

Correction bac 2007 - Série C

Exercice 1

1 Étude des variations de f_1

La fonction $t \mapsto \cos t$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est périodique, de période 2π . On peut réduire son domaine d'étude à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

De plus, f_1 est une fonction paire. Son domaine d'étude peut être à nouveau réduit à l'intervalle $[0; \pi]$.

Pour tout $t \in [0, \pi]$, $f_1'(t) = -\sin t$.

t	0		π
$f_1'(t)$	0	—	0

D'où le tableau de variation :

t	0	π
$f_1'(t)$	0	0
$f_1(t)$	1	-1

Étude des variations de f_2

La fonction $t \mapsto \sin 2t + 2 \sin t$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est périodique, de période 2π . On peut réduire son domaine d'étude à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

De plus, f_2 est une fonction impaire. Son domaine d'étude peut être à nouveau réduit à l'intervalle $[0; \pi]$.

Pour tout $t \in [0, \pi]$, $f_2'(t) = 2(\cos 2t + \cos t) = 4 \cos(\frac{3t}{2}) \cos(\frac{t}{2})$.

f_2' s'annule sur $[0; \pi]$ si $t = \frac{\pi}{3}$ ou si $t = \pi$.

D'où le tableau de signes :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\cos(\frac{3t}{2})$		+	0	—	
$\cos(\frac{t}{2})$		+		+	0
$f_2'(t)$		+	0	—	0

D'où le tableau de variation :

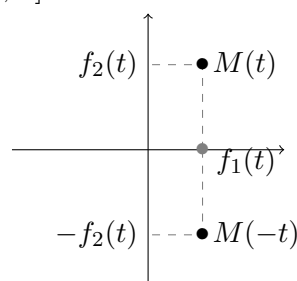
t	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'_2(t)$	+	0	0
$f_2(t)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0

2 Notons pour $t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ le point de coordonnées $(f_1(t), f_2(t))$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ existe et $M(t+2\pi) = M(t)$. Ce qui signifie qu'on obtient la courbe complète de f lorsque t décrit $[-\pi, \pi]$.

L'étude de f peut alors être effectuée sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

$$\text{D'autre part, } M(-t) = \begin{pmatrix} f_1(-t) \\ f_2(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ -f_2(t) \end{pmatrix}$$



Et la fonction $t \mapsto -t$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-\pi, 0]$.

Le domaine d'étude de f peut donc à nouveau être réduit à l'intervalle $[0, \pi]$.

Interprétation : on construit l'arc de f quand t décrit $[0, \pi]$, puis on obtient la courbe complète de f par réflexion d'axe (Oy) .

3 Tableau de variation

t	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'_1(t)$	0	—	0
$f_1(t)$	1		—1
$f_2(t)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0
$f'_2(t)$	+	0	—

4

Tangentes parallèles à aux axes

- Tangentes parallèles à l'axe (Ox)

$$f'_2(t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{3} \text{ et } t = \pi.$$

En les points $M(\frac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ et $M(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la courbe admet une tangente parallèle à (Ox) .

- Tangentes parallèles à l'axe (Oy)

$$f_1'(t) = 0 \iff t = 0 \text{ et } t = \pi.$$

En les points $M(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la courbe admet une tangente parallèle à (Oy) .

Points d'intersections avec les axes

- Points d'intersections avec l'axe (Oy)

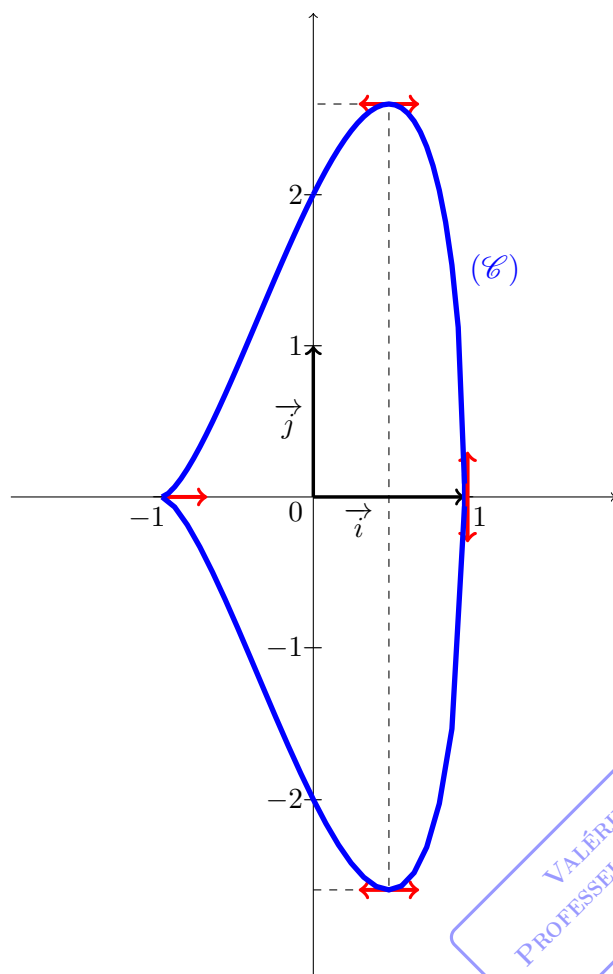
$$f_1(t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{2}.$$

La courbe rencontre l'axe (Oy) au point $M(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

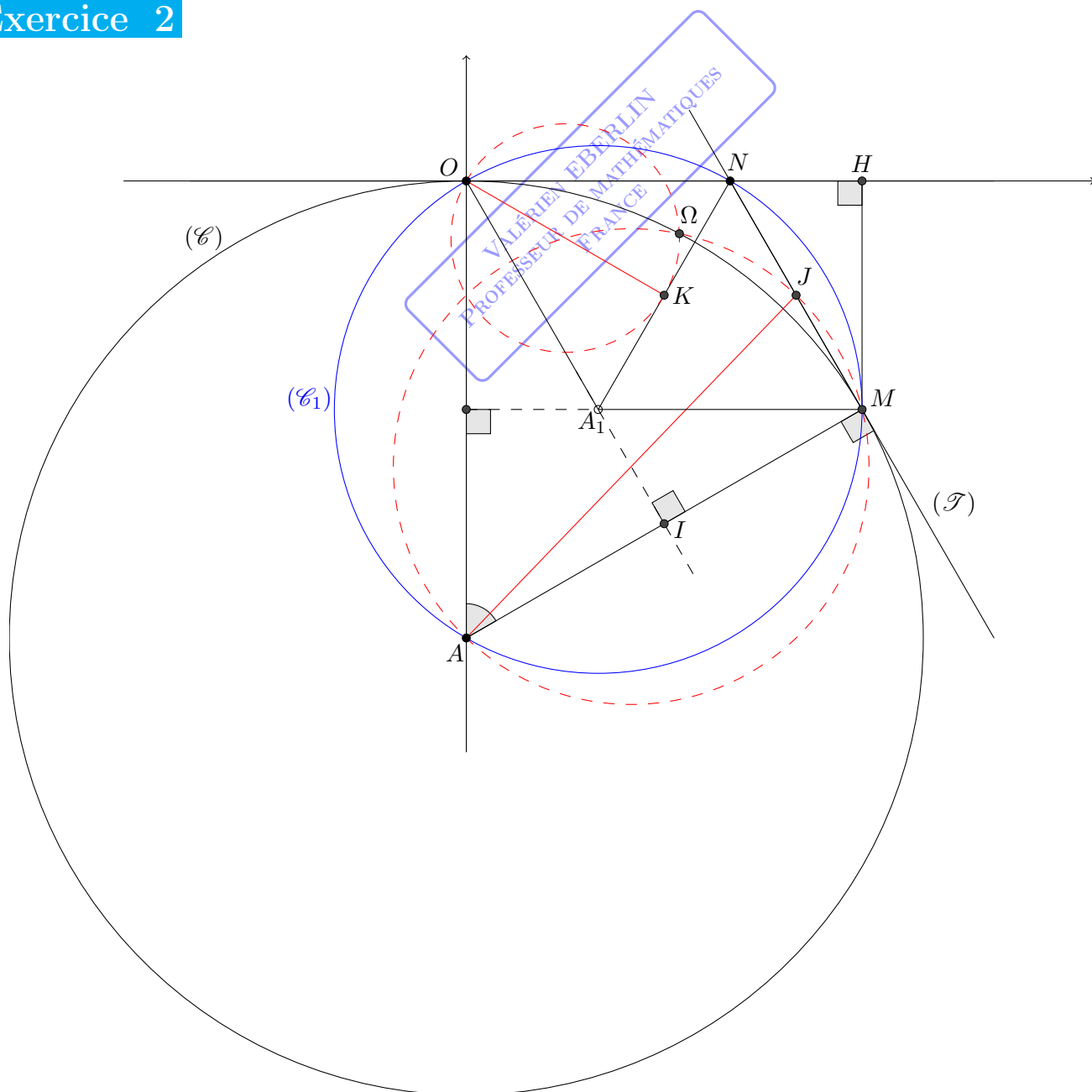
- Points d'intersections avec l'axe (Ox)

$$f_2(t) = \sin(2t) + 2\sin(t) = 2\sin t(\cos t + 1) = 0 \iff t = 0 \text{ et } t = \pi.$$

La courbe rencontre l'axe (Ox) aux points $M(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$



Exercice 2



- 5** $(AO) \perp (NO)$ et $(AM) \perp (NM)$ alors $\overrightarrow{(AO, AM)} \equiv \overrightarrow{(NO, NM)} [\pi]$.

Donc les points O , N , M et A appartiennent à un cercle ($\mathcal{C}_1$).

Le centre A_1 du cercle $(\mathcal{C}_1)$ est le point d'intersection des médiatrices de $[AO]$ et de $[AM]$.

- 6** Le triangle AMO est équilatéral car c'est un triangle isocèle ayant un angle de 60° . Il en résulte que A_1 est également le centre de gravité de ce triangle.

Angle et rapport de S_1

$$\overline{S_1(O)} = O.$$

De plus, comme S_1 préserve les centres des cercles, alors $S_1(A) = A_1$.

$$\text{D'où } k_1 = \frac{OA_1}{OA} = \frac{\frac{2}{3}OI}{OA} = \frac{2}{3} \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\theta_1 = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_1}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi].$$

- 7 a.** $(NH) \perp (OA)$ et $(NM) \perp (AM)$.

Les angles $(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NH})$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO})$ étant des angles aigus à côtés perpendiculaires, on en déduit que : $(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NH}) \equiv (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Angle et rapport de S_2

$$S_2(N) = N \text{ et } S_2(M) = H.$$

$$\text{D'où } k_2 = \frac{NH}{NM} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \text{ et } \theta_2 = (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NH}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

- b.** Les triangles NA_1M et NOA_1 étant équilatéraux, on a :

$$S_2 \circ S_1(A) = S_2(A_1) = J \text{ où } J \text{ est le milieu du segment } [NM].$$

$$S_2 \circ S_1(O) = S_2(O) = K \text{ où } K \text{ est le milieu du segment } [NA_1].$$

- c.** $S_2 \circ S_1$ est une similitude plane directe d'angle $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$.

Comme $S_2 \circ S_1(\Omega) = \Omega$ et $S_2 \circ S_1(O) = K$, alors $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega K}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Donc Ω est un point du cercle de diamètre $[OK]$.

De plus, comme $S_2 \circ S_1(\Omega) = \Omega$ et $S_2 \circ S_1(A) = J$, alors $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega J}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Donc Ω est un point du cercle de diamètre $[AJ]$.

D'où Ω est le point d'intersection du cercle de diamètre $[OK]$ et du cercle de diamètre $[AJ]$ et est tel que $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega J})$ soit orienté positivement.

Problème

- A 1** Le coefficient dominant de p étant strictement positif,

$$\forall x \in \mathbb{R}, p(x) > 0 \text{ si } \Delta = a^2 - 4 < 0.$$

Le tableau de signes de Δ donne :

a	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $p > 0$ si $a \in]-2; 2[$.

- 2** p admet une racine double si $\Delta = 0$ c'est à dire si $a = 2$ ou $a = -2$.

Pour $a = 2$, la racine double associée est $x = 1$.

Pour $a = -2$, la racine double associée est $x = -1$.

- B 1** Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'_a(x) = -\frac{p(x)}{x^2}$.

Comme $a \in [-2; 2]$, alors $p(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où $g'_a(x) = -\frac{p(x)}{x^2} \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2 Tableau de variation de g_a pour $a \in [-2; 2]$.Limite aux bornes

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (ax \ln x + 1 - x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{a \ln x}{x} + \frac{1}{x^2} - 1 \right) = -\infty$$

Tableau de variation de g_a pour $a \in]-2; 2[$. $g'_a < 0$ pour $a \in]-2; 2[$.

x	0	$+\infty$
$g'_a(x)$		—
$g_a(x)$	$+\infty$	$-\infty$

Tableau de variation de g_a pour $a = -2$. $g'_a < 0$ pour $a = -2$.

x	0	$+\infty$
$g'_{-2}(x)$		—
$g_{-2}(x)$	$+\infty$	$-\infty$

Tableau de variation de g_a pour $a = 2$. $g'_a \leq 0$ pour $a = 2$ et s'annule pour $x = 1$.

x	0	1	$+\infty$
$g'_2(x)$		0	—
$g_2(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

3 Pour tout $a \in [-2; 2]$, la fonction g_a est strictement décroissante sur $I =]0; 1[$ et $g_a(1) = 0$. Donc $g_a > 0$ sur I .

C 1 Tableau de variation de r .

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $r'(x) = \frac{2-x}{x}$.

D'où le tableau de signes :

x	0	2	$+\infty$
$r'(x)$		+	-

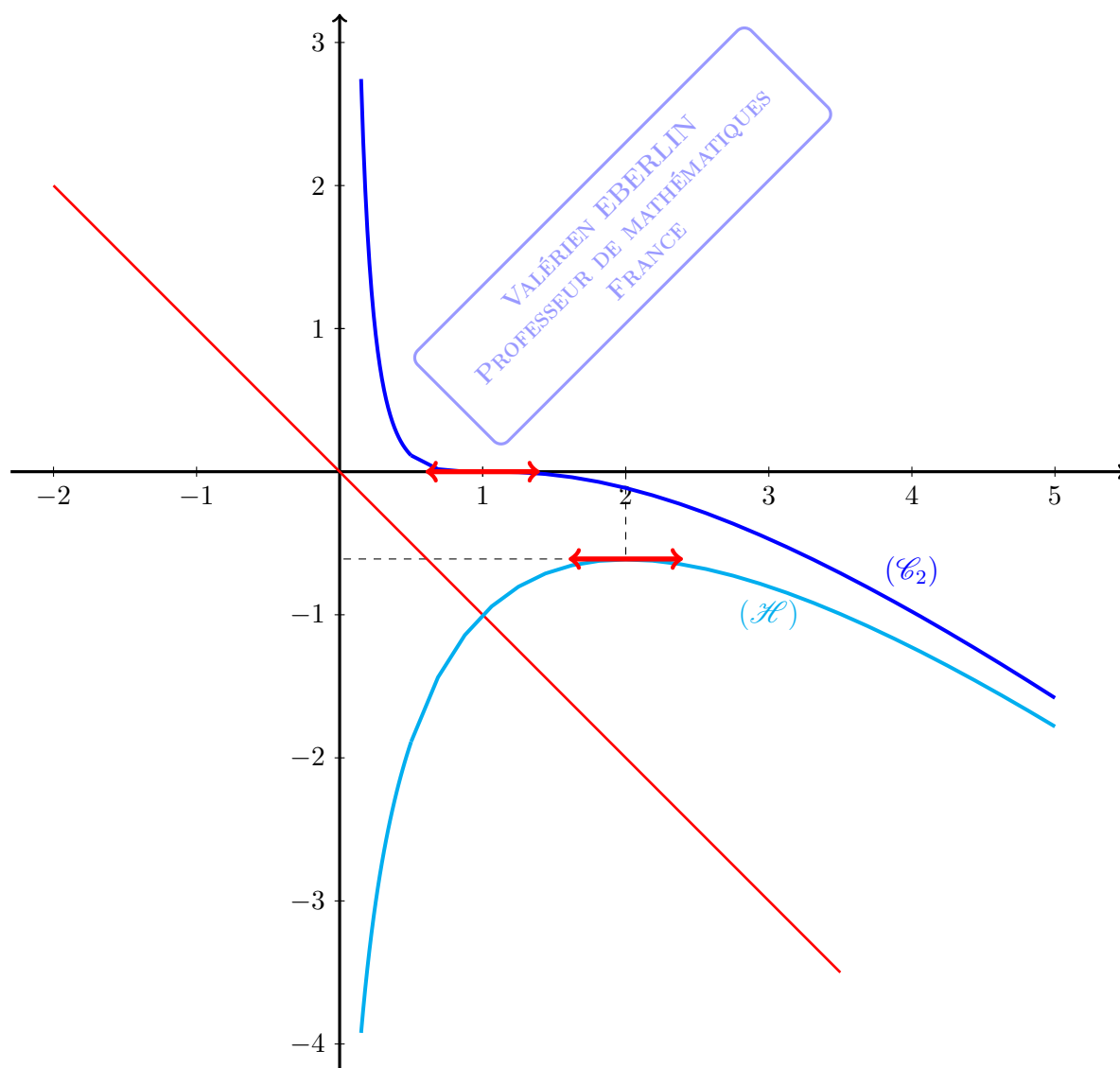
et le tableau de variation :

x	0	2	$+\infty$
$r'(x)$		+	-
$r(x)$		$2 \ln 2 - 2$	

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_2(x) - r(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors la courbe $(\mathcal{H})$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_2)$

2 Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g_2(x) - r(x) = \frac{1}{x} > 0$. La courbe $(\mathcal{C}_2)$ est au dessus de la courbe $(\mathcal{H})$ sur $x \in]0, +\infty[$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(x)}{x} = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) + x = +\infty$. La courbe $(\mathcal{H})$ présente une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = -x$ en $+\infty$.

**D 1**

Montrons que $0 < \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in I, g_2(x) > 0 &\implies \frac{2x \ln x + 1 - x^2}{x} > 0 \\ &\implies 2x \ln x + 1 - x^2 > 0 \text{ puisque } x > 0 \\ &\implies 2x \ln x > x^2 - 1 \end{aligned}$$

En divisant les deux membres de la dernière inégalité obtenue par $2(x^2 - 1)$ (qui est strictement négatif sur I), il en résulte que : $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$.

D'autre part, comme $\ln x < 0$ et $x^2 - 1 < 0$ pour tout $x \in I$, alors $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} > 0$ pour tout $x \in I$.

D'où $0 < \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$ pour tout $x \in I$.

Montrons que $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$

Soit F une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{t \ln t}{t^2 - 1}$, alors $f(x) = F(x) + k$ où k est une constante.

D'où $f'(x) = F'(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$. Il en résulte que $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$.

Montrons que $0 < f(x) < \frac{1}{2}$.

$$\forall t \in I, \quad 0 < \frac{t \ln t}{t^2 - 1} < \frac{1}{2}$$

Par passage à l'intégrale, $0 < \int_0^x \frac{t \ln t}{t^2 - 1} dt < \int_0^x \frac{1}{2} dx$ pour tout $x \in]0; 1[$

D'où $0 < f(x) < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}$.

2 Posons $\varphi(x) = h(x) - x$.

$$\text{Pour tout } x \in I, \quad \varphi'(x) = h'(x) - 1 = \frac{x \ln x}{x^2 - 1} - 1.$$

Signe de φ'

Comme $0 < \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$, alors $-1 < \frac{x \ln x}{x^2 - 1} - 1 < -\frac{1}{2}$. D'où $-1 < \varphi'(x) < -\frac{1}{2}$.

$\forall x \in I \quad \varphi'(x) < 0$.

On en déduit que φ est strictement décroissante sur I .

Tableau de variation

x	0	1
$\varphi'(x)$		—
$\varphi(x)$		

Calculons les limites aux bornes

Comme pour tout $x \in I$, $h(x) > 0$, alors $\varphi(x) > -x$.

Par passage à la limite, $\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0+} -x$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) \geq 0$.

D'autre part, comme pour tout $x \in I$, $h(x) < \frac{1}{2}$, alors $\varphi(x) < \frac{1}{2} - x$.

Par passage à la limite, $\lim_{x \rightarrow 1-} \varphi(x) \leq \lim_{x \rightarrow 1-} \left(\frac{1}{2} - x\right) = -\frac{1}{2}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1-} \varphi(x) < 0$.

Montrons que h admet un point fixe x_0

La fonction φ est continue sur I (puisque dérivable sur I), strictement décroissante sur I .

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) \geq 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1-} \varphi(x) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $x_0 \in I$ tel que $\varphi(x_0) = 0$ c'est à dire $h(x_0) = x_0$.

3 a) Notons $\mathcal{P}_n$, la propriété : $0 < u_n < \frac{1}{2}$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$.

Initialisation

$u_0 = \frac{1}{3} \in I$. D'où $0 < u_0 < \frac{1}{2}$

Donc la propriété $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

Hérédité

Supposons $\mathcal{P}_n$ c'est à dire supposons : que $0 < u_n < \frac{1}{2}$.

Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que : $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$.

On a : $0 < u_n < \frac{1}{2}$.

Par définition de la fonction h , d'après D.2., $0 < h(u_n) < \frac{1}{2}$.

D'où $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$.

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n .

Montrons que $|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0|$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

h est continue et dérivable sur I .

De plus, $|h'(x)| < \frac{1}{2}$ pour tout $x \in I$.

D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall x \in I, \forall y \in I, |h(x) - h(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

Comme $x_0 \in I$ et $u_n \in I$, on peut appliquer l'inégalité précédente en $x = u_n$ et $y = x_0$.

On a alors :

$$|h(u_n) - h(x_0)| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0|$$

Or $h(u_n) = u_{n+1}$ par définition de la suite (u_n) et $h(x_0) = x_0$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0|$.

b) Soit $\mathcal{P}_n$, la propriété $|u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - x_0|$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n$.

Initialisation

D'après 3. a., $|u_1 - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_0 - x_0|$.

D'où, $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

Hérédité

Supposons $\mathcal{P}_n$ c'est à dire supposons que $|u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - x_0|$.

Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $|u_{n+1} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - x_0|$.

D'après 3. a., $|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0|$ et par hypothèse de récurrence, $|u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - x_0|$.

Ainsi, $|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - x_0| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - x_0|$.

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\frac{1}{3} - x_0\right|.$

Passage à la limite, $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - x_0| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\frac{1}{3} - x_0\right| = 0$

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - x_0| = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0$.

d) $0 < x_0 < 1$.

Alors $-\frac{2}{3} < \frac{1}{3} - x_0 < \frac{1}{3}$. D'où la majoration $|\frac{1}{3} - x_0| < \frac{2}{3}$.

Ainsi, $|u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\frac{1}{3} - x_0\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{2}{3}$.

Déterminons le plus petit entier n_0 tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} \frac{2}{3} \leq 10^{-2}$.

Par croissance du logarithme, on a : $-n_0 \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 \leq -2 \ln 10$.

D'où $n_0 \geq \frac{2 \ln 10 + \ln 2 - \ln 3}{\ln 2} (\approx 6,059)$.

Donc $n_0 = 7$.