

Correction bac 2009 - Série C

Exercice 1

- 1 a.** L'équation caractéristique de la suite récurrente $(S) : V_{n+2} + V_{n+1} - V_n$ est : $r^2 + r - 6 = 0$. Elle admet deux solutions distinctes : $r = 2$ et $r = -3$.

On en déduit que la suite (a_n) de terme générale $a_n = \alpha 2^n$ et (b_n) de terme général $b_n = \beta(-3)^n$ sont les suites géométriques de (S) .

Le premier terme de (a_n) et celui de (b_n) étant égal à 1, on a $a_0 = \alpha = 1$ et $b_0 = \beta = 1$.

D'où : $a_n = 2^n$ et $b_n = (-3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- b.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} U_{n+2} + U_{n+1} - 6U_n &= \alpha 2^{n+2} + \beta(-3)^{n+2} + \alpha 2^{n+1} + \beta(-3)^{n+1} - 6(\alpha 2^n + \beta(-3)^n) \\ &= \alpha \underbrace{(2^{n+2} + 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n)}_{=0} + \beta \underbrace{((-3)^{n+2} + (-3)^{n+1} - 6(-3)^n)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $(U_n) \in S$.

- 2 a.** Déterminons d'abord une solution particulière de l'équation $8\alpha - 27\beta = -11$

L'algorithme d'Euclide appliqué à 27 et 8 donne :

$$27 = 8 \times 3 + 3$$

$$8 = 3 \times 2 + 2$$

$$3 = 2 \times 1 + 1$$

En remontant l'algorithme d'Euclide, l'on obtient :

$$1 = 3 - 2 \times 1$$

$$1 = 3 - (8 - 3 \times 2) = -8 + 3 \times 3$$

$$1 = -8 + (27 - 8 \times 3) \times 3 = -8 \times 10 + 27 \times 3$$

$$\text{Donc } 8 \times (-10) - 27 \times (-3) = 1.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par -11 , on obtient :

$$8 \times (110) - 27 \times (33) = -11.$$

D'où $(110, 33)$ est une solution particulière de l'équation $8\alpha - 27\beta = -11$.

Ensemble des solutions de l'équation $8\alpha - 27\beta = -11$

$$\begin{cases} 8\alpha - 27\beta = -11 \\ 8 \times 110 - 27 \times 33 = -11 \end{cases} \iff 8\alpha - 27\beta = 8 \times 110 - 27 \times 33 \iff 8(\alpha - 110) = 27(\beta - 33)$$

On en déduit 8 divise $27(\beta - 33)$.

Comme 8 est premier avec 27, alors d'après le théorème de Gauss, 8 divise $\beta - 33$.

Il existe donc un entier k tel que $\beta - 33 = 8k$. D'où $\beta = 33 + 8k$.

En remplaçant β par $33 + 8k$ dans l'équation $8\alpha - 27\beta = -11$, on obtient $\alpha = 110 + 27k$.

L'ensemble des solutions de l'équation $8\alpha - 27\beta = -11$ est : $\{(110 + 27k; 33 + 8k) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

b. En remplaçant α par $110 + 27k$ et β par $33 + 8k$ dans l'équation $4\alpha + 9\beta = 17$, on trouve $k = -4$.

c. La suite (U_n) est de terme général $U_n = \alpha 2^n + \beta(-3)^n$.

$$\begin{cases} U_2 = 17 \\ U_3 = -11 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\alpha + 9\beta = 17 \\ 8\alpha - 27\beta = -11 \end{cases}$$

Or d'après 2.a., α et β sont solutions de l'équation $8\alpha - 27\beta = -11$ s'ils sont de la forme : $\alpha = 110 + 27k$ et $\beta = 33 + 8k$.

Mais d'après 2. b., $\alpha = 110 + 27k$ et $\beta = 33 + 8k$ sont solutions de l'équation $4\alpha + 9\beta = 17$ si $k = -4$.

D'où $\alpha = 110 + 27 \times (-4) = 2$ et $\beta = 33 + 8 \times (-4) = 1$.

On en déduit aussi que pour $U_2 = 17$ et $U_3 = -11$, la forme générale de la suite (U_n) est $U_n = 2 \cdot 2^n + (-3)^n$.

d.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On sait que $-3 \equiv 2 [5]$. On en déduit que $(-3)^n \equiv 2^n [5]$.

En ajoutant membre à membre $2 \cdot 2^n$ à l'égalité précédente, on a : $2 \cdot 2^n + (-3)^n \equiv 2 \cdot 2^n + 2^n [5]$.

C'est à dire $2 \cdot 2^n + (-3)^n \equiv 2^n(1 + 2) [5]$.

D'où $U_n \equiv 3 \cdot 2^n [5]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- e.**
- si $n = 0$, $U_0 \equiv 3 [5]$. Le reste de la division euclidienne de U_0 par 5 est 3.
 - si $n = 1$, $U_1 \equiv 6 [5] \equiv 1 [5]$. Le reste de la division euclidienne de U_1 par 5 est 1.
 - si $n = 2$, $U_2 \equiv 12 [5] \equiv 2 [5]$. Le reste de la division euclidienne de U_2 par 5 est 2.
 - si $n = 3$, $U_3 \equiv 24 [5] \equiv 4 [5]$. Le reste de la division euclidienne de U_3 par 5 est 4.
 - si $n = 4$, $U_4 \equiv 48 [5] \equiv 3 [5]$. Le reste de la division euclidienne de U_4 par 5 est 3.

Déduisons les restes suivant les valeurs de n

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Alors n peut s'écrire $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$ ou $n = 4k + 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Comme $2^4 \equiv 1 [5]$, alors $(2^4)^k \equiv 1 [5]$. On en déduit que :

- si $n = 4k$, $U_{4k} \equiv 3 \cdot 2^{4k} [5] \equiv 3 (2^4)^k [5] \equiv 3 [5]$. Le reste de la division euclidienne de U_{4k} par 5 est 3.
- si $n = 4k + 1$, $U_{4k+1} \equiv 3 \cdot 2^{4k+1} [5] \equiv 3 \times 2 \cdot 2^{4k} [5] \equiv 6 (2^4)^k [5] \equiv 6 [5] \equiv 1 [5]$. Le reste de la division euclidienne de U_{4k+1} par 5 est 1.
- si $n = 4k + 2$, $U_{4k+2} \equiv 3 \cdot 2^{4k+2} [5] \equiv 3 \times 4 \cdot 2^{4k} [5] \equiv 12 (2^4)^k [5] \equiv 12 [5] \equiv 2 [5]$. Le reste de la division euclidienne de U_{4k+2} par 5 est 2.
- si $n = 4k + 3$, $U_{4k+3} \equiv 3 \cdot 2^{4k+3} [5] \equiv 3 \times 8 \cdot 2^{4k} [5] \equiv 24 (2^4)^k [5] \equiv 24 [5] \equiv 4 [5]$. Le reste de la division euclidienne de U_{4k+3} par 5 est 4.

3

a. En remarquant que $W_n = 2^{n+1} + (-3)^n = 2 \cdot 2^n + (-3)^n$, on en déduit que la suite (W_n) n'est autre que la suite (U_n) . D'après 2.d., $W_n \equiv 3 \cdot 2^n [5]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
S_n &= W_0 + W_1 + \dots + W_n \\
&\equiv 3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + \dots + 3 \cdot 2^n [5] \\
&\equiv 3(2^0 + 2^1 + \dots + 2^n) [5] \\
&\equiv 3 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \equiv -3(1 - 2^{n+1}) [5] \\
&\equiv 2(1 - 2^{n+1}) [5] \quad \text{car } -3 \equiv 2 [5] \\
&\equiv 2 - 4 \cdot 2^n [5]
\end{aligned}$$

b. $1956 = 4 \times 489.$

$$S_{1956} \equiv 2 - 4 \cdot 2^{1956} [5] \equiv 2 - 4 \cdot (2^4)^{489} \equiv 2 - 4 \times 1 [5] \equiv -2 [5] \equiv 3 [5].$$

Le reste de la division euclidienne de S_{1956} par 5 est 3.

Exercice 2

1 L'équation $z^2 + (\sqrt{3} + i)z + 1 = 0$ admet pour discriminant $\Delta = -2 + 2\sqrt{3}i$.

Cherchons un nombre complexe $u = x + iy$ tel que $u^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$.

$$x^2 - y^2 + 2ixy = -2 + 2\sqrt{3}i.$$

Par identification des parties réelles et des parties imaginaires, on a : $x^2 - y^2 = -2$ et $xy = \sqrt{3}$.

D'autre part, comme $|u|^2 = |-2 + 2\sqrt{3}i|$ alors $x^2 + y^2 = 4$.

$$\text{On obtient le système d'équations suivant : } \begin{cases} x^2 - y^2 = -2 & (1) \\ x^2 + y^2 = 4 & (2) \\ xy = \sqrt{3} & (3) \end{cases}$$

En additionnant membre à membre l'équation (1) et (2), on obtient $x = -1$ ou $x = 1$;

En multipliant l'équation (1) par -1 , puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (2), on en déduit que $y = -\sqrt{3}$ ou $y = \sqrt{3}$.

L'équation (3) nous indique que x et y sont de même signe.

D'où $\Delta = (1 + i\sqrt{3})^2$.

On en déduit que les solutions de l'équation (E) sont :

$$z' = \frac{(\sqrt{3} - 1)}{2}(-1 + i) \quad \text{et} \quad z'' = \frac{(\sqrt{3} + 1)}{2}(-1 - i)$$

2 $z' = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}(-1+i) = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$

$$z'' = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2}(-1-i) = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Problème

Partie A

I 1

Construction du point I

$$2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$$

$$2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$$

I est le point tel que B soit le milieu du segment $[AI]$.

Construction du point J

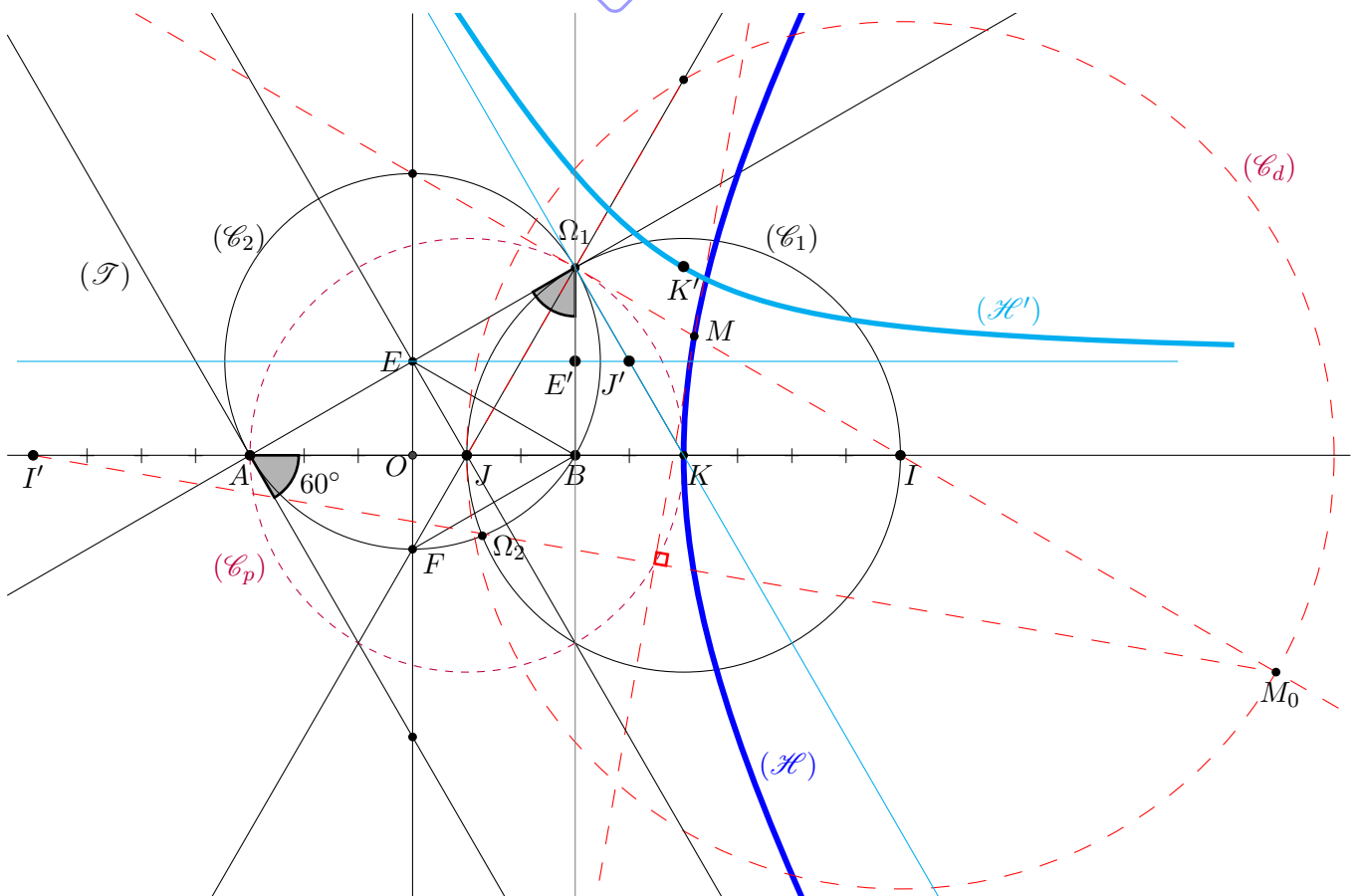
$$2\vec{JB} + \vec{JA} = \vec{0}$$

$$2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{0}$$

D'où $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

J est le point du segment $[AB]$ tel que

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$



II

- 2.** Le centre du cercle $(\mathcal{C}_2)$ est le point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la perpendiculaire à $(\mathcal{T})$ passant par A .

- 3.

Comme $J \in (\mathcal{C}_1)$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ alors J est un point du cercle $(\mathcal{C}_1)$ situé sur la corde $[AB] \setminus \{A, B\}$ de $(\mathcal{C}_2)$. Par conséquent, J est un point de l'arc du cercle $(\mathcal{C}_1)$ qui est situé dans le cercle $(\mathcal{C}_2)$ et J est distinct de Ω_1 et Ω_2 .

D'autre part, $B \in (\mathcal{C}_2)$ et $\overrightarrow{IB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$ (voir*) alors B est un point du cercle $(\mathcal{C}_2)$ situé sur la corde $[IJ] \setminus \{I, J\}$ de $(\mathcal{C}_1)$. Par conséquent, B est un point de l'arc du cercle $(\mathcal{C}_2)$ qui est situé dans le cercle $(\mathcal{C}_1)$ et B est distinct de Ω_1 et Ω_2 .

On en déduit que les points d'intersection Ω_1 et Ω_2 des cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sont situés de part et d'autre de la droite $(JB) = (AB)$.

$$\begin{aligned}
 (*) \quad 2\vec{JB} + \vec{JA} = \vec{0} &\iff 2\vec{JI} + 2\vec{IB} + \vec{JI} + \vec{IA} = \vec{0} \\
 &\iff 3\vec{JI} + 4\vec{IB} = \vec{0} \\
 &\iff \vec{IB} = -\frac{3}{4}\vec{JI}
 \end{aligned}$$

III 1

Soit Ω , le centre de la similitude S . Alors Ω vérifie $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Or $((\mathcal{S}), (AB)) = \frac{\pi}{3} [\pi]$. On en déduit que $((\mathcal{S}), (AB)) \equiv (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) [\pi]$.

L'angle formé par la tangente $(\mathcal{S})$ et la corde $[AB]$ a même mesure que l'angle inscrit $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B})$ interceptant cette corde. Donc $\Omega \in (\mathcal{C}_2)$.

De plus, comme $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B})$ est orienté positivement, alors $\Omega = \Omega_1$.

2 Comme $S(A) = B$, alors $A\Omega_1 = 2B\Omega_1$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= A\Omega_1^2 + B\Omega_1^2 - 2A\Omega_1 \cdot B\Omega_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &= A\Omega_1^2 + B\Omega_1^2 - 2(2B\Omega_1) \cdot B\Omega_1 \times \frac{1}{2} \\
 &= A\Omega_1^2 - B\Omega_1^2
 \end{aligned}$$

On en déduit que $AB^2 + B\Omega_1^2 = A\Omega_1^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $AB\Omega_1$ est rectangle en B .

Par conséquent, le centre E du cercle circonscrit au triangle $AB\Omega_1$ est également le milieu de l'hypoténuse $[A\Omega_1]$. Donc les points A , E et Ω_1 sont alignés.

Partie B

I

1 a. • $\vec{BJ} = \frac{2}{3}\vec{BO}$.

En effet, Comme $2\vec{JB} + \vec{JA} = \vec{0}$, alors $2\vec{JB} + \vec{JB} + \vec{BA} = \vec{0}$. Il en résulte que $3\vec{JB} + \vec{BA} = \vec{0}$. D'où $\vec{BJ} = -\frac{1}{3}\vec{BA}$.

• (BO) où $O \in [EF]$, est la médiane du triangle EFB issue de B .

Donc J est le centre de gravité du triangle EFB .

b. Montrons que $EJ = BK$

J étant le centre de gravité du triangle équilatéral EFB , alors $EJ = JB$. Or $JB = BK$. Donc $EJ = BK$.

Montrons que $(\vec{EJ}, \vec{BK}) = 60^\circ$.

$(EJ) \perp (\Omega_1 A)$ et $(BK) \perp (\Omega_1 B)$.

De plus, les angles $(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{BK})$ et $(\overrightarrow{\Omega_1 A}, \overrightarrow{\Omega_1 B})$ étant aigus, on en déduit que $(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{BK}) = (\overrightarrow{\Omega_1 A}, \overrightarrow{\Omega_1 B}) = 60^\circ$

c. Comme $EJ = BK$ et $\overrightarrow{EJ} \neq \overrightarrow{BK}$, il existe une rotation R d'angle $(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{BK}) = 60^\circ$ qui transforme E en B et J en K .

2 Comme le triangle $\Omega_1 EB$ est équilatéral, alors la médiatrice de $[EB]$ passe par le point Ω_1 .

D'autre part, on a $BJ = BK$ et $(JK) \perp (B\Omega_1)$. On en déduit que $(B\Omega_1)$ est la médiatrice de $[JK]$.

Donc les médiatrices des segments $[EB]$ et $[JK]$ se coupent en Ω_1 , centre de la rotation R .

II 1 Le triangle EFB étant équilatéral de centre de gravité J , alors la médiatrice de $[EB]$ passe par les points J et F .

De plus, comme le triangle $\Omega_1 EB$ est équilatéral, alors la médiatrice de $[EB]$ passe par Ω_1 .

Donc les points Ω_1 , J et F sont alignés.

2 $g = T_{\overrightarrow{BA}} \circ R = S_{(EF)} \circ S_{(\Omega_1 B)} \circ S_{(\Omega_1 B)} \circ S_{(\Omega_1 F)} = S_{(EF)} \circ S_{(\Omega_1 F)}$.

g est la composée de deux symétries axiales $S_{(EF)}$ et $S_{(\Omega_1 F)}$ d'axes sécants en F . C'est donc une rotation de centre F .

Partie C

1 (IJ) est l'axe focal de $(\mathcal{H})$.

Le second foyer de l'hyperbole $(\mathcal{H})$ est le point I' , symétrique de I par rapport à J .

A et K sont les sommets de l'hyperbole $(\mathcal{H})$.

Construction de M

Soit M_0 , le point d'intersection de $[I\Omega_1]$ et du cercle directeur $(\mathcal{C}_d)$ associé au foyer I .

M est le point d'intersection de $[I\Omega_1]$ et de la médiatrice de $[I'M_0]$.

En effet,

$$\begin{aligned} MI' - MI &= MM_0 - MI \quad (\text{car } M \text{ est sur la médiatrice de } [I'M_0]) \\ &= IM_0 \\ &= AK \end{aligned}$$

Ce qui prouve que M est un point de l'hyperbole.

2 $(F\Omega_1)$ asymptote de $(\mathcal{H})$

$(J\Omega_1) \perp (I\Omega_1)$ car le triangle $IJ\Omega_1$ est inscrit dans le cercle $(\mathcal{C}_1)$ de diamètre $[IJ]$.

Or $[J\Omega_1]$ est un rayon du cercle principal $(\mathcal{C}_p)$. On en déduit que $(I\Omega_1)$ où I est un foyer de $(\mathcal{H})$ est la tangente à $(\mathcal{C}_p)$ en Ω_1 .

Donc $(J\Omega_1)$ est une asymptote de $(\mathcal{H})$ et d'après II. 1., $(F\Omega_1)$ est asymptote à $(\mathcal{H})$.

(JE) asymptote de $(\mathcal{H})$

(JE) étant le symétrique de $(F\Omega_1)$ par rapport à l'axe focal (JA) est par conséquent la seconde asymptote de $(\mathcal{H})$.

3 a. Comme toute similitude conserve le rapport des distances, alors $(\mathcal{H})$ et $(\mathcal{H}')$ ont même excentricité.

$$\text{D'où } e = \frac{JI}{JK} = 2.$$

b. Asymptotes de $(\mathcal{H}')$

- $S(\Omega_1) = \Omega_1$.
 $S(J) = J'$ où J' est le milieu de $[\Omega_1 K]$.
 Comme $(J\Omega_1)$ est une asymptote de $(\mathcal{H})$ alors $(J'\Omega_1)$ est une asymptote de $(\mathcal{H}')$.
- $S(J) = J'$.
 $S(E) = E'$ où E' est le milieu du segment $[\Omega_1 B]$.
 Comme (EJ) est la seconde asymptote de $(\mathcal{H})$ alors $(E'J')$ est la seconde asymptote de $(\mathcal{H}')$.

Sommets de $(\mathcal{H}')$

- $S(A) = B$.
 Comme A est un sommet de $(\mathcal{H})$, alors B est un sommet de $(\mathcal{H}')$.
- Déterminons le second sommet de $(\mathcal{H}')$.
 $S(J) = J'$.
 Comme J est le centre de $(\mathcal{H})$, alors J' est le centre de $(\mathcal{H}')$.
 On en déduit que le second sommet de $(\mathcal{H}')$ est le point K' , symétrique de B par rapport à J' .