

Correction bac 2017 - Série C

Exercice 1

a Comme $\text{PGCD}(48; 35) = 1$, d'après le théorème de Bézout, l'équation $(E) : 48x + 35y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b $48 \times (-8) = -384 = 1 + 35 \times (-11) \equiv 1 [35]$.

D'où 48 et -8 sont inverses modulo 35.

c

$$48x + 35y = 1 \iff 48x - 1 = 35(-y), \text{ avec } y \in \mathbb{Z}$$

$$\iff 48x - 1 \text{ est un multiple de } 35$$

$$\iff 48x - 1 \equiv 0 [35]$$

$$\iff 48x \equiv 1 [35]$$

Les équations $(E) : 48x + 35y = 1$ et $48x \equiv 1 [35]$ sont équivalentes.

Solution particulière

D'après la question **b.**, $48 \times (-8) + 35 \times 11 = 1$.

D'où $(-8; 11)$ est une solution particulière de l'équation (E) .

d -8 est une solution particulière de l'équation $48x \equiv 1 [35]$.

Soit x une solution de l'équation $48x \equiv 1 [35]$,

$$\begin{cases} 48x \equiv 1 [35] \\ 48 \times (-8) \equiv 1 [35] \end{cases} \iff 48x \equiv 48 \times (-8) [35] \iff 48(x + 8) \equiv 0 [35] \iff 35 \text{ divise } 48(x + 8).$$

Comme 35 est premier avec 48, alors d'après le théorème de Gauss, 35 divise $x + 8$.

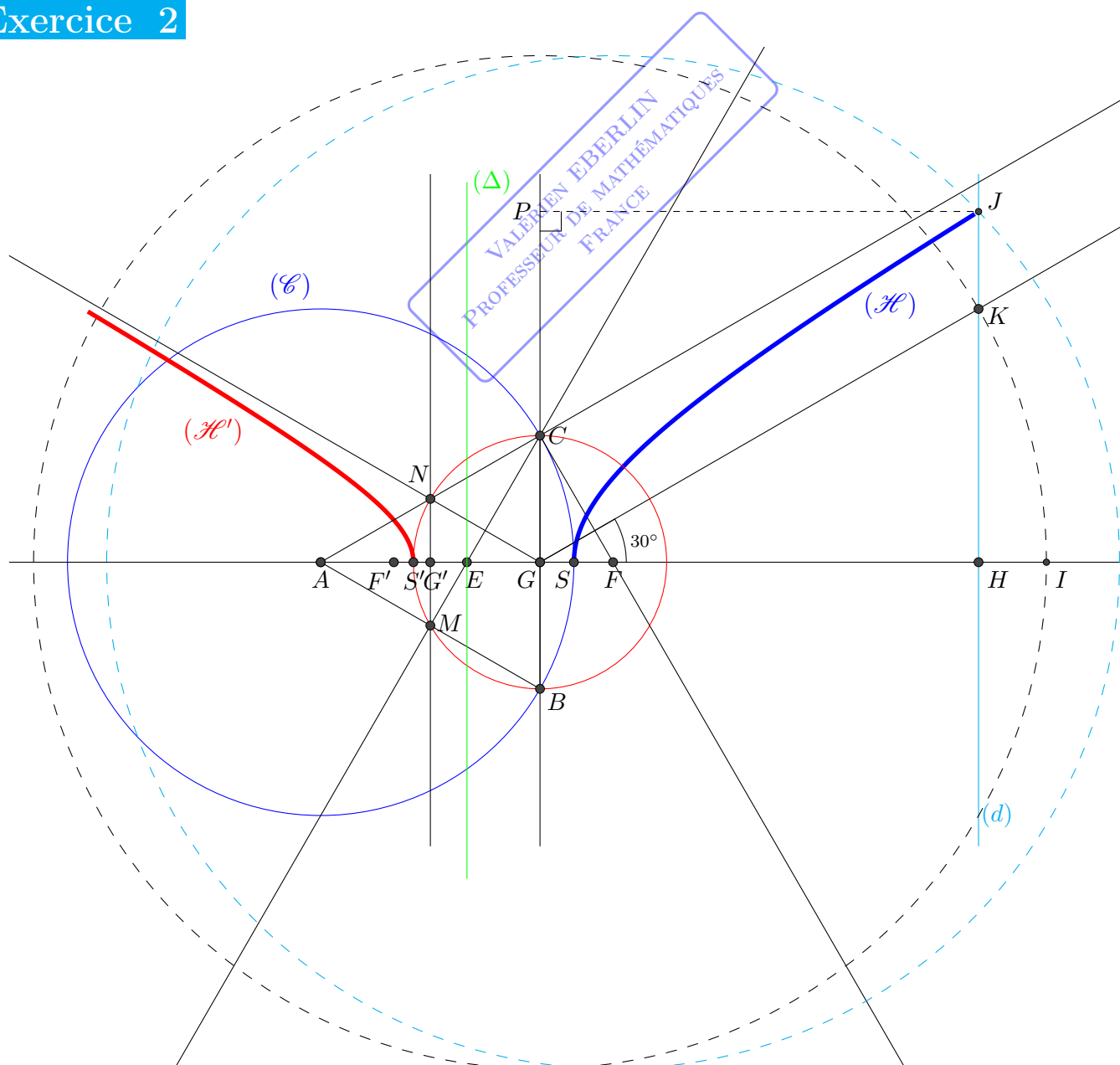
Il existe donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 8 = 35k$. D'où $x = -8 + 35k$.

Les solutions de l'équation $48x \equiv 1 [35]$ sont l'ensemble $\{-8 + 35k ; k \in \mathbb{Z}\}$.

En remplaçant x par $-8 + 35k$ dans l'équation $(E) : 48x + 35y = 1$, on obtient $y = 11 - 48k$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble $\{(-8 + 35k ; 11 - 48k) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2



- 4** $EA = EC$ car E est le centre de gravité du triangle ABC .
 $EA = EF$ car F est le symétrique de A par rapport à E .
 On en déduit que $[EC]$ est la médiane relative au $[AF]$ et a pour longueur la moitié de la longueur de $[AF]$.
 Donc le triangle ACF est rectangle en C et par conséquent les droites (CF) et (CA) sont perpendiculaires.
- 5** Axe focal
 A étant le centre l'hyperbole, l'axe focal est la perpendiculaire à la directrice (BC) passant par A . C'est par conséquent la droite (AG) .
 F Foyer de (Γ)
 C est un point d'intersection du cercle principal et de la directrice (BC) .
 On en déduit que la droite (AC) est une asymptote de l'hyperbole (Γ) .

Or C est également le projeté orthogonal du point F de l'axe focal (AG) sur l'asymptote (AC) . Donc F est un foyer de l'hyperbole (Γ) .

6 a. Voir la figure ci-dessus.

b. $\frac{AF}{AB} = \frac{c}{a}$ représente l'excentricité de l'hyperbole (Γ) .

Dans le triangle ABF rectangle en B , on a :

$$\cos(\widehat{FAB}) = \cos(30^\circ) = \frac{AB}{AF}. \quad \text{D'où } \frac{AF}{AB} = \frac{1}{\cos(30^\circ)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

7 Soit K , le point d'intersection de la perpendiculaire à (AH) passant par H et de la parallèle à (AC) passant par G .

$$\cos(\widehat{HGK}) = \cos(30^\circ) = \frac{GH}{GK}. \quad \text{D'où } GK = \frac{2\sqrt{3}}{3}GH.$$

Le point I est donc le point d'intersection du cercle de centre G de rayon GK et de la demi-droite $[GH)$.

8 Comme $J \in (\Gamma)$, alors $\frac{JF}{JP} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ où P est le projeté orthogonal de J sur la directrice (BC) .

$$\text{Or } JP = GH \text{ et d'après 7., on a : } \frac{2\sqrt{3}}{3}GH = GI.$$

$$\text{On en déduit que } JF = \frac{2\sqrt{3}}{3}JP = \frac{2\sqrt{3}}{3}GH = GI$$

J est donc le point d'intersection de la droite (d) et du cercle de centre F de rayon GI .

9 Voir figure.

10 a.

Notons l'homothétie h par $h_{(A, \frac{1}{2})}$ et notons $h_{(\Omega, k)}$, l'homothétie de centre Ω et de rapport k .

Centre de la similitude $h_{(A, \frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}$

G est aussi le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) .

Soit Ω , le centre de la similitude s et (Δ) son axe.

Alors s s'écrit aussi en la composée commutative $s = h_{(\Omega, \frac{1}{2})} \circ S_{(\Delta)} = S_{(\Delta)} \circ h_{(\Omega, \frac{1}{2})}$.

D'où $s \circ s = h_{(\Omega, \frac{1}{4})}$.

On a :

$$s(A) = h_{(A, \frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}(A) = G$$

$$s \circ s(A) = h_{(A, \frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}(G) = h_{(A, \frac{1}{2})}(G) = G' \text{ où } G' \text{ est le milieu de } [AG].$$

On en déduit que $h_{(\Omega, \frac{1}{4})}(A) = G'$.

$$\text{Ou encore } \overrightarrow{\Omega G'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega A}.$$

$$\text{En utilisant la relation de Chasles, on a : } \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AG'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega A}.$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{\Omega G} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}.$$

Donc $\Omega = E$.

Axe de la similitude $s = h_{(A, \frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}$

L'axe de la similitude (Δ) est la perpendiculaire à la droite (AG) passant par E .

b. Foyer de $(\mathcal{H}')$

$$s(F) = h_{(E, \frac{1}{2})} \circ S_{(\Delta)}(F) = h_{(E, \frac{1}{2})}(A) = F' \text{ où } F' \text{ est le milieu de } [AE].$$

Comme F est le foyer de $(\mathcal{H})$, alors F' , milieu de $[AE]$, est le foyer de $(\mathcal{H}')$.

Directrice de $(\mathcal{H}')$

$$s(B) = h_{(A, \frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}(B) = h_{(A, \frac{1}{2})}(B) = M \text{ où } M \text{ est le milieu de } [AB].$$

$$s(C) = h_{(A, \frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}(C) = h_{(A, \frac{1}{2})}(C) = N \text{ où } N \text{ est le milieu de } [AC].$$

Comme (BC) est la directrice de $(\mathcal{H})$ associé au foyer F , alors (MN) est la directrice de $(\mathcal{H}')$ associée au foyer F' .

Asymptote de $(\mathcal{H}')$

$$s(A) = G \text{ et } s(C) = N.$$

Comme (AC) est l'asymptote de l'arc $(\mathcal{H})$, alors (GN) est l'asymptote de l'arc $(\mathcal{H}')$.

Sommet de $(\mathcal{H}')$

$$s(A) = G \text{ et } s(C) = N.$$

Comme le cercle $(\mathcal{C})$ de centre A de rayon $[AC]$ est le cercle principal de $(\mathcal{H})$, alors le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre G et de rayon GN est le cercle principal de $(\mathcal{H}')$.

On en déduit que S' , point d'intersection de $(\mathcal{C}')$ et de l'axe focal est le sommet de $(\mathcal{H}')$ associé à F' .

c. Toute similitude conserve le rapport des distances.

On en déduit que l'excentricité de (Γ') est égale à l'excentricité de (Γ) et vaut $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 3**1 a.** La fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est continue et $1 \in I$.

Alors la fonction $x \mapsto F(x) = \int_1^x f(t) dt$ est dérivable sur I et on a : $\forall x \in I$
 $F'(x) = f(x)$.

b.

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x+1)$	0	+	+
$x-1$		-	0
$F'(x) = f(x)$	0	-	0

- $\forall x \in]0; 1[, f(x) < 0$ et F est strictement décroissante.
- $\forall x \in]1; +\infty[, f(x) > 0$ et F est strictement croissante.

2

L'inégalité $F(x) \geq \frac{1}{2}(x-1)^2$ pour $x \geq 2$ est fausse. En effet, en intégrant par parties $F(x)$, on trouve : $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}\right) \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} - 2 \ln 2$.

D'où $F(x) - \frac{1}{2}(x-1)^2 = \left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}\right) \ln(x+1) - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{4} - 2 \ln 2$.

Le tableau des valeurs de $F(x) - \frac{1}{2}(x-1)^2$ réalisé à l'aide d'un tableur, pour x allant de 2 à 2.9 avec un pas de 0.05, montre que $F(x) - \frac{1}{2}(x-1)^2 < 0$ pour au moins les valeurs de x comprises entre 2 et 2.8.

B2		fx = (0,5*(A2)*A2-(A2)-1,5)*LN((A2)+1)-0,75*(A2)*A2+2,5*(A2)+0,75-2*LN(2)			
	A	B	C	D	E
1	Valeur de x	"Valeur de F(x)-1/2*(x-1)^2"			
2	2	-0,284212794			
3	2,05	-0,278730741			
4	2,1	-0,272100307			
5	2,15	-0,264254395			
6	2,2	-0,255127398			
7	2,25	-0,244655138			
8	2,3	-0,232774812			
9	2,35	-0,219424938			
10	2,4	-0,204545301			
11	2,45	-0,188076913			
12	2,5	-0,169961959			
13	2,55	-0,150143759			
14	2,6	-0,12856673			
15	2,65	-0,105176339			
16	2,7	-0,079919076			
17	2,75	-0,052742411			
18	2,8	-0,023594766			
19	2,85	0,007574517			
20	2,9	0,040815211			

Cependant, l'on peut établir que $F(x) \geq F(2) + \frac{x^2}{2} - x$, ce qui permettra de répondre aux questions suivantes.

a. Montrons que : $\forall x \geq 2, F(x) \geq F(2) + \frac{x^2}{2} - x$

Soit $x \geq 2$.

Comme $f(t) \geq t - 1$ pour tout $t \geq 2$.

Alors par passage à l'intégrale, on a : $\int_2^x f(t) dt \geq \int_2^x (t-1) dt$.

En ajoutant membre à membre l'expression $\int_1^2 f(t) dt$ à la dernière inégalité, on a :

$$\int_1^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \geq \int_1^2 f(t) dt + \int_2^x (t-1) dt.$$

Il en résulte que $F(x) \geq F(2) + \frac{x^2}{2} - x$ pour tout $x \geq 2$.

b. Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

$$\forall x \geq 2, F(x) \geq F(2) + \frac{x^2}{2} - x.$$

Par passage à la limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(F(2) + \frac{x^2}{2} - x \right).$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(F(2) + \frac{x^2}{2} - x \right) = +\infty.$ On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty.$

Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}.$

$$\forall x \geq 2, F(x) \geq F(2) + \frac{x^2}{2} - x.$$

Alors : $\forall x \geq 2, \frac{F(x)}{x} \geq \frac{1}{x} \left(F(2) + \frac{x^2}{2} - x \right).$

Par passage à la limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(F(2) + \frac{x^2}{2} - x \right).$

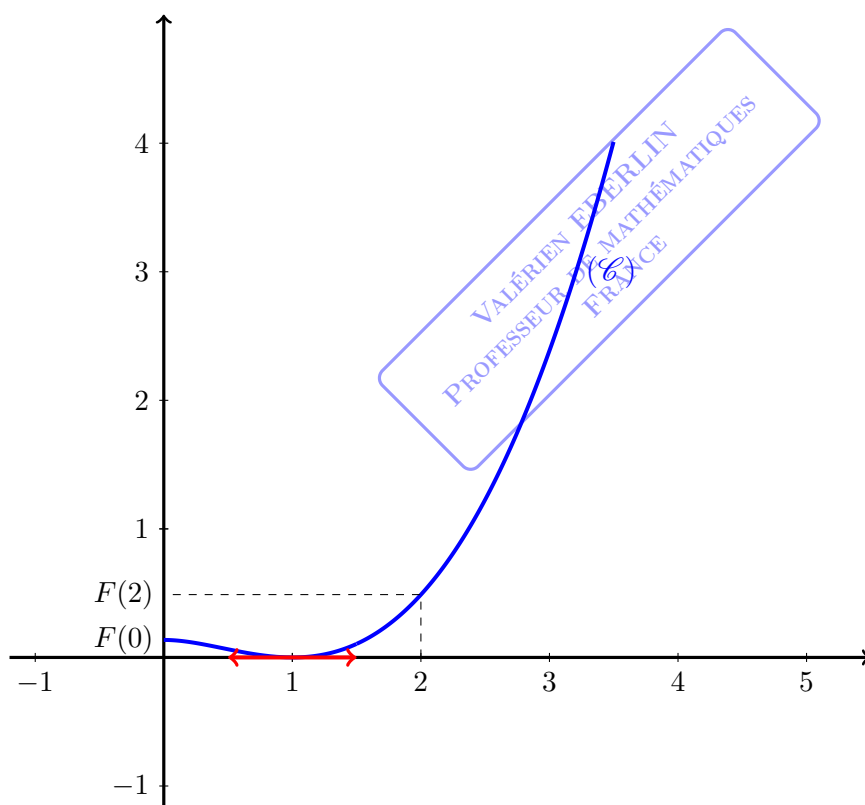
Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(F(2) + \frac{x^2}{2} - x \right) = +\infty.$ On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty.$

La courbe ($\mathcal{C}$) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

c.

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$	0	—	0	+	
$F(x)$	$F(0)$				

d.



3 a. $F(n+1) - F(n) = \int_1^{n+1} f(t) dt - \int_1^n f(t) dt = \int_n^1 f(t) dt + \int_1^{n+1} f(t) dt = \int_n^{n+1} f(t) dt.$

D'où $u_n = F(n+1) - F(n).$

- b.** Erreur dans l'énoncé : l'encadrement $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$ n'est pas vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, on n'a pas $f(0) \leq u_0 \leq f(1)$ puisque

$$f(0) = 0; f(1) = 0 \text{ et } u_0 = \int_0^1 f(t) dt = - \int_1^0 f(t) dt = -F(0) \neq 0$$

Montrons d'abord que f est croissante sur $[n, n+1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in [n, n+1], \quad f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} > 0.$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $[n, n+1]$.

Montrons que $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

F est continue et dérivable sur $[n, n+1]$.

De plus, $F'(n) \leq F'(x) \leq F'(n+1)$ pour tout $x \in [n, n+1]$ car F' est croissante.

Or $F' = f$. D'où $f(n) \leq F'(x) \leq f(n+1)$ pour tout $x \in [n, n+1]$.

D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall x \in [n, n+1], \forall y \in [n, n+1] \text{ tels que } x \leq y, \quad f(n)(y-x) \leq F(y) - F(x) \leq f(n+1)(y-x)$$

Ainsi, on peut appliquer l'inégalité précédente en $x = n$ et $y = n+1$.

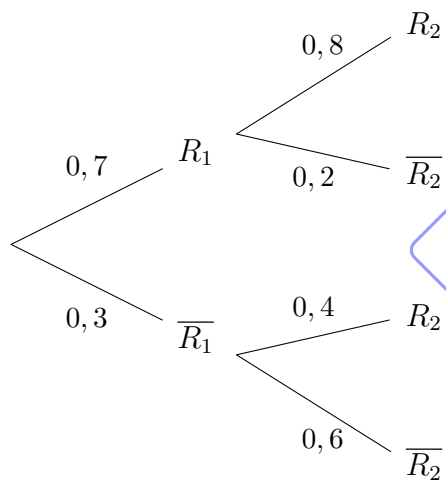
On a alors :

$$f(n)((n+1) - n) \leq F(n+1) - F(n) \leq f(n+1)((n+1) - n).$$

D'où $f(n) \leq u_n \leq f(n+1).$

Exercice 4

1



2 $p(R_1 \cap R_2) = 0,7 \times 0,8 = 0,56.$

3 $p(R_2) = 0,7 \times 0,8 + 0,3 \times 0,4 = 0,68.$

4 $p(A) = 0,7 \times 0,2 + 0,3 \times 0,4 = 0,26.$