

Correction bac 2011 - Série C

Exercice 1

$$1 \quad A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$2 \quad A - B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos^2(x) - \sin^2(x)) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) \, dx.$$

Si l'on choisit $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \cos(2x) \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties :

$$A - B = \left[\frac{1}{2} x \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \, dx = \left[\frac{1}{4} \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$$

3

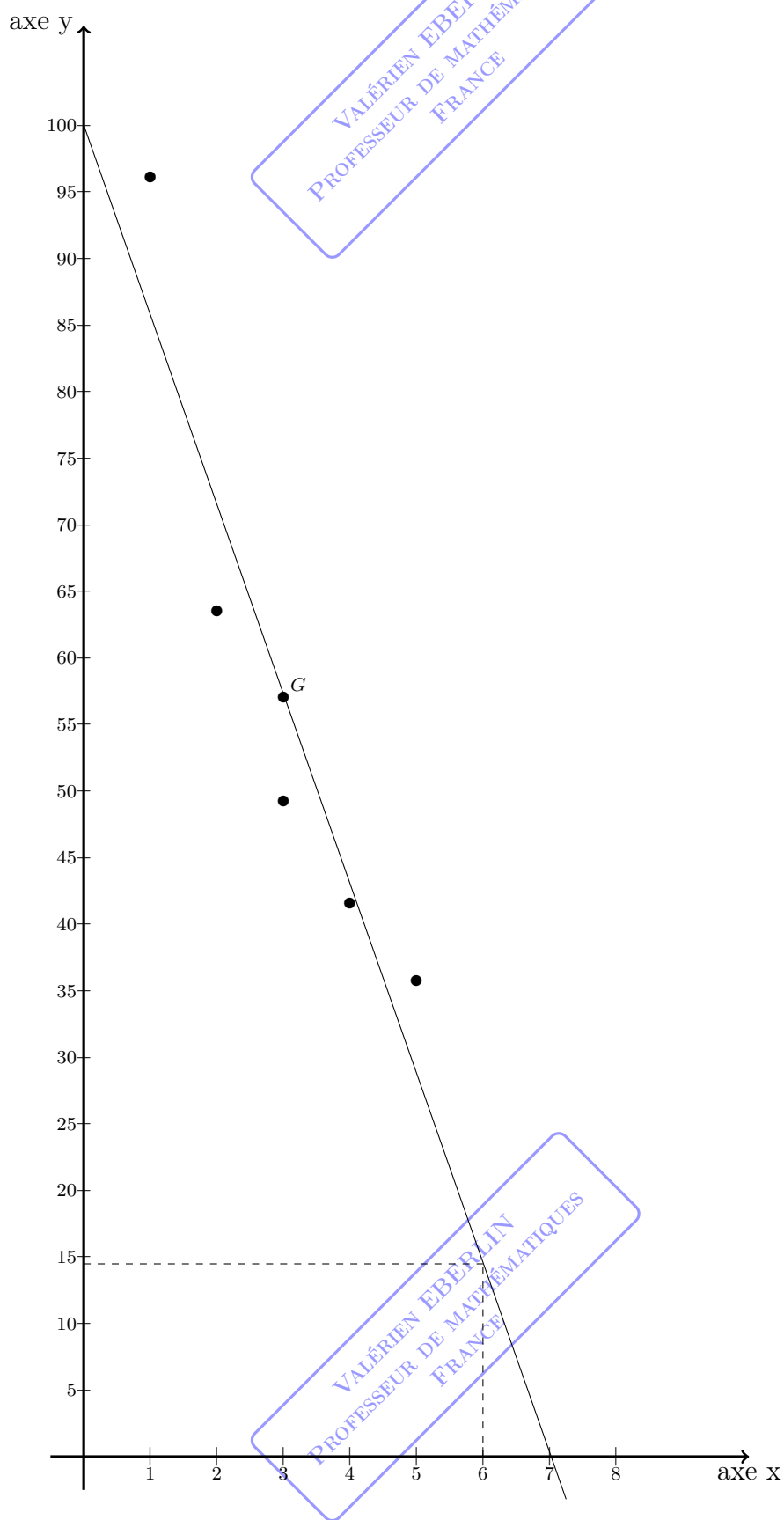
$$\begin{cases} A + B = \frac{\pi^2}{8} & (1) \\ A - B = -\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

En additionnant membre à membre l'équation (1) et (2), on en déduit que, $A = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$.

En multipliant l'équation (2) par -1 , puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (1), on en déduit que $B = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$.

Exercice 2

1



- 2** L'équation de la droite de régression linéaire de y en x est donnée par : $y = ax + b$ où $a = \frac{\text{Cov}(x, y)}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

Moyenne

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i = \frac{96,1 + 63,5 + 49,2 + 41,5 + 35,7}{5} = 57,2$$

Covariance, variance

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i y_i - \bar{x} \bar{y} = \frac{1 \times 96,1 + \dots + 5 \times 35,7}{5} - 3 \times 57,2 = -28,56$$

$$V(x) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}{5} - 3^2 = 2$$

$$a = \frac{-28,56}{2} = -14,28 \quad ; \quad b = 57,2 - (-14,28) \times 3 = 100,04.$$

D'où l'équation de la droite de régression linéaire : $y = -14,28x + 100,04$

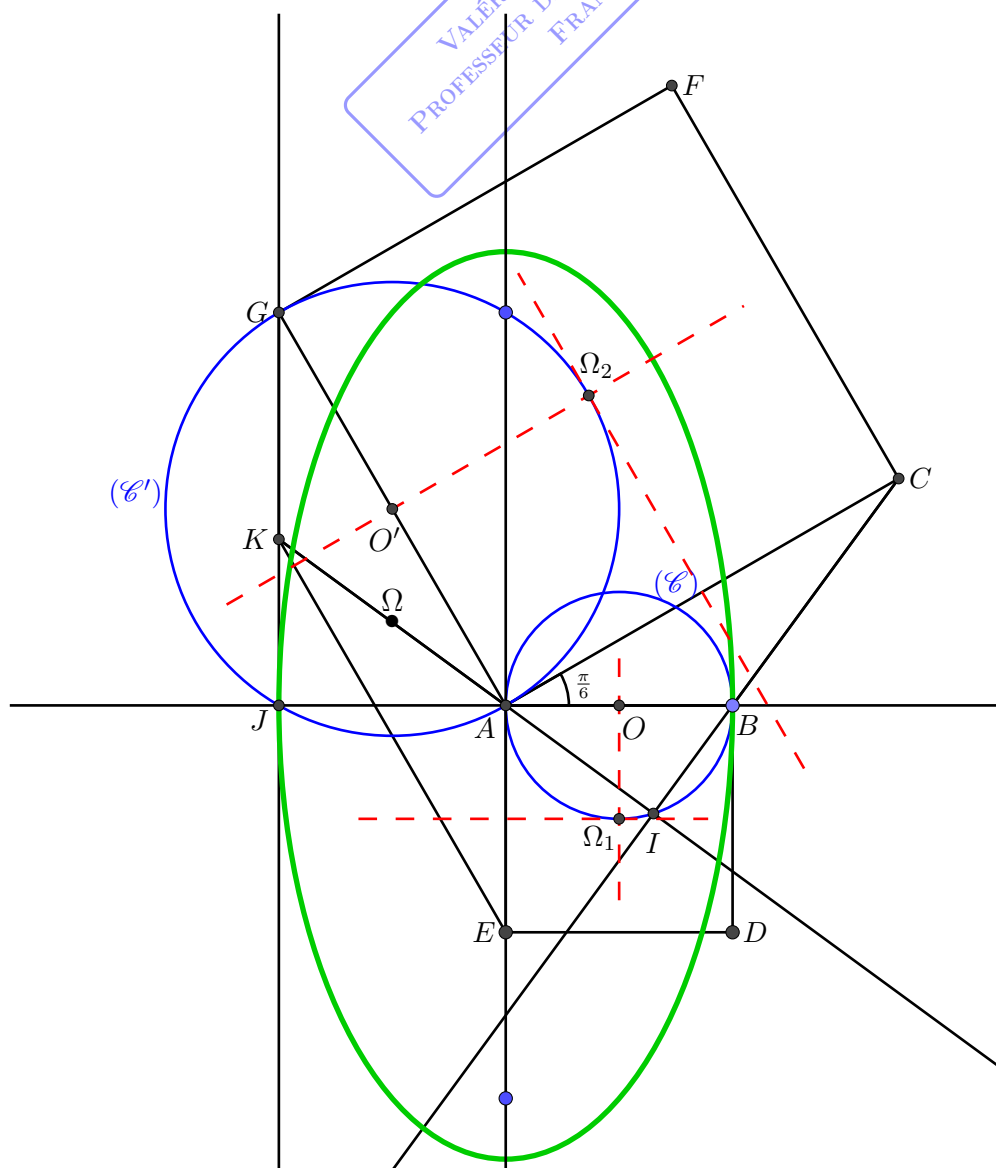
- 3** Pour $x = 6$, $y = -14,28 \times 6 + 100,04 = 14360$.

Le bénéfice au 6ème mois est estimé à 14 360 francs CFA.

Problème

Partie A

1



2 Les triangles ABC et EAK sont isométriques

- $AB = EA$.
- $AC = EK$. En effet, comme $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AE}$, alors $GKEA$ est un parallélogramme. On en déduit que $EK = AG$. Or $AG = AC$. D'où $AC = EK$.
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK}) [2\pi]$
En effet, $(AB) \perp (EA)$ et $(AC) \perp (EK)$.
On en déduit que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK})$ sont deux angles (aigus) à côtés perpendiculaires. D'où : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK}) [2\pi]$.

Donc les triangles ABC et EAK sont isométriques puisqu'ils ont un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement de même longueur.

Existence de R_1 telle que $R_1(ABC) = EAK$

Comme $AB = EA$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{EA}$, alors il existe une rotation R_1 d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, qui transforme A en E et B en A .

Reste à montrer que $R_1(C) = K$.

Soit K' le point tel que $R_1(ABC) = EAK'$.

On a $AC = EK'$. Or $AC = EK$. On en déduit que $EK = EK'$.

On a également $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK'}) [2\pi]$. Or $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK}) [2\pi]$. On en déduit que $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK'}) \equiv (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK}) [2\pi]$.

Donc $K = K'$ et par conséquent $R_1(C) = K$.

Construction de Ω_1 , centre de la rotation R_1

Ω_1 est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AE]$ et $[BA]$.

3 Soit Ω , le centre du parallélogramme $GKEA$

La rotation R_0 , de centre Ω et d'angle π transforme le triangle EAK en le triangle GKA . D'où $R_2 = R_0 \circ R_1$ transforme le triangle ABC en le triangle GKA .

Angle de R_2

Comme $\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \neq 0 [2\pi]$ alors $R_2 = R_0 \circ R_1$ est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

Construction de Ω_2

$R_2(A) = G$.

$R_2(C) = A$.

Ω_2 est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AG]$ et $[CA]$ c'est à dire Ω_2 est le centre du carré $ACFG$.

4 a. $f = R_1 \circ R_2$ est la composée de deux rotations, de centres distincts, dont la somme des angles $\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \equiv 0 [2\pi]$. C'est donc une translation.

b. $f(C) = R_1 \circ R_2(C) = R_1(A) = E$.

$\overrightarrow{CE}$ est le vecteur de translation de f .

5 • $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. En effet, comme $R_1(B) = A$ et $R_1(C) = K$, alors $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AK}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Or $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AK}) \equiv (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA})$. Donc $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

• $(\overrightarrow{\Omega_1 B}, \overrightarrow{\Omega_1 A}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ car Ω_1 est le centre du carré $ABDE$.

On en déduit que les triangles IAB et $\Omega_1 AB$ sont rectangles, d'hypoténuse commune $[AB]$. Donc les points A, B, I et Ω_1 sont situés sur le même cercle ($\mathcal{C}$) de centre O , milieu de $[AB]$.

6 • $(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JG}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

• $(\overrightarrow{\Omega_2 G}, \overrightarrow{\Omega_2 A}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On en déduit que les triangles JAG et $\Omega_2 AG$ sont rectangles, d'hypoténuse commune $[AG]$.

Donc les points A, G, J et Ω_2 sont situés sur le même cercle ($\mathcal{C}'$) de centre O' , milieu de $[AG]$.

Partie B

- 7** $S(A) = A$ et $S(O) = O'$.

S est la similitude de centre A , de rapport $\frac{AO'}{AO} = 2$ et d'angle $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} [2\pi] = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

- 8** L'expression complexe de S est donnée par $z' - z_A = 2 e^{i \frac{2\pi}{3}} (z - z_A)$ avec $z_A = 0$ (origine du repère).

D'où $z' = (-1 + i\sqrt{3})z$.

- 9** Comme $z' = 2 e^{i \frac{2\pi}{3}} z$, on en déduit que $z = \frac{1}{2} e^{-i \frac{2\pi}{3}} z' = \left(-\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z'$.

En remplaçant z par $x + iy$ et z' par $x' + iy'$ dans l'expression $z = \left(-\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z'$, on obtient après identification des parties réelles et des parties imaginaires :

$$x = \frac{1}{4}(-x' + \sqrt{3}y') \text{ et } y = -\frac{1}{4}(\sqrt{3}x' + y')$$

Partie C

- 10** $4x^2 + y^2 = 4 \iff \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

$(\mathcal{E})$ est une ellipse :

- de centre $A(0, 0)$;
- de sommets : $B(1, 0)$; $J(-1, 0)$; $(0, 2)$; $(0, -2)$
- de demi-distance focale $c = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ et de foyers : $F(0, \sqrt{3})$ et $F'(0, -\sqrt{3})$.

- 11** En remplaçant x par $\frac{1}{4}(-x' + \sqrt{3}y')$ et y par $-\frac{1}{4}(\sqrt{3}x' + y')$ dans l'équation $4x^2 + y^2 = 4$, on a : $7x'^2 - 6\sqrt{3}x'y' + 13y'^2 = 64$.

D'où une équation de $(\mathcal{E}')$: $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 64$.