

Correction bac 2010 - Série C

Exercice 1

1

a.

$$\begin{aligned}
 x^2 \equiv -1 [25] &\iff x^2 + 1 \equiv 0 [25] \\
 &\iff x^2 + 1 \text{ est un multiple de } 25 \\
 &\iff x^2 + 1 = 25k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff x^2 = -1 + 25k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Donc les équations $x^2 \equiv -1 [25]$ et $x^2 = -1 + 25k$ où $k \in \mathbb{Z}$, sont équivalentes.

b. Si $k = 2$ alors $x^2 = -1 + 25 \times 2 = 49$. D'où $x = 7$ ou $x = -7$.

2

a.

- si $n = 0$ alors $2^0 - 4 \equiv -3 [5] \equiv 2 [5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^0 - 4$ par 5 est 2.
- si $n = 1$ alors $2^1 - 4 \equiv -2 [5] \equiv 3 [5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^1 - 4$ par 5 est 3.
- si $n = 2$ alors $2^2 - 4 \equiv 0 [5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^2 - 4$ par 5 est 0.
- si $n = 3$ alors $2^3 - 4 \equiv 4 [5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^3 - 4$ par 5 est 4.
- si $n = 4$ alors $2^4 - 4 \equiv 12 [5] \equiv 2 [5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^4 - 4$ par 5 est 2.

Déduisons les restes suivant les valeurs de n

Soit $n \in \mathbb{N}$.

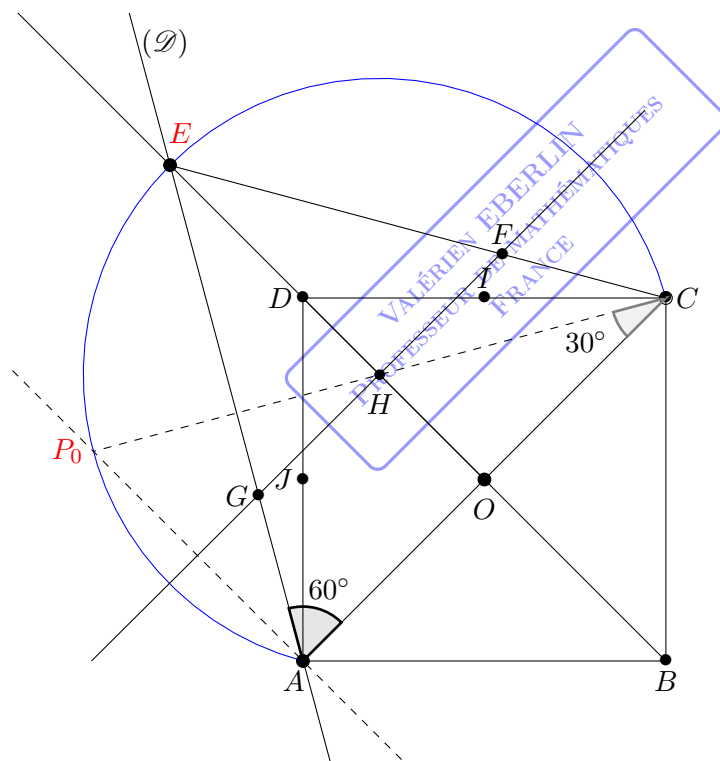
Alors n peut s'écrire $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$ ou $n = 4k + 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Comme $2^4 \equiv 1 [5]$, alors $(2^4)^k \equiv 1 [5]$. On en déduit que :

- si $n = 4k$ alors $2^{4k} - 4 \equiv (2^4)^k - 4 [5] \equiv -3 [5] \equiv 2 [5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^{4k} - 4$ par 5 est 2.
- si $n = 4k + 1$ alors $2^{4k+1} - 4 \equiv (2^4)^k \cdot 2 - 4 [5] \equiv -2 [5] \equiv 3 [5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^{4k+1} - 4$ par 5 est 3.
- si $n = 4k + 2$ alors $2^{4k+2} - 4 \equiv (2^4)^k \cdot 2^2 - 4 [5] \equiv 0 [5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^{4k+2} - 4$ par 5 est 0.
- si $n = 4k + 3$ alors $2^{4k+3} - 4 \equiv (2^4)^k \cdot 2^3 - 4 [5] \equiv 4 [5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^{4k+3} - 4$ par 5 est 4.

b. $2010 = 4 \times 502 + 2$, on en déduit que le reste de la division euclidienne de $2^{2010} - 4$ par 5 est 0. Par conséquent $2^{2010} - 4$ est divisible par 5.

Exercice 2



1 Soit P_0 un point tel que $\overrightarrow{(P_0A, P_0C)} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Alors $P_0 \in (\Gamma)$.

$$M \in \Gamma \iff \overrightarrow{(MA, MC)} \equiv \overrightarrow{(P_0A, P_0C)} [2\pi]$$

$$\iff M \text{ est un point de l'arc de cercle } \widehat{AP_0C}$$

D'où Γ est l'arc de cercle $\widehat{AP_0C}$.

2 a. $\overrightarrow{(EA, EC)} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ car E est un point de (Γ) .

De plus, $\overrightarrow{(AC, AE)} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ car $\overrightarrow{((AC), (D))} \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$ et $E \in (D)$.

On en déduit que le triangle EAC admet deux angles de mesure $\frac{\pi}{3}$. C'est par conséquent un triangle équilatéral.

b. Comme $EA = EC$ et $\overrightarrow{EA} \neq \overrightarrow{EC}$, alors il existe une rotation r d'angle $\overrightarrow{(EA, EC)} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$, de centre E , qui transforme A en C .

3 a. Dans le triangle EAC ,

- $(GF) \parallel (AC)$ et $(AG) \cap (CF) = \{E\}$

- D'après le théorème de Thalès, $\frac{EG}{EA} = \frac{EF}{EC}$.

Dans le triangle EOA ,

- $(GH) \parallel (AO)$ et $(AG) \cap (OH) = \{E\}$

- D'après le théorème de Thalès, $\frac{EG}{EA} = \frac{EH}{EO}$.

On en déduit que $\frac{EG}{EA} = \frac{EF}{EC} = \frac{EH}{EO}$.

Or $\frac{EH}{EO} = \frac{2}{3}$ car H est le centre de gravité du triangle EAC .

$$\text{D'où } \frac{EG}{EA} = \frac{EF}{EC} = \frac{2}{3}.$$

- b.** Les points E, G, A ainsi que E, F, C étant alignés dans le même ordre, on en déduit les égalités vectoriels : $\overrightarrow{EG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EC}$.

Ce qui montre que G et F sont respectivement les transformées de A et C par l'homothétie de centre E et de rapport $\frac{2}{3}$.

- c.** Soit h l'homothétie de centre E et de rapport $\frac{2}{3}$ qui transforme A en G et C en F .
Posons $S = h \circ r$.

S est une similitude plane directe de centre E , de rapport $\frac{2}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en F .

En effet, $S(E) = h \circ r(E) = h(E) = E$ et $S(A) = h \circ r(A) = h(C) = F$.

Problème

Partie A

- 1** L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = 0$ est : $r^2 + \pi^2 = 0$.

Elle admet deux racines distinctes : $r_1 = i\pi = 0 + i\pi$ et $r_2 = -i\pi = 0 - i\pi$.

Donc la solution générale est : $y(x) = e^{0x}(c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x)) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x)$
où c_1, c_2 sont des constantes réelles quelconques.

- 2** g est de la forme $g(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x)$ avec $g(0) = 0$ et $g'(0) = 2\pi$.

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2\pi = 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 \sin(\pi x)$.

Partie B

- 3 a.** La fonction $x \mapsto 2 \sin \pi x$ existe pour tout $x \in [-4; 0]$;

la fonction $x \mapsto x^2 \left(\frac{1}{2} - \ln x \right)$ existe pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Donc $E_f = [-4; +\infty[$.

- b.** Continuité en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 2 \sin(\pi \times 0) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}x^2 - x^2 \ln x \right) = 0.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, alors la fonction f est continue en 0.

Dérivabilité en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin \pi x}{x} = 2\pi \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\sin u}{u} = 2\pi \text{ où l'on a posé } u = \pi x.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}x - x \ln x \right) = 0.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$, alors la fonction f n'est pas dérivable en 0.

c. $\forall x \in [-4; -2]$, on a $2 \sin \pi(x+2) = 2 \sin(\pi x + 2\pi) = 2 \sin \pi x$.

La fonction $x \mapsto 2 \sin \pi x$, définie sur $[-4; 0]$, est périodique de période 2.

On peut alors restreindre son étude sur $[-2; 0]$, puis reporter son tracé sur la portion $[-4; -2]$ par la translation de vecteur $-2\vec{i}$.

D'où l'étude de la fonction f peut être réduite à l'intervalle $I = [-2; +\infty[$.

4 a. La fonction f est dérivable sur $] -2; 0[\cup]0; +\infty[$.

$$\forall x \in] -2; 0[, \quad f'(x) = 2\pi \cos \pi x.$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = -2x \ln x.$$

Signes de f'

Sur $] -2; 0[$, $f'(x)$ est du signe de $\cos \pi x$.

$$\cos \pi x \geq 0 \iff -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff -\frac{1}{2} + 2k \leq x \leq \frac{1}{2} + 2k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x \in] -2; -\frac{3}{2}] \text{ ou } x \in [-\frac{1}{2}; 0[\quad (\text{en prenant } k = 0 \text{ et } k = -1)$$

D'où, sur l'intervalle $] -2; 0[$, $f'(x) \geq 0 \iff x \in] -2; -\frac{3}{2}] \text{ ou } x \in [-\frac{1}{2}; 0[$.

Sur $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = -2x \ln x \geq 0 \iff x \in]0; 1];$$

$$f'(x) = -2x \ln x \leq 0 \iff x \in [1; +\infty[.$$

Tableau de variation de f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

x	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	0	2	-2	0	$\frac{1}{2}$	$-\infty$	

b. Branches infinies

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x \left(\frac{1}{2 \ln x} - 1 \right) = -\infty.$$

La courbe ($\mathcal{C}$) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

Points d'intersection avec l'axe (Ox)

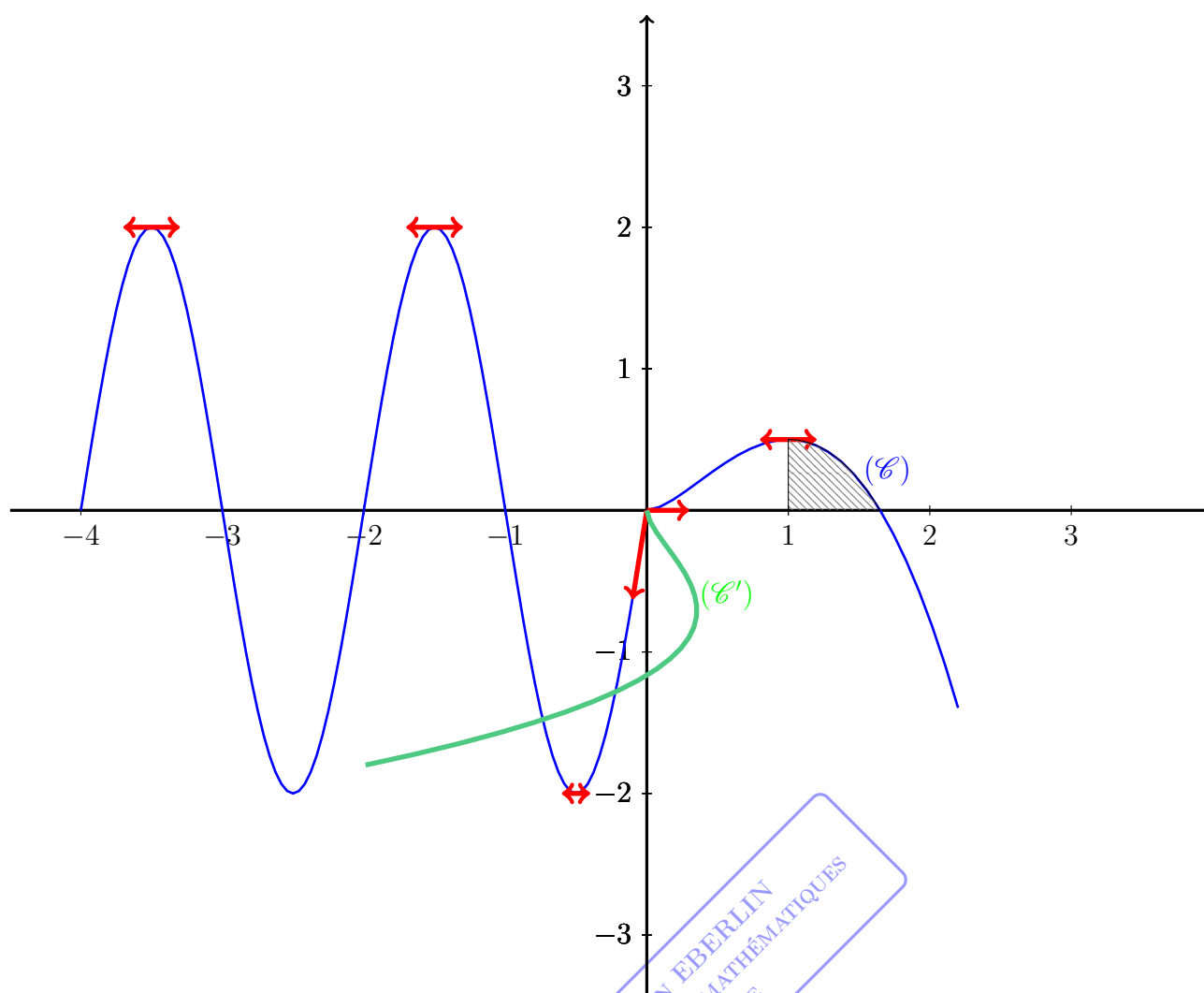
Si $-2 \leq x \leq 0$

$$f(x) = 0 \iff \sin \pi x = 0 \iff x = -2 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 0$$

Si $x > 0$

$$f(x) = 0 \iff x^2 \left(\frac{1}{2} - \ln x \right) = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = \sqrt{e}$$

Sur $[-2; +\infty[$, les points d'intersection de la courbe ($\mathcal{C}$) avec l'axe des abscisses sont : $(-2, 0)$; $(-1, 0)$; $(0, 0)$ et $(\sqrt{e}, 0)$.



$$5 \quad A_0 = \int_1^{\sqrt{e}} f(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2} x^2 - x^2 \ln x \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} x^2 \ln x dx.$$

Intégrons par parties $\int_1^{\sqrt{e}} x^2 \ln x dx$

Si l'on choisit $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties : $\int_1^{\sqrt{e}} x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^{\sqrt{e}} - \frac{1}{3} \int_1^{\sqrt{e}} x^2 \, dx$.

$$\text{D'où } A_0 = \left[\frac{5x^3}{18} - \frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{2e\sqrt{e} - 5}{18} \text{ u.a} = \frac{4e\sqrt{e} - 10}{9} \text{ cm}^2.$$

6 Voir figure.

7 a. Comme toute similitude de rapport k multiplie l'aire de la transformée par k^2 , la similitude S multiplie l'aire de la transformée par $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

$$\text{D'où : } A_n = \frac{1}{2} A_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 A_{n-2} = \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^n A_0.$$

b. $(A_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$S_n = A_0 + \frac{1}{2} A_0 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n A_0 = \frac{A_0 \times (1 - (\frac{1}{2})^{n+1})}{1 - \frac{1}{2}} = 2A_0(1 - (\frac{1}{2})^{n+1})$$

$$\text{c. } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2A_0 = \frac{8e\sqrt{e} - 20}{9} \text{ cm}^2$$

VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
FRANCE