

Correction bac 2014 - Série C

Exercice 1

- 1** L'équation $(E) : Z^2 - (2ie^{i\theta} \cos \theta)Z - e^{i2\theta} = 0$ admet pour discriminant réduit :
- $$\Delta' = (ie^{i\theta} \cos \theta)^2 - 1 \times (-e^{i2\theta}) = e^{2i\theta}(-\cos^2 \theta + 1) = (e^{i\theta} \sin \theta)^2.$$

On en déduit que les racines de l'équation (E) sont alors :

$$Z_1 = \frac{ie^{i\theta} \cos \theta - e^{i\theta} \sin \theta}{1} = e^{i\theta} i (\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\theta} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\theta)}.$$

$$Z_2 = \frac{ie^{i\theta} \cos \theta + e^{i\theta} \sin \theta}{1} = e^{i\theta} i (\cos \theta - i \sin \theta) = e^{i\theta} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

2 a. $\arg \left(\frac{Z_B - Z_0}{Z_A - Z_0} \right) = \arg \left(\frac{e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\theta)}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} \right) = \arg(e^{i2\theta}) \equiv 2\theta [2\pi]$

b. Comme $\overrightarrow{(OA, OB)} \equiv \arg \left(\frac{Z_B - Z_0}{Z_A - Z_0} \right) [2\pi]$, alors $2\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. D'où $\theta \equiv \frac{\pi}{4} [\pi]$.

L'ensemble des valeurs de θ est $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c.

$$\begin{aligned} Z_A + Z_B &= e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\theta)} = e^{i\frac{\pi}{2}} (1 + e^{i2\theta}) = e^{i\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} (2 \cos^2 \theta + i 2 \sin \theta \cos \theta) \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{2}} \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{2}} \cos \theta e^{i\theta} \\ &= 2 \cos \theta e^{i(\frac{\pi}{2} + \theta)} \end{aligned}$$

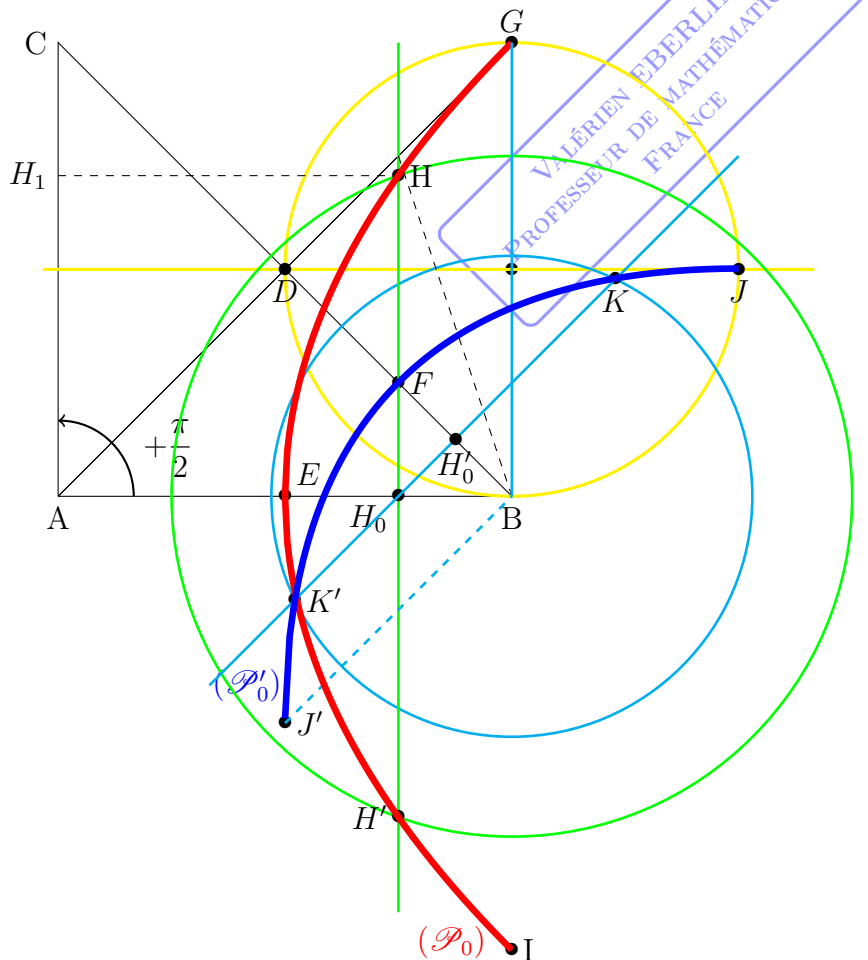
On a : $|Z_A + Z_B| = |2 \cos \theta| = 2 \cos \theta$ car $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

On en déduit que $2 \cos \theta e^{i(\frac{\pi}{2} + \theta)}$ est la forme exponentielle de $Z_A + Z_B$.

Donc la forme exponentielle de $\overline{Z_A + Z_B}$ est $2 \cos \theta e^{-i(\frac{\pi}{2} + \theta)}$.

Exercice 2

1



- 2** a. On appelle paramètre p d'une parabole, la distance du foyer de cette parabole à sa directrice.
- b. AB étant la distance du foyer B à la directrice (AC) , alors $\alpha = AB = 6$ cm.
- 3** a.
- B est le foyer de $(\mathcal{P})$;
 - $G \in (\mathcal{P})$ car C est le projeté orthogonal de G sur la directrice (AC) et $GB = GC$.
 - De plus, (AG) est la médiatrice de $[BC]$.

Donc (AG) est la tangente à $(\mathcal{P})$ en G .

- b.** Notons H_1 le projeté orthogonal de H sur la directrice (AC) et H_0 le milieu de $[EB]$. On a : $HH_1 = H_0A$. Or $HH_1 = HB$ car $H \in (\mathcal{P})$. Donc $HB = H_0A$. On en déduit que H est l'un des points d'intersection de la médiatrice du segment $[EB]$ et du cercle de centre B de rayon H_0A (voir la construction en vert ci-dessous).
- c.** $E \in (\mathcal{P})$. Les points G et H ainsi que leurs symétriques I et H' par rapport à l'axe focal (AB) sont des points de $(\mathcal{P})$. À partir de ces 5 points, on obtient une allure de l'arc $(\mathcal{P}_0)$.

4 S est la similitude de centre B , de rapport $K = \frac{BA}{BD} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}$ et d'angle $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

5 Comme $S(B) = B$ et $S(J) = G$, alors $BG = \sqrt{2}BJ$ et $(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BG}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

On en déduit que le triangle BJG est rectangle isocèle en J .

J est donc le point d'intersection du cercle de diamètre $[BG]$ et de la médiatrice de $[BG]$ tel que l'angle $(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BG})$ soit orienté positivement (voir construction en jaune).

6 Pour construire l'arc $(\mathcal{P}_0)$, on applique le même procédé que celui utilisé pour construire l'arc $(\mathcal{P}_0)$ (voir 3.b.).

Soit H'_0 , le milieu de $[BF]$. Les points d'intersections K et K' du cercle de centre B de rayon $[H'_0D]$ et de la médiatrice de $[BF]$ appartiennent à $(\mathcal{P}')$.

À l'aide des cinq points, K , K' , F , J et J' où J' est le symétrique de J par rapport à l'axe focal (BD) , on construit une allure de l'arc $(\mathcal{P}_0)$.

7 Toute similitude de rapport k multiplie l'aire de sa transformée par k^2 .

Comme S est une similitude de rapport $\sqrt{2}$ et que $S((\mathcal{E}'_0)) = (\mathcal{E}_0)$, alors $A_0 = (\sqrt{2})^2 A'_0 = 2A'_0$

8 $S \circ S \circ S \circ S$ est la similitude de centre B , de rapport $(\sqrt{2})^4 = 4$.

D'où $A = 4^2 A'_0 = 16 \times \frac{1}{2} A_0 = 8A_0$

Exercice 3

1 La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto x^{n+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \mapsto e^{-x} x^{n+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$. D'où $E_{f_n} = \mathbb{R}$

2 a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_n(x) = (-e^{-x})x^{n+1} + e^{-x}(n+1)x^n = (-x + n + 1)e^{-x}x^n$$

L'entier n étant impair, x^n est de même signe que x . D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$n+1$	$+\infty$	
$-x+n+1$		$+$	0	$-$	
e^{-x}			$+$		
x^n	$-$	0	$+$		
$f'_n(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

b. $n+1$ étant pair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{n+1} = +\infty$. D'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} x^{n+1} = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} x^{n+1} = 0.$$

c.

x	$-\infty$	0	$n+1$	$+\infty$
$f'_n(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f_n(x)$	$+\infty$	0	$\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$	0

3 a.

Si l'on choisit $\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \\ v(x) = x^{n+2} \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = (n+2)x^{n+1} \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties :

$$I_{n+1,p} = \int_0^p e^{-x} x^{n+2} dx = \left[-e^{-x} x^{n+2} \right]_0^p + (n+2) \int_0^p e^{-x} x^{n+1} dx = -e^{-p} p^{n+2} + (n+2) I_{n,p}$$

Par passage à la limite,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} I_{n+1,p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \underbrace{-e^{-p} p^{n+2}}_{=0} + \lim_{p \rightarrow +\infty} (n+2) I_{n,p} = (n+2) \lim_{p \rightarrow +\infty} I_{n,p}$$

D'où $J_{n+1} = (n+2)J_n$.

$$\text{b. } J_n = (n+1)J_{n-1} = (n+1) \times n J_{n-2} = \cdots = (n+1) \times n \times \cdots \times 2 \times J_0 = (n+1)! J_0$$

Exercice 4

1 Pour tous nombres n et p de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, X est la variable aléatoire qui à tout tirage (n, p) où $n \neq p$, associe $|n - p|$.

jeton n° jeton n°	1	2	3	4
1		1	2	3
2	1		1	2
3	2	1		1
4	3	2	1	

Loi de probabilité de X

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$$2 \quad E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p(X = x_i) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p(X = x_i) - (E(X))^2 = 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{3} + 9 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
FRANCE

VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
FRANCE