Correction bac 2013 - Série C

Exercice 1

1 En remplaçant z par -1 dans l'équation (E), on vérifie que :
$(-1)^3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-1)^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-1) + 1 = 0$.

2 Soit z_0, une solution de (E). Le nombre z_0 est nécessaire non nul puisque 0 n'est pas une solution de (E).

$$\left(\frac{1}{z_0}\right)^3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{z_0}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{z_0}\right) + 1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z_0 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z_0^2 + z_0^3}{z_0^3} = \frac{0}{z_0^3} = 0.$$

3 L'équation (E') : $z^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1$ admet pour discriminant $\Delta = -2 + \dfrac{3}{2}i$.

Cherchons un nombre complexe $u = x + iy$ tel que $u^2 = -2 + \dfrac{3}{2}i$.

Alors, $x^2 - y^2 + 2ixy = -2 + \dfrac{3}{2}i$.

Par identification des parties réelles et des parties imaginaires, $x^2 - y^2 = -2$ et $xy = \dfrac{3}{4}$.

D'autre part, comme $|u|^2 = |-2 + \dfrac{3}{2}i|$ alors $x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}$.

On obtient le système d'équations suivant : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 & (1) \\ x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2} & (2) \\ xy = \dfrac{3}{4} & (3) \end{cases}$

En additionnant membre à membre l'équation (1) et (2), on obtient $x = -\dfrac{1}{2}$ ou $x = \dfrac{1}{2}$;
En multipliant l'équation (1) par -1, puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (2), on en déduit que $y = -\dfrac{3}{2}$ ou $y = \dfrac{3}{2}$.
L'équation (3) nous indique que x et y sont de même signe.
D'où $\Delta = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)^2$.

On en déduit que les racines de l'équation (E') sont : $z_0' = 1 + i$ et $z_0'' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

4 En remarquant que
$(z+1)\left(z^2 - \left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)z + 1\right) = z^3 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)z^2 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)z + 1$, on en déduit que les solutions de l'équation (E) sont : $\left\{-1, 1+i, \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right\}$.

Valérien EBERLIN
Professeur de mathématiques
France

Exercice 2

1

Y \ X	-2	-1	0
-1	3	2	1
0	0	3	0
2	2	2	1

2

Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable X, et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable Y.

Dans ce cas, on a : $\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N.

Série marginale de X

X	-2	-1	0
$n_{i\bullet}$	5	7	2

Série marginale de Y

Y	-1	0	2
$n_{\bullet j}$	6	3	5

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_{i\bullet}\, x_i = \frac{5\times(-2)+7\times(-1)+2\times 0}{14} = -\frac{17}{14}$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{3} n_{\bullet j}\, y_j = \frac{6\times(-1)+3\times 0+5\times 2}{14} = \frac{2}{7}$$

D'où le point moyen $G\left(-\dfrac{17}{14}\,;\,\dfrac{2}{7}\right)$.

3 $$\mathrm{V}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_{i\bullet}x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{14}\left[5\times(-2)^2+7\times(-1)^2+2\times 0^2\right] - \left(-\frac{17}{14}\right)^2 = \frac{89}{196}.$$

$$\mathrm{V}(Y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{3} n_{\bullet j}\, y_j^2 - \overline{Y}^2 = \frac{1}{14}\left[6\times(-1)^2+3\times 0^2+5\times 2^2\right] - \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{87}{49}.$$

4

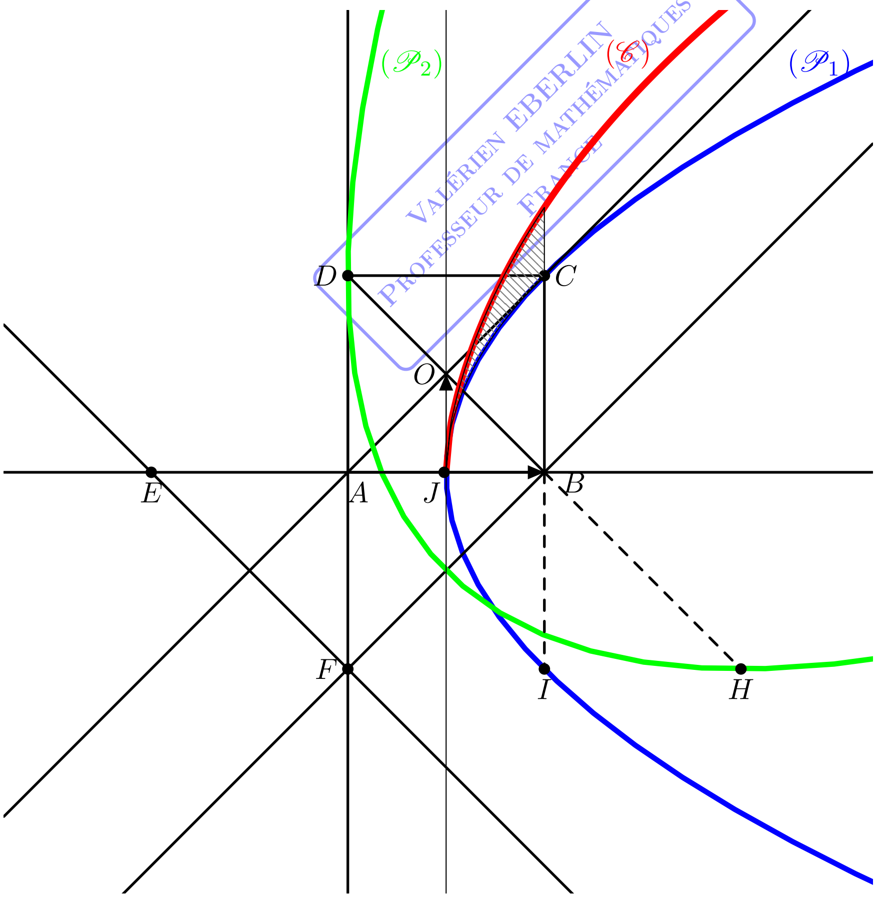
$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}x_iy_j - \overline{X}.\overline{Y}\\
&= \frac{1}{14}(3\times 2+2\times 1+2\times(-4)+2\times(-2)) - \left(-\frac{17}{14}\right)\times\frac{2}{7}.\\
&= \frac{3}{49}
\end{aligned}$$

VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
FRANCE

5 Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est :

D'où $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(Y)}} = 0,068.$

Problème



1 $C \in \mathscr{P}_1$ et D est le projeté orthogonal de C sur la directrice (AD).
Et (AC) qui est la tangente en C à $(\mathscr{P}_1)$ est également la médiatrice de $[BD]$.
Donc B est le foyer de la parabole.

2 E est le symétrique du foyer B par rapport à la tangente (AD) à $(\mathscr{P}_2)$.
On en déduit que E est un point de la directrice de $(\mathscr{P}_2)$.
Or E est également le projeté orthogonal de $D \in (\mathscr{P}_2)$ sur (EF).
Donc (EF) est la directrice de $(\mathscr{P}_2)$.

3 B est le foyer de $(\mathscr{P}_2)$.
(EF) est la directrice de $(\mathscr{P}_2)$.
On en déduit que (BF) qui est la perpendiculaire à (EF) passant par B est son axe focal.
C'est par conséquent son axe de symétrie.
D'où H est le symétrique de D par rapport à (BF).

4 $[DH]$ est un segment passant par le foyer B et dont les extrémités appartiennent à $(\mathscr{P}_2)$.
C'est une corde focale de $(\mathscr{P}_2)$.

5 B est le foyer de $(\mathscr{P}_1)$.
(AD) est la directrice de $(\mathscr{P}_1)$.
On en déduit que (BE) qui est la perpendiculaire à (AD) passant par B est son axe focal.
C'est par conséquent son axe de symétrie.
Comme $C \in (\mathscr{P}_1)$, alors I symétrique de C par rapport à (BE), appartient à $(\mathscr{P}_1)$.

6 Voir figure.

7 $\theta = (\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}) \equiv -\dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$

8 $k = \dfrac{BA}{BF} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

9 $[CI]$ corde focale de $(\mathscr{P}_1)$ est perpendiculaire à son axe focal.
$[DH]$ corde focale de $(\mathscr{P}_2)$ est perpendiculaire à son axe focal.
On en déduit que $S([DH]) = [CI]$.
Or la similitude conserve les milieux. Comme B est le milieu de $[DH]$, alors $S(B)$ est le milieu de $[CI]$.
D'où $S(B) = B$.
Donc B est le centre de la similitude S.

10 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x+1}$.

Signe de f'
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) > 0$.

Tableau de variation
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

11 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{\ln(x+1)}{x} \right) = 0$.
La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction $\overrightarrow{JB}$.

12 Voir figure (en rouge).

13 p étant la distance du foyer à la directrice, on a : $p = AB = 2$.
L'équation cartésienne de la parabole $(\mathscr{P}_1)$ est alors $y^2 = 2px = 4x$.
On en déduit que $(\mathscr{P}_1)$ est la réunion de deux courbes symétriques par rapport à (JB) :

- la courbe d'équation $y_1(x) = 2\sqrt{x}$
- la courbe d'équation $y_2(x) = -2\sqrt{x}$.

D'où l'aire de la portion :
$\displaystyle\int_0^1 (f(x) - y_1(x))\,dx = \int_0^1 ((2\sqrt{x} + \ln(x+1) - 2\sqrt{x})\,dx = \big[(x+1)\ln(x+1) - x\big]_0^1 = 2\ln 2 - 1$

VALÉRIEN EBERLIN PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES FRANCE