

Correction bac 2016 - Série C

Exercice 1

- 1** L'algorithme d'Euclide donne :

$$3024 = 2688 \times 1 + \boxed{336}$$

$$2688 = 336 \times 8 + 0$$

Le PGCD étant le dernier reste non nul est donc égal à 336.

Comme $\text{PGCD}(2688; 3024) = 336$, alors il existe des couples (u, v) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $2688u + 3024v = 336$.

En multipliant membre à membre l'égalité précédente par -10 , on a :

$2688(-10u) + 3024(-10v) = -3360$. On en déduit que les couples $(-10u, -10v)$ sont des solutions de l'équation (E) .

Donc l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- 2** $2688x + 3024y = -3360 \iff \frac{2688}{336}x + \frac{3024}{336}y = -\frac{3360}{336} \iff 8x + 9y = -10$.

On en déduit que les équations (E) et (E_1) sont équivalentes.

- 3 a.**

$$8x + 9y = -10 \iff 8x + 10 = 9(-y), \text{ avec } y \in \mathbb{Z}$$

$$\iff 8x + 10 \text{ est un multiple de } 9$$

$$\iff 8x + 10 \equiv 0 [9]$$

$$\iff 8x \equiv -10 [9]$$

D'où les équations (E_1) et (E_2) sont équivalentes.

- b.** 1 est une solution particulière de l'équation (E_2) : $8x \equiv -10 [9]$. En effet, $8 \times 1 = -10 + 9 \times 2 \equiv -10 [9]$.

Soit x une solution de l'équation (E_2) ,

$$\begin{cases} 8x \equiv -10 [9] \\ 8 \times 1 \equiv -10 [9] \end{cases} \iff 8x \equiv 8 \times 1 [9] \iff 8(x-1) \equiv 0 [9] \iff 9 \text{ divise } 8(x-1).$$

Comme 9 est premier avec 8, alors d'après le théorème de Gauss, 9 divise $x-1$.

Il existe donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x-1 = 9k$. D'où $x = 1 + 9k$.

Les solutions de l'équation (E_2) sont l'ensemble $\{1 + 9k ; k \in \mathbb{Z}\}$.

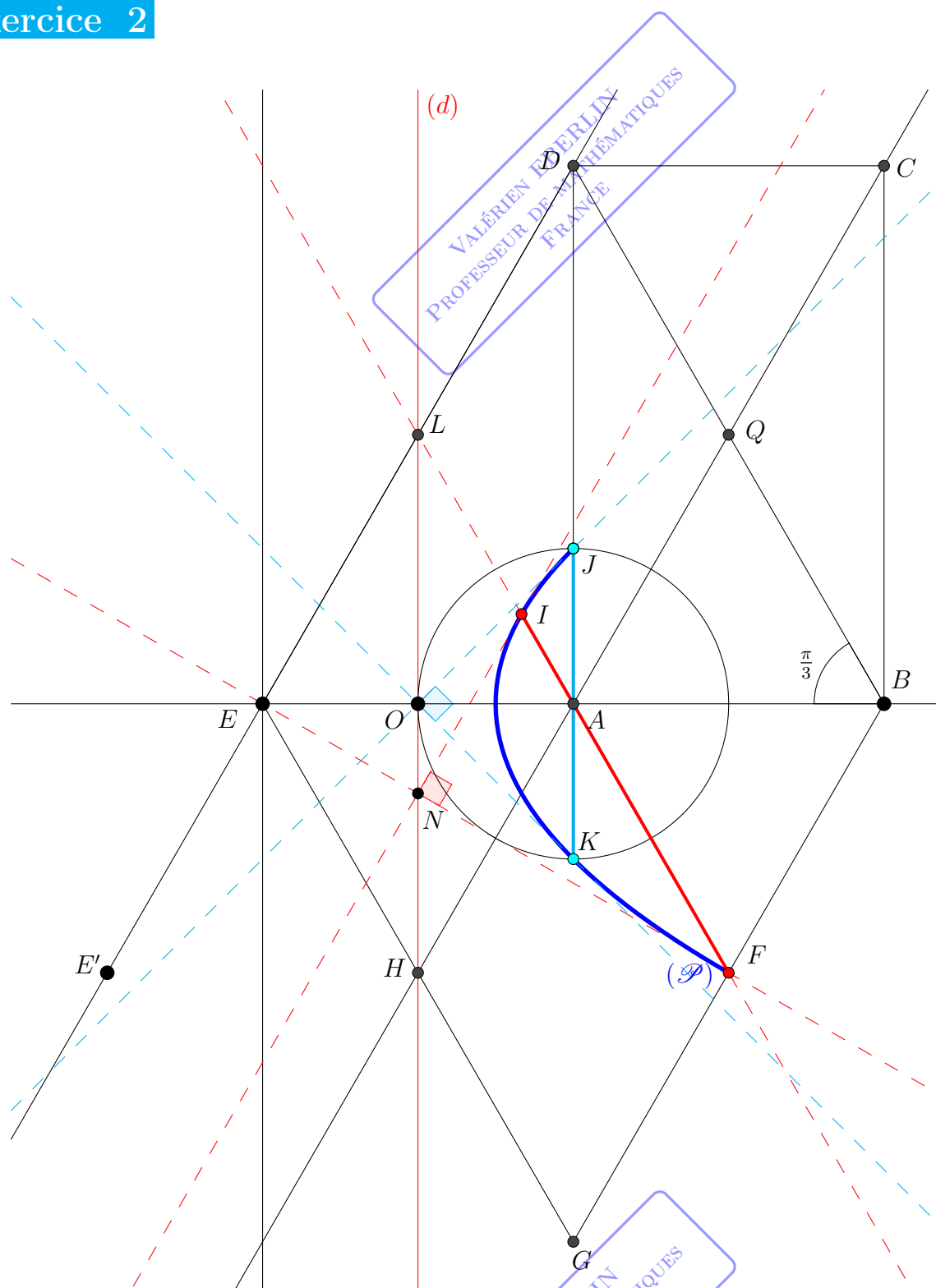
- c.** En remplaçant x par $1 + 9k$ dans l'équation $8x + 9y = -10$, on obtient : $y = -2 - 8k$.

Les solutions de l'équation (E_1) sont l'ensemble $S = \{(1 + 9k ; -2 - 8k) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

Les équations (E) et (E_1) étant équivalentes, on en déduit que S est également l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

Exercice 2

1



- 2** $g = S_{(AB)} \circ S_{(BD)}$ est la rotation de centre B et d'angle $2 \times ((BD), (BA)) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$
- 3** Comme g est la composée d'une symétrie axiale et d'une rotation dont le centre n'appartient pas à l'axe de la symétrie, alors g est une symétrie glissée.
- 4** **a.** Les transformations f et $t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$ ne sont pas égales
En effet, soit Q , le centre du rectangle $ABCD$.
 $f(Q) = S_{(AD)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BD)}(Q) = S_{(AD)} \circ S_{(AB)}(Q) = S_{(AD)}(F) = H.$

Mais $t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}(Q) = t_{\overrightarrow{BF}}(Q) = A$.

D'où $f \neq t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$.

Montrons plutôt que $S_{(AD)} \circ R = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$.

Première solution

$$\begin{aligned} S_{(AD)} \circ R &= S_{(AD)} \circ R \\ &= S_{(AD)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(BG)} \\ &= t_{\overrightarrow{BE}} \circ S_{(BG)} \\ &= t_{\overrightarrow{BF}} \circ t_{\overrightarrow{FE}} \circ S_{(BG)} \\ &= t_{\overrightarrow{BF}} \circ \underbrace{S_{(AC)} \circ S_{(BG)} \circ S_{(BG)}}_{t_{\overrightarrow{FE}}} \\ &= t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)} \end{aligned}$$

Deuxième solution

$S_{(AD)} \circ R$ est la composée d'une symétrie axiale et d'une rotation dont le centre n'appartient pas à l'axe de symétrie. C'est donc une symétrie glissée.

Posons $u = S_{(AD)} \circ R$.

On a : $u(B) = S_{(AD)} \circ R(B) = S_{(AD)}(B) = E$ et $u(E) = S_{(AD)} \circ R(E) = S_{(AD)}(G) = G$.

D'où $u \circ u(B) = G$.

On en déduit que le vecteur de u est $\frac{1}{2}\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF}$.

De plus, comme $u(B) = E$, alors l'axe de u est la droite dirigée par $\overrightarrow{BF}$ passant par le milieu de $[BE]$. C'est par conséquent la droite (AC) .

D'où $S_{(AD)} \circ R = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$.

b. L'axe (AC) étant dirigé par $\overrightarrow{BF}$, $S_{(AD)} \circ R_{(B, \frac{\pi}{3})}$ est une symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{BF}$ et d'axe (AC) .

5 La tangente et la normale à la parabole $(\mathcal{P})$ en F , coupent l'axe focal en deux points E et B . Donc le foyer de la parabole $(\mathcal{P})$ est le milieu de $[EB]$. D'où A est le foyer de $(\mathcal{P})$.

6 H est le symétrique du foyer A de la parabole $(\mathcal{P})$ par rapport à la tangente (EF) à $(\mathcal{P})$. On en déduit que H est un point de la directrice (d) .

D'où (d) est la perpendiculaire à l'axe focal (EB) passant par H . C'est par conséquent la droite (HL) .

7 Les tangentes en les deux extrémités d'une corde focale d'une parabole sont sécantes en un point de la directrice et sont perpendiculaires.

Construction du point I

Soit N le point d'intersection de la tangente (FE) et de la directrice (d) .

Le point I de $(\mathcal{P})$ est le point d'intersection de la demi-droite $[FA)$ et de la perpendiculaire à la droite (EF) en N .

8 Soit O le point d'intersection de l'axe focal (EB) et de la directrice (d) .

J et K sont symétriques par rapport à (EB) et les tangentes en J et en K à $(\mathcal{P})$ sont sécantes en O et sont perpendiculaires.

Constructions de J et K

Les points J et K sont donc les points d'intersection de la droite (AD) et du cercle de centre A et de rayon AO .

9 Voir figure ci-dessus.

10 a.

$$\begin{aligned} f &= S_{(AD)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BD)} = S_{(AD)} \circ g \\ &= \underbrace{S_{(AD)} \circ R \circ R}_{= t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}} \circ R \\ &= t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)} \circ R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } f(A) &= t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)} \circ R(A) \\ &= t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}(F) \\ &= t_{\overrightarrow{BF}}(E) \end{aligned}$$

Comme A est le foyer de la parabole $(\mathcal{P})$, alors le foyer de la parabole $(\mathcal{P}')$ est le point E' tel que $BFE'E$ soit un parallélogramme.

b.

$$f(A) = E' \in (ED).$$

$$f(B) = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)} \circ R(B) = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}(B) = t_{\overrightarrow{BF}}(L) = E.$$

Comme (AB) est l'axe focal $(\mathcal{P})$, alors (ED) est le foyer de la parabole $(\mathcal{P}')$.

Exercice 3

1 L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$ est : $r^2 + 2r + 2 = 0$. Elle admet deux racines distinctes : $r_1 = -1 - i$ et $r_2 = -1 + i$.

On en déduit que la solution générale est : $y(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ où c_1, c_2 sont des constantes réelles quelconques.

La solution particulière f est de la forme $f(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ avec $f(\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}}$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$.

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} \\ f'(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} \sin x$.

2 a.

F est une primitive de f si : $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$.

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, (-A + B) \cos x + (-A - B) \sin x = \sin x$.

Par identification, $-A + B = 0$ et $-A - B = 1$.

$$\text{D'où } A = B = -\frac{1}{2}.$$

$$F \text{ est la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par } F(x) = -\frac{e^{-x}(\cos x + \sin x)}{2}.$$

$$\text{b. } \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) dx = \left[-\frac{e^{-x}(\cos x + \sin x)}{2} \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \frac{e^{-\pi}+1}{2} (-e^{-\pi})^n.$$

$$\text{3 a. } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{e^{-\pi}+1}{2} (-e^{-\pi})^{n+1}}{\frac{e^{-\pi}+1}{2} (-e^{-\pi})^n} = -e^{-\pi}.$$

(v_n) est une suite géométrique de raison $-e^{-\pi}$ et de premier terme $v_0 = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$.

$$\text{b. } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{e^{-\pi}+1}{2} (1 + (-e^{-\pi}) + \dots + (-e^{-\pi})^n) = \frac{1}{2} (1 - (-e^{-\pi})^{n+1}).$$

Comme $|-e^{-\pi}| = e^{-\pi} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-e^{-\pi})^{n+1} = 0$. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 4

1 Tableau linéaire associé :

X	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
Y	-1	-1	2	3	-1	-1	2	2	2	3

2 Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable X, et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable Y.

Dans ce cas, on a : $\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N.

Série marginale de X

X	1	2
$n_{i\bullet}$	4	6

Série marginale de Y

Y	-1	2	3
$n_{\bullet j}$	4	4	2

$$V(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^2 n_{i\bullet} x_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{10} [4 \times 1^2 + 6 \times 2^2] - 1,6^2 = 0,24.$$

$$V(Y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^3 n_{\bullet j} y_j^2 - \bar{Y}^2 = \frac{1}{10} [4 \times (-1)^2 + 4 \times 2^2 + 2 \times 3^2] - 1^2 = 2,8.$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 n_{ij} x_i y_j - \bar{X} \bar{Y} \\ &= \frac{1}{10} (2 \times (-1) + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times (-2) + 3 \times 4 + 1 \times 6) - 1,6 \times 1 \\ &= 0,1 \end{aligned}$$

D'où le coefficient de corrélation entre X et Y :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}} = \frac{0,1}{\sqrt{0,24} \times \sqrt{2,8}} = 0,1219$$

- 3** D'après 1. et sachant que $\bar{X} = 1,6$ et $\bar{Y} = 1$, les vecteurs centrés ont pour coordonnées :
 $X - \bar{X} = (-0,6; -0,6; -0,6; -0,6; 0,4; 0,4; 0,4; 0,4; 0,4);$
 $Y - \bar{Y} = (-2; -2; 1; 2; -2; -2; 1; 1; 2).$

Le cosinus de l'angle formé par les vecteurs centrés $X - \bar{X}$ et $Y - \bar{Y}$ est donné par la relation : $\cos \left(\widehat{(X - \bar{X}), (Y - \bar{Y})} \right) = \rho_{X,Y}.$

D'où cet angle vaut : $\left(\widehat{(X - \bar{X}), (Y - \bar{Y})} \right) = \cos^{-1}(0,1219) \approx 83^\circ.$