

Sujet bac 2018 - Série C

Exercice 1 4 points

On considère le système d'équation (S) défini par :

$$(S) : \begin{cases} x \equiv 2 [36] \\ x \equiv 3 [25] \end{cases}$$

- 1** Montrer que le système (S) est équivalent à l'équation $(E) : 36a - 25b = 1$ où a et b désignent des entiers relatifs.
- 2** Vérifier que le couple $(-9, -13)$ est une solution de E .
- 3** Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E') : 36a \equiv 1 [25]$.
- 4** Donner l'inverse modulo 25 de 36.
- 5** En déduire les solutions de (E') .
- 6**
 - a.** Déterminer les solutions de l'équation (E) .
 - b.** En déduire les solutions du système (S) telles que $0 < x < 50$.

Exercice 2 8 points

Dans le plan orienté $(\mathcal{P})$, on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

E, F, G et H désignent les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD], [DA]$.

$(\mathcal{C}_1)$ est le cercle circonscrit au triangle ABD .

I est le symétrique de O par rapport à G .

- 1** Faire une figure que l'on complètera. On prendra $AB = 4$ cm et on placera (AB) horizontalement.
- 2** Soit (Γ) l'hyperbole de rectangle fondamental le carré $ABCD$ et d'axe non focal la droite (EG) .
 - a.** Préciser le foyer J de (Γ) situé sur la demi-droite $[OF)$.
 - b.** Préciser la directrice $(\mathcal{D})$ de (Γ) associée au foyer J .
 - c.** Construire le point K de (Γ) situé sur le segment $[JB]$.
 - d.** Déterminer la demi-droite asymptote de (Γ) située dans la portion du plan délimitée par les demi-droites $[OF)$ et $[OG)$.
 - e.** Construire la branche (Γ_0) de (Γ) située dans la portion du plan délimitée par les demi-droites $[OF)$ et $[OG)$.
- 3** Soit S la similitude plane indirecte d'axe la droite (AC) de rapport 2, qui transforme le point F en le point I .
Démontrer que son centre est O .
- 4** Soit (Γ') l'image de (Γ) par S .

- a. Montrer que (Γ') est une hyperbole équilatère.
- b. Trouver l'excentricité de (Γ') .
- c. Construire le cercle principal $(\mathcal{C}_2)$ de (Γ') .
- d. Démontrer que (Γ) et (Γ') ont les mêmes asymptotes.
- e. Déterminer l'axe focal de (Γ') .
- f. Construire l'image J' du foyer J de (Γ) .
- g. Construire l'image $(\mathcal{C}'_1)$ du cercle $(\mathcal{C}_1)$ par S .
- h. Construire l'image (Γ'_0) de (Γ_0) par S .

Exercice 3

5 points

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = xe^x - 1$.

- 1 Calculer la dérivée g' de g .
- 2 Dresser le tableau de variation de g . On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
- 3
 - a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $]\frac{1}{2}; 1[$.
 - b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - \ln x$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 4 Calculer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.
- 5 Montrer que la dérivée f' de f est $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
- 6
 - a. Dresser le tableau de variation de f . On admet que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) .
 - b. Montrer que f admet un minimum $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.
- 7 Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. On prendra $\alpha = 0,6$ et $f(\alpha) = 2,3$.

Exercice 4

3 points

Soit la série statistique à deux caractères (X, Y) donnée par le tableau à double entrée ci-dessous.

X \ Y	Y		
	1	2	3
2	2	0	3
3	1	3	4

- 1 Déterminer les série marginales de X et Y .
- 2 Déterminer les coordonnées $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ du point moyen G du nuage statistique.
- 3 On admet que la variance de X est $\frac{10}{169}$ et celle de Y est 2,59.
 - a. Montrer que la covariance de X et Y est égale à $\frac{29}{169}$.
 - b. Montrer que la droite de régression linéaire de Y en X est : $Y = \frac{29}{40}X - \frac{1}{20}$.