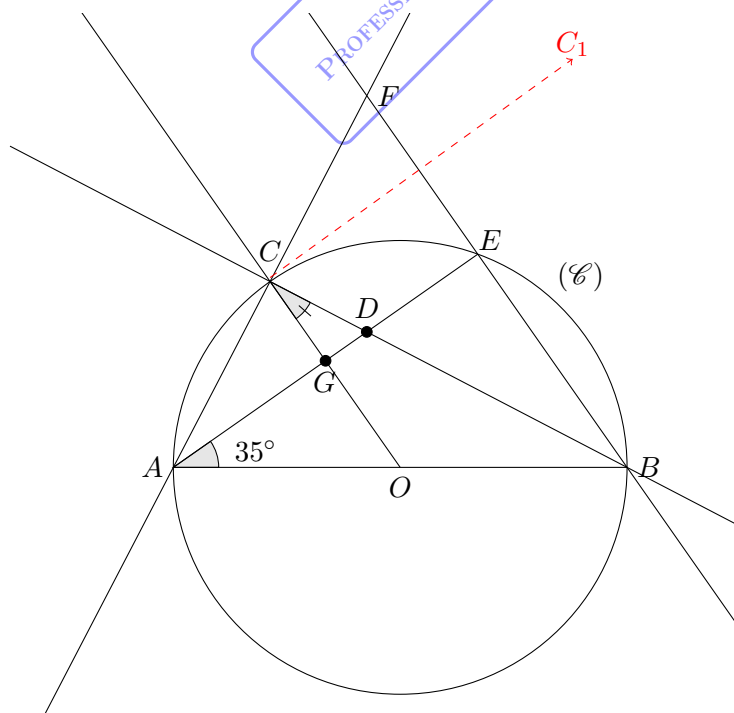


Correction bac 2008 - Série C

Exercice 1



- 1** Les triangles ABC et ABE étant inscrits dans le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$, sont alors rectangles respectivement en C et en E .

$$(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EB}) \equiv (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].$$

$$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CF}) \equiv (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].$$

On en déduit que $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EB}) \equiv (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CF}) [\pi]$.

D'où les points D , E , F et C sont cocycliques.

- 2 a.** Dans le triangle ABE

O est le milieu de $[AB]$.

G est le milieu de $[AE]$.

D'après le théorème des milieux, $(OG) \parallel (BE)$.

Dans le triangle AEF

G est le milieu de $[AE]$.

$(GC) \parallel (EF)$ car $(OG) \parallel (BE)$.

D'après la réciproque du théorème des milieux, C est le milieu de $[AF]$.

Or $(BC) \perp (AF)$. On en déduit que (BC) est la médiatrice de $[AF]$.

Donc $BF = BA$ et le triangle ABF est isocèle en B .

b. Comme $BF = BA$ et $\overrightarrow{BF} \neq \overrightarrow{BA}$, alors il existe une rotation R , d'angle $(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}) = 55^\circ$ et de centre B , qui transforme F en A .

3 a. $S_{BF} \circ S_{OC}$ est la composée de deux symétries axiales d'axes parallèles. C'est donc une translation.

b. GE est la distance entre les axes (OC) et (BF) .

De plus, $\overrightarrow{GE}$ est normal à (OC) (donc à (BF)).

On en déduit que le vecteur de T est $2\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AE}$.

4 a. $R \circ T = S_{BC} \circ S_{BF} \circ S_{BF} \circ S_{OC} = S_{BC} \circ S_{OC}$.

$g = R \circ T$ est la rotation de centre $\Omega = C$ et d'angle $\theta = 2 \times (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CB})$.

Déterminons l'angle de la rotation $g = R \circ T$

Les angles $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BC})$ sont alternes-internes, formés par deux droites (OC) et (FB) parallèles, coupées par la sécante (BC) .

On en déduit que $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} \times 55^\circ = 27,5^\circ$.

Donc $\theta = 55^\circ$.

b. $g(C) = R \circ T(C) = R(C_1) = C$ (À Construire soigneusement).

c. Les deux hauteurs (AE) et (BD) du triangle ABF sont sécantes en D .

On en déduit que D est l'orthocentre du triangle ABF . Par conséquent (FD) est la troisième hauteur du triangle ABF .

Exercice 2

1 a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : $V_n \equiv V_{n+1} [6]$.

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n$.

Initialisation

$V_1 = 4V_0 - 6 = -2$ et $V_2 = 4V_1 - 6 = -14$.

On a bien $V_1 \equiv V_2 [6]$.

La propriété $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

Hérédité

Supposons $\mathcal{P}_n$ c'est à dire supposons que $V_n \equiv V_{n+1} [6]$.

Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $V_{n+1} \equiv V_{n+2} [6]$.

On a $V_n \equiv V_{n+1} [6]$.

En multipliant par 4 les deux membres de l'égalité précédente, on a : $4V_n \equiv 4V_{n+1} [6]$.

En retranchant 6 aux deux membres de l'égalité précédente, on a : $4V_n - 6 \equiv 4V_{n+1} - 6 [6]$

D'où $V_{n+1} \equiv V_{n+2} [6]$.

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} \equiv V_n [6]$.

Donc, modulo 6, la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est périodique, de période 1.

2 a. $4^0 \equiv 1 [6]$. Le reste de la division euclidienne de 4^0 par 6 est 1.
 $4^1 \equiv 4 [6]$. Le reste de la division euclidienne de 4^1 par 6 est 4.
 $4^2 = 16 \equiv 4 [6]$. Le reste de la division euclidienne de 4^2 par 6 est 4.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $4^n \equiv 4 [6]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : $4^n \equiv 4 [6]$.

Initialisation

Les propriétés $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vérifiées (voir ci-dessus).

Hérédité

Supposons $\mathcal{P}_n$ c'est à dire supposons que $4^n \equiv 4 [6]$.

Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $4^{n+1} \equiv 4 [6]$.

On a : $4^n \equiv 4 [6]$

Alors $4^n \times 4 \equiv 16 [6] \equiv 4 [6]$

D'où : $4^{n+1} \equiv 4 [6]$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc :

Si $n = 0$, le reste de la division euclidienne de 4^0 par 6 est 1.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, le reste de la division euclidienne de 4^n par 6 est 4.

b. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = 4^n [6]$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : $V_n = 4^n [6]$.

Initialisation

Comme $V_0 = 1$ et $1 \equiv 4^0 [6]$, alors $V_0 \equiv 4^0 [6]$.

La propriété $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

Hérédité

Supposons $\mathcal{P}_n$ c'est à dire supposons que $V_n \equiv 4^n [6]$.

Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $V_{n+1} \equiv 4^{n+1} [6]$.

On a $V_n \equiv 4^n [6]$

En multipliant les deux membres de l'égalité par 4, on a : $4V_n \equiv 4^{n+1} [6]$

En retranchant 6 aux deux membres de l'égalité précédente, on a : $4V_n - 6 \equiv 4^{n+1} - 6 [6]$

Or $4V_n - 6 = V_{n+1}$ et $4^{n+1} - 6 \equiv 4^{n+1} [6]$.

On en déduit que $V_{n+1} \equiv 4^{n+1} [6]$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. D'après 2.a., $4^{1956} \equiv 4 [6]$ et d'après 2.b., $V_{1956} \equiv 4^{1956} [6]$. On en déduit que $V_{1956} \equiv 4 [6]$.

3 a. $V_0 = 1$ et $V_1 \equiv V_2 \equiv \dots \equiv V_n \equiv 4 [6]$, alors $S_n \equiv (1 + 4n) [6]$.

Cela signifie que le reste de la division euclidienne de S_n par 6 correspond au reste de la division euclidienne de $1 + 4n$ par 6.

Étudions le reste de la division euclidienne de $1 + 4n$ par 6

- Si $n = 0$, $S_0 \equiv 1 [6]$. Le reste de la division euclidienne de S_0 par 6 est 1.
- Si $n = 1$, $S_1 \equiv 5 [6]$. Le reste de la division euclidienne de S_1 par 6 est 5.
- Si $n = 2$, $S_2 \equiv 9 [6] \equiv 3 [6]$. Le reste de la division euclidienne de S_2 par 6 est 3.
- Si $n = 3$, $S_3 \equiv 13 [6] \equiv 1 [6]$. Le reste de la division euclidienne de S_3 par 6 est 1.

Déduisons les restes suivant les valeurs de n

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Alors n peut s'écrire $n = 3k$, $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que :

- Si $n = 3k$, $S_{3k} \equiv 1 + 4 \times 3k [6] \equiv 1 + 12k [6] \equiv 1 [6]$. Le reste de la division euclidienne de S_{3k} par 6 est 1.
- Si $n = 3k + 1$, $S_{3k+1} \equiv 1 + 4(3k + 1) [6] \equiv 5 + 12k [6] \equiv 5 [6]$. Le reste de la division euclidienne de S_{3k+1} par 6 est 5.
- Si $n = 3k + 2$, $S_{3k+2} \equiv 1 + 4(3k + 2) [6] \equiv 9 + 12k [6] \equiv 3 [6]$. Le reste de la division euclidienne de S_{3k+2} par 6 est 3.

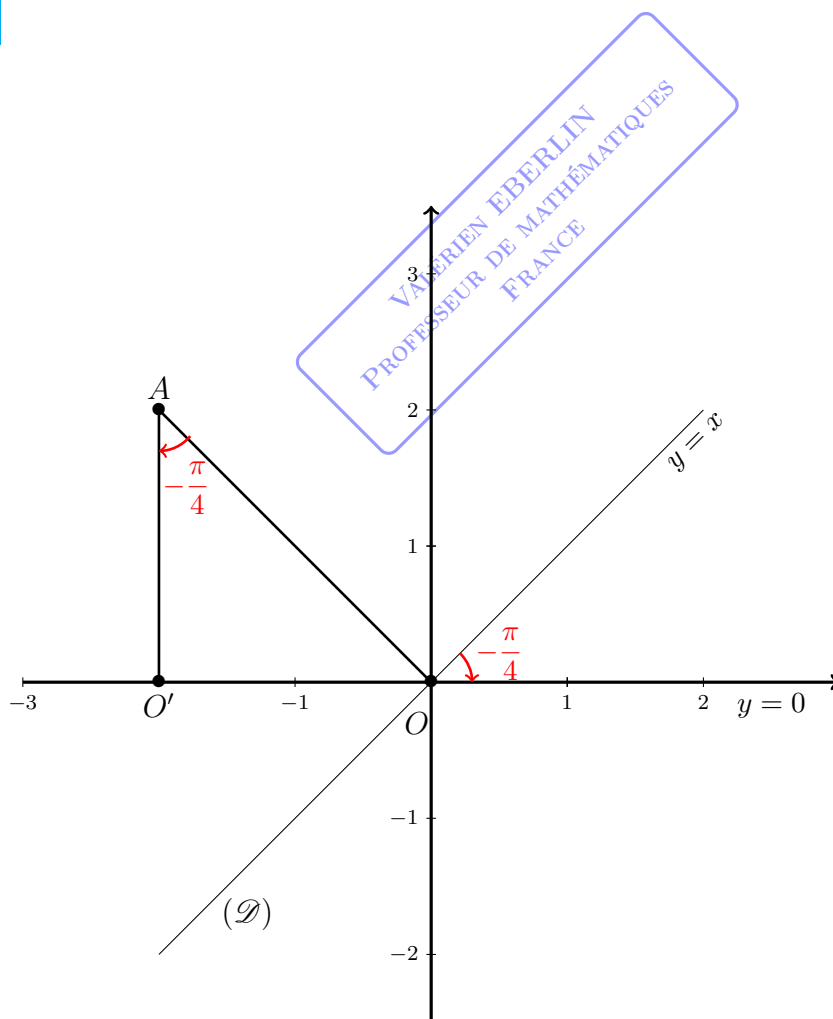
¶

b. $1956 = 3 \times 652$.

D'après 3. a., le reste de division euclidienne de S_{1956} par 6 est 1.

VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
FRANCE

Problème



A

1. Soit O' le projeté orthogonal A sur la droite $(O, \vec{i})$.
Comme O est le projeté orthogonal de A sur la droite $(\mathcal{D})$, alors $S(O) = O'$.
D'où $\theta \equiv (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ et $k = \frac{AO'}{AO} = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. L'expression de la similitude S est donnée par : $z' - z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(-\frac{\pi}{4})} (z - z_A)$ où $z_A = -2 + 2i$. D'où $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) z - 2$.

B

1. La fonction $x \mapsto \frac{|x^2 - 3x|}{x + 1}$ est définie pour $x > -1$.
La fonction $x \mapsto x - (x + 1) \ln |x + 1|$ est définie pour $x < -1$.
Et $f(-1)$ existe.
Donc $E_f = \mathbb{R}$.
2. Exprimons d'abord la fonction f en fonction des valeurs prises par les valeurs absolues $|x^2 - 3x|$ et $|x + 1|$.

x	-1	0	3	$+\infty$
$ x^2 - 3x $	$x^2 - 3x$	0	$-x^2 + 3x$	$x^2 - 3x$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$ x + 1 $	$-x - 1$	0	$x + 1$

$$\text{D'où : } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x}{x + 1} & \text{si } x \in]-1; 0] \cup [3; +\infty[\\ \frac{-x^2 + 3x}{x + 1} & \text{si } x \in [0; 3] \\ -1 & \text{si } x = -1 \\ x - (x + 1) \ln(-x - 1) & \text{si } x \in]-\infty; -1[\end{cases}$$

Continuité de f en -1

$\lim_{x \rightarrow -1_-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1_-} (x - (x + 1) \ln(-x - 1)) = \lim_{u \rightarrow 0_+} (-1 - u + u \ln u) = -1$ où l'on a posé $u = -x - 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1_+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1_+} \frac{x^2 - 3x}{x + 1} = +\infty$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -1_-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1_+} f(x)$, alors la fonction f n'est pas continue en -1 .

La fonction f est continue sur $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$.

Dérivabilité de f

- Dérivabilité de f en -1

Comme la fonction f n'est pas continue en -1 , alors elle n'est pas dérivable en -1 .

- Dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{x - 3}{x + 1} = -3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{-x + 3}{x + 1} = 3.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$, alors la fonction f n'est pas dérivable en 0 .

- Dérivabilité de f en 3

$$\lim_{x \rightarrow 3_-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3_-} \frac{-x}{x + 1} = -\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3_+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3_+} \frac{x}{x + 1} = \frac{3}{4}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 3_-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \neq \lim_{x \rightarrow 3_+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$, alors la fonction f n'est pas dérivable en 3 .

3. La fonction f est dérivable sur $] -\infty; -1[\cup] -1; 0[\cup] 0; 3[\cup] 3; +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} & \text{si } x \in] -1; 0[\cup] 3; +\infty[\\ -\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} & \text{si } x \in] 0; 3[\\ -\ln(-x-1) & \text{si } x \in] -\infty; -1[\end{cases}$$

Tableau de signes.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	3	$+\infty$
$\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$				-			+
$-\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$				+	0	-	
$-\ln(-x-1)$		-	0	+			
$f'(x)$		-	0	+		-	+

Tableau de variation de f .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - (x+1) \ln(-x-1)) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (u \ln u) \left(-\frac{1}{u \ln u} - \frac{1}{\ln u} + 1 \right) = +\infty$ où l'on a posé $u = -x-1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x}{x+1} = +\infty$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-1	$+\infty$		1	$+\infty$

4. $f(-4, 6) \approx 0,011$ et $f(-4, 5) \approx -0,11$.

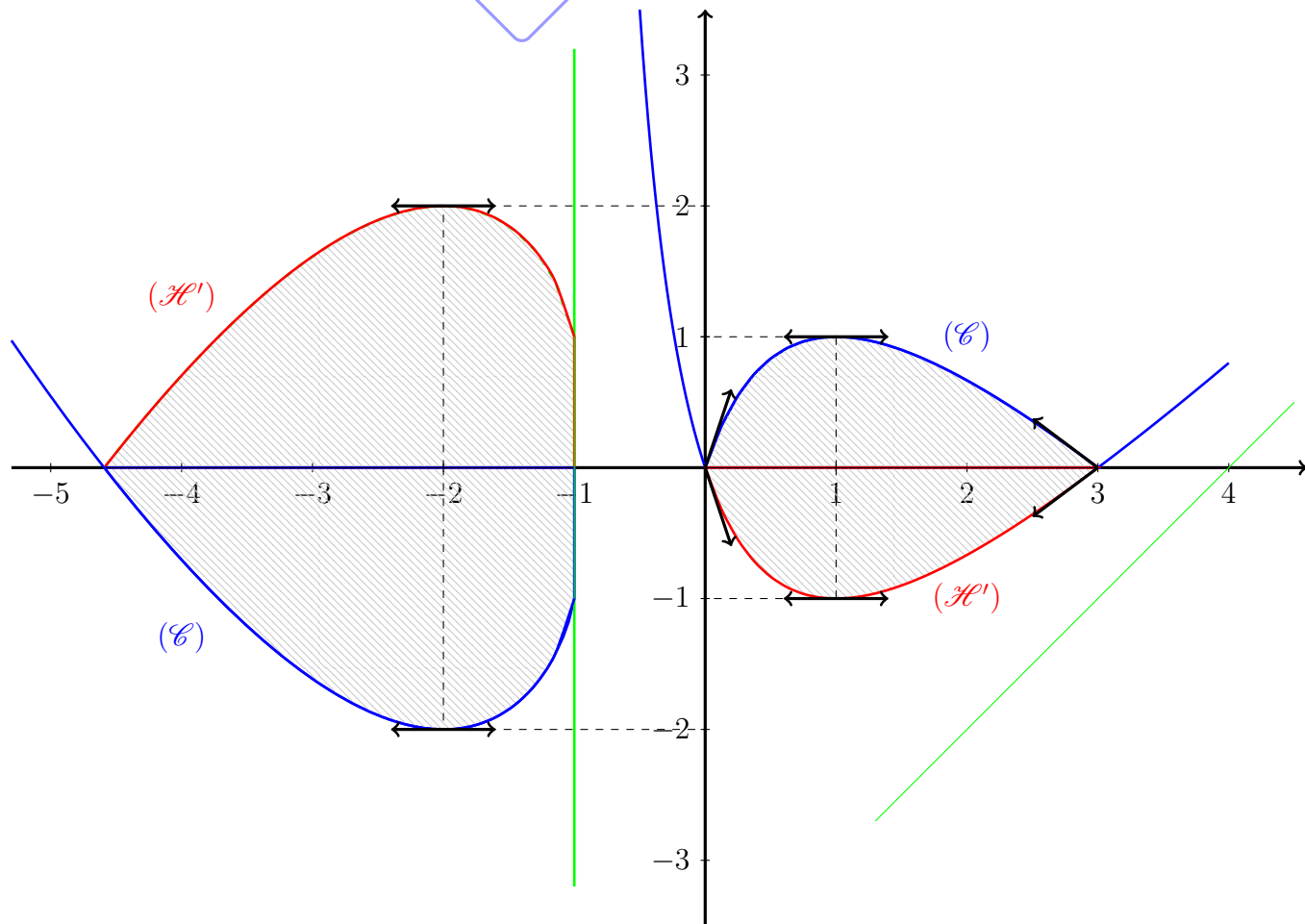
La fonction f est continue et strictement décroissante sur $] -4, 6; -4, 5[$.

De plus, $f(-4, 6)f(-4, 5) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in] -4, 6; -4, 5[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Branches infinies

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \ln|x+1| - \frac{\ln|x+1|}{x} \right) = -\infty$. La courbe $(\mathcal{C})$ admet une direction asymptotique de direction (Oy) en $-\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2 - 3x}{x+1} = +\infty$. La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C})$ vers -1_+ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x+1} = 1$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x+1} = -4$. La courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 4$ en $+\infty$.



5. a. Voir sur la figure.
b.

Soit g , la fonction associée à la courbe représentative $(\mathcal{H}')$. Alors $g(x) = -f(x)$ pour tout $x \in]\alpha; -1[\cup [0; 3]$.

D'où :

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \int_{\alpha}^{-1} (g(x) - f(x)) dx + \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx \\
 &= -2 \int_{\alpha}^{-1} f(x) dx + 2 \int_0^3 f(x) dx \\
 &= -1 + \alpha^2 + 2 \int_{\alpha}^{-1} (x+1) \ln(-x-1) dx + 2 \int_0^3 \frac{-x^2 + 3x}{x+1} dx
 \end{aligned}$$

Calculons $\int_{\alpha}^{-1} (x+1) \ln(-x-1) dx$

Pour cela, déterminons d'abord une primitive de la fonction : $x \mapsto (x+1) \ln(-x-1)$.

Si l'on choisit $\begin{cases} u(x) = \ln(-x-1) \\ v'(x) = x+1 \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} + x \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int (x+1) \ln(-x-1) dx &= \frac{x^2+2x}{2} \ln(-x-1) - \int \frac{x^2+2x}{2(x+1)} dx + K_0 \quad \text{où } K_0 \text{ est une constante} \\ &= \frac{x^2+2x}{2} \ln(-x-1) - \frac{1}{2} \int \left(x+1 - \frac{1}{x+1}\right) dx + K_0 \\ &= \frac{2(x+1)^2 \ln(-x-1) - x^2 - 2x}{4} + K_1 \quad \text{où } K_1 \text{ est une constante} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{2(x+1)^2 \ln(-x-1) - x^2 - 2x}{4} = \frac{1}{4}$, on en déduit que

$$\int_{\alpha}^{-1} (x+1) \ln(-x-1) dx = \frac{1}{4} - \frac{2(\alpha+1)^2 \ln(-\alpha-1) - \alpha^2 - 2\alpha}{4}.$$

Calculons $\int_0^3 \frac{-x^2+3x}{x+1} dx$

$$\frac{-x^2+3x}{x+1} = -x+4 - \frac{4}{x+1}. \text{ D'où :}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{-x^2+3x}{x+1} dx &= \int_0^3 \left(-x+4 - \frac{4}{x+1}\right) dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + 4x - 4 \ln|x+1|\right]_0^3 \\ &= \frac{15 - 16 \ln 2}{2} \end{aligned}$$

D'où $A_0 = \frac{3\alpha^2 + 2\alpha + 29 - 32 \ln 2 - 2(\alpha+1)^2 \ln(-\alpha-1)}{2} \approx 13,95$.

Remarque

Pour le calcul de l'intégrale $\int_{\alpha}^{-1} (x+1) \ln(-x-1) dx$, par intégration par parties, il n'est pas correct d'écrire :

$$\int_{\alpha}^{-1} (x+1) \ln(-x-1) dx = \left[\frac{x^2+2x}{2} \ln(-x-1) \right]_{\alpha}^{-1} - \int_{\alpha}^{-1} \frac{x^2+2x}{2(x+1)} dx.$$

En effet, la fonction $x \mapsto \frac{x^2+2x}{2} \ln(-x-1)$ n'existe pas en -1 . Cependant, en passant par le calcul global de la primitive de $(x+1) \ln(-x-1)$, on contourne ce problème.

6. a. Comme toute similitude de rapport k multiplie l'aire de la transformée par k^2 , la similitude S multiplie l'aire de transformée par $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

D'où $A_n = \frac{1}{2}A_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 A_{n-2} = \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^n A_0$.

- b. La suite $(A_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$S_n = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n = \frac{A_0 \times (1 - (\frac{1}{2})^{n+1})}{1 - \frac{1}{2}} = 2A_0(1 - (\frac{1}{2})^{n+1})$$

- c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2A_0 \approx 27,89$ (arrondi au centième près).