

Correction bac 2012 - Série C

Exercice 1

- 1** Soit $z = ib$ où $b \in \mathbb{R}$, une solution de l'équation $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 = 0$.
 $(ib)^4 - \sqrt{2}(ib)^3 - 4\sqrt{2}(ib) - 16 = 0 \iff b^4 - 16 + i\sqrt{2}b(b^2 - 4) = 0$
 $\iff b^4 - 16 = 0 \text{ et } b(b^2 - 4) = 0$
 $\iff b = 2 \text{ ou } b = -2$

Les solutions imaginaires pures sont $z_0 = 2i$ et $z_1 = -2i$.

L'équation $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16$ peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 &= (Z - 2i)(Z + 2i)(Z^2 + cZ + d) \\ &= (Z^2 + 4)(Z^2 + cZ + d) \end{aligned}$$

Le terme de degré 0 du second membre est $4d$. On en déduit que $4d = -16$. D'où $d = -4$.

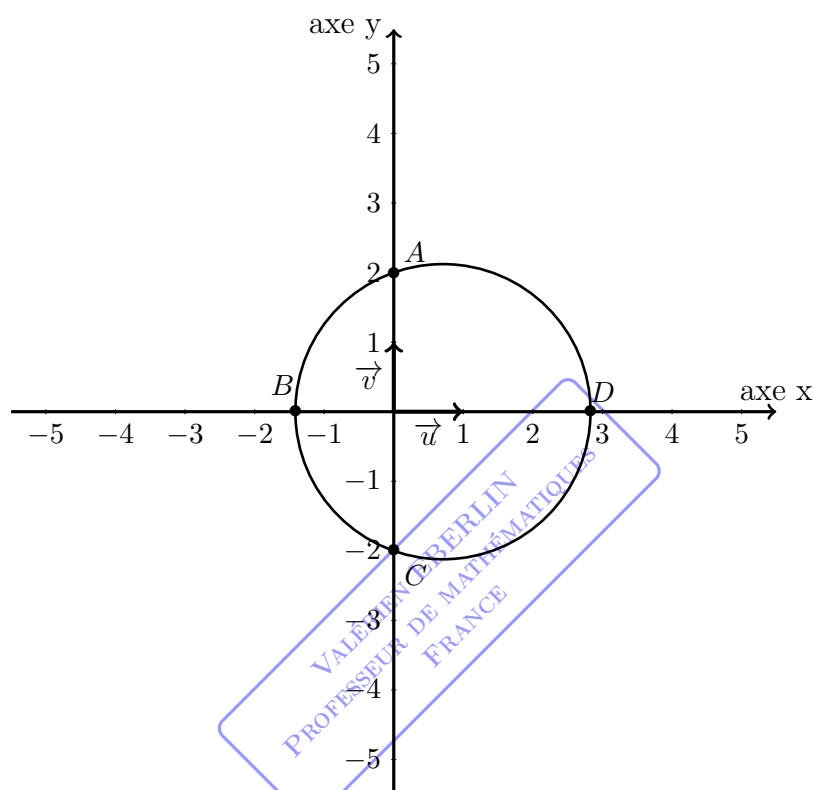
Le terme de degré 1 du second membre est $4c$. On en déduit que $4c = -4\sqrt{2}$. D'où $c = -\sqrt{2}$.

Il vient que : $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 = (Z^2 + 4)(Z^2 - \sqrt{2}Z - 4)$.

L'équation $Z^2 - \sqrt{2}Z - 4 = 0$, de discriminant $\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4(-4) = 18$ admet deux racines $z_2 = 2\sqrt{2}$ et $z_3 = -\sqrt{2}$.

Donc les solutions de l'équation $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 = 0$ sont : $z_0 = 2i$, $z_1 = -2i$, $z_2 = 2\sqrt{2}$ et $z_3 = -\sqrt{2}$.

2 a.



b.

Les points A, B, C et D sont cocycliques $\iff \overrightarrow{(AB, AC)} \equiv \overrightarrow{(DB, DC)} [\pi]$

$$\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} &= \frac{-4i}{-\sqrt{2} - 2i} \div \frac{-2i - 2\sqrt{2}}{-3\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{6} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle $(\mathcal{C})$.

Le cercle $(\mathcal{C})$ a pour centre, le point d'affixe $\frac{z_B + z_D}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour rayon $\frac{1}{2}|z_D - z_B| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2

1 $I_1 = \int_0^1 x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^1 = -e^{-\frac{1}{2}} + 1$

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $x \mapsto x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0; 1]$.

De plus : $\forall x \in [0; 1], x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \geq 0$.

Donc $I_n = \int_0^1 x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Soit n un entier tel que $n \geq 3$.

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^1 x^{n-1} \cdot x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Si l'on choisit $\begin{cases} u = x^{n-1} \\ v' = x e^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u' = (n-1)x^{n-2} \\ v = -e^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties :

$$I_n = \left[-x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^1 + (n-1) \int_0^1 x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -e^{-\frac{1}{2}} + (n-1)I_{n-2}.$$

D'où : $I_n = -e^{-\frac{1}{2}} + (n-1)I_{n-2}$ pour tout entier n tel que $n \geq 3$.

4 Décroissance de la suite (I_n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_0^1 x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^1 x^n (x-1) e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

La fonction $x \mapsto x^n (x-1) e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0; 1]$.

De plus, $\forall x \in [0; 1], x^n (x-1) e^{-\frac{x^2}{2}} \leq 0$.

Donc $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n (x-1) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite (I_n) est décroissante.

Convergence de la suite (I_n)

La suite (I_n) est décroissante d'après 4..
 De plus, (I_n) est minorée par 0 d'après 2..
 Donc la suite (I_n) converge vers une limite l .

5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in [0; 1], \quad -\frac{x^2}{2} \leq 0.$$

Par croissance de la fonction exponentielle, $0 < e^{-\frac{x^2}{2}} \leq e^0 = 1$.

On en déduit que : $0 \leq x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \leq x^n$.

Par passage à l'intégrale, on a : $0 \leq \int_0^1 x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

D'où $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

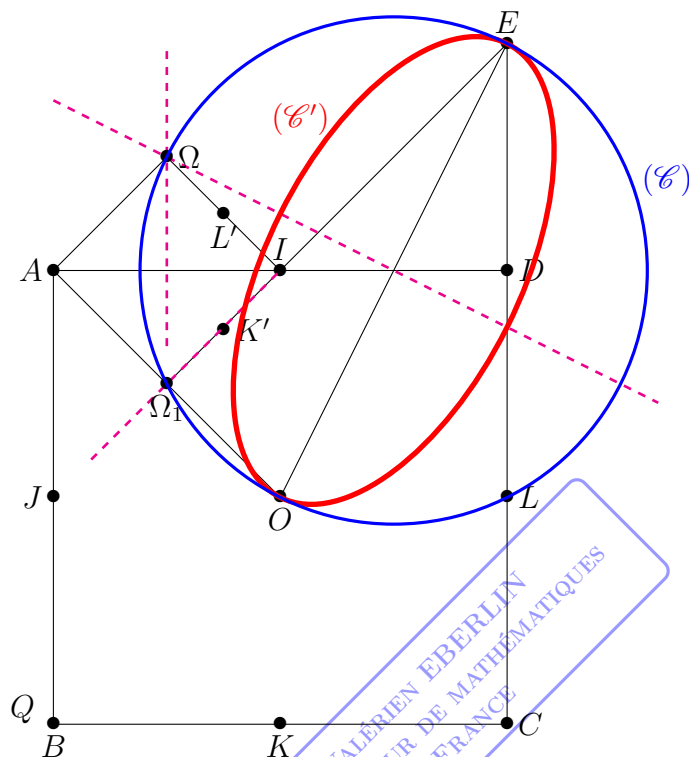
Calcul de l

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Par passage à la limite, on a $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

On en déduit que $l = 0$.

Problème



1 $IE^2 = ID^2 + DE^2 = AI^2 + IO^2 = AO^2$. Donc $IE = AO$.

- 2** Comme $IE = AO$ et $\overrightarrow{IE} \neq \overrightarrow{AO}$ alors il existe une unique rotation r , d'angle $(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{AO})$ qui transforme I en A et E en O .

Cet angle vaut $(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

- 3** Ω le point d'intersection de médiatrices des segments $[IA]$ et $[EO]$.

- 4** Comme $r(E) = O$, alors $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega E}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

D'autre part, $(\overrightarrow{\Omega_1 O}, \overrightarrow{\Omega_1 E}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

D'où, $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega E}) \equiv (\overrightarrow{\Omega_1 O}, \overrightarrow{\Omega_1 E}) [2\pi]$. Les points Ω, E, O, Ω_1 sont cocycliques.

- 5** • Le triangle ΩAI est rectangle isocèle

En effet, comme $r(I) = A$, alors $\Omega A = \Omega I$ et $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$. D'où le triangle ΩAI est rectangle isocèle en Ω .

- Le triangle $\Omega_1 AI$ est rectangle isocèle

- Dans le triangle AOD ,

$\Omega_1 \in [AO]; I \in [AD]$.

De plus, $(\Omega_1 I) \parallel (OD)$.

D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{A\Omega_1}{AO} = \frac{\Omega_1 I}{OD}$.

On en déduit que $\frac{A\Omega_1}{\Omega_1 I} = \frac{AO}{OD} = 1$ d'où $A\Omega_1 = \Omega_1 I$.

- De plus, $(\overrightarrow{\Omega_1 I}, \overrightarrow{\Omega_1 A}) = (\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Donc le triangle $\Omega_1 AI$ est rectangle isocèle en Ω_1 .

Les triangles ΩAI et $\Omega_1 AI$ sont alors rectangles isocèles, d'hypoténuse commune $[AI]$.
Donc le quadrilatère $A\Omega_1 I \Omega$ est un carré.

- 6** $S(ABCD) = A\Omega_1 I \Omega$.

La similitude S vérifie en particulier : $S(A) = A$ et $S(B) = \Omega_1$.

D'où, S est la similitude de centre A , d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega_1}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ et de rapport :

$$\frac{A\Omega_1}{AB} = \frac{\frac{1}{4} \cdot AC}{AB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

- 7** • $S(B) = \Omega_1$ et $S(C) = I$.

Comme K est le milieu du segment $[BC]$, alors $S(K) = K'$ est le milieu du segment $[\Omega_1 I]$.

- $S(C) = I$ et $S(D) = \Omega$.

Comme L est le milieu du segment $[CD]$, alors $S(L) = L'$ est le milieu du segment $[I\Omega]$.

- 8** $\overline{S}(Q) = Q$.

$\overline{S}$ est une similitude plane indirecte de centre Q , d'axe (OD) et de rapport $\frac{1}{2}$.

- 9** a.

$\overline{S}(C) = J$.

$$\overline{S}(C) = h_{(Q, \frac{1}{2})} \circ S_{OD}(C) = h_{(Q, \frac{1}{2})}(A).$$

On en déduit que $h_{(Q, \frac{1}{2})}(A) = J$. D'où $\overrightarrow{QJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA}$.

b.

$$\overrightarrow{QJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA} \iff \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

$$\iff \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BJ}$$

$$\iff \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{0}$$

$$\iff Q = B$$

- 10** **a.** f est une affinité orthogonale d'axe (OE) , de rapport $\frac{1}{2}$.
b. Voir figure.
c. $(\mathcal{C}')$ est un ellipse.