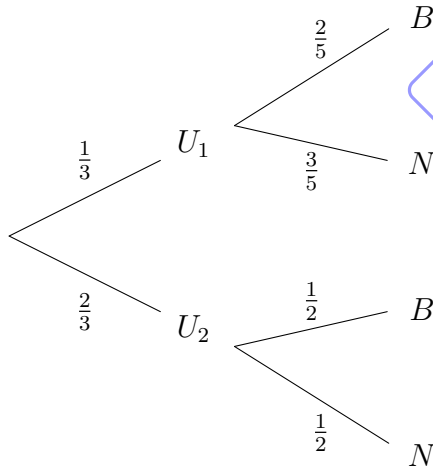


Exercice 4

1 a. $p(\mathcal{U}_1) = p(\text{« obtenir 1 ou 2 sur la face supérieure du dé »}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

b. $p(\mathcal{U}_2) = 1 - p(\mathcal{U}_1) = \frac{2}{3}.$

2



3 $p(\mathcal{N}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{15}.$

4 $p(\mathcal{U}_1/\mathcal{N}) = \frac{p(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{N})}{p(\mathcal{N})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{8}$

VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
FRANCE