

Sujet bac 2017 - Série C

Exercice 1 4 points

On considère l'équation (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $48x + 35y = 1$.

- a** Justifier à l'aide du théorème de Bézout que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- b** Justifier que les entiers 48 et -8 sont inverses modulo 35.
- c** En remarquant que (E) peut s'écrire $48x \equiv 1[35]$, déterminer une solution particulière (x_0, y_0) .
- d** Acheter la résolution de l'équation (E) .

Exercice 2 8 points

Le plan est orienté. Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct, de centre de gravité E .

- 1** Faire une figure. On prendra $AB = 4$ cm.
- 2** Construire le cercle $(\mathcal{C})$ de centre A passant par B .
- 3** Construire le point F symétrique de A par rapport à E .
- 4** Montrer que les droites (CF) et (CA) sont perpendiculaires.

Soit (Γ) l'hyperbole de cercle principal $(\mathcal{C})$ et dont une directrice est la droite (BC) .

- 5** Montrer que F est un foyer de (Γ) . Préciser son axe focal.
- 6** On désigne par G le projeté orthogonal de F sur la droite (BC) , et H le point de l'axe focal tel que $\overrightarrow{AH} = 3\overrightarrow{AG}$.
 - a.** Construire H .
 - b.** On pose $AF = c$ et $AB = a$. Que représente le rapport $\frac{AF}{AB}$ pour (Γ) ?

Montrer que ce rapport est égal à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

- 7** Construire le point I du plan tel que $\overrightarrow{GI} = \frac{c}{a}\overrightarrow{GH}$.
- 8** Soit (d) la perpendiculaire à l'axe focal passant par H . Construire le point J de (Γ) situé sur (d) et situé dans le demi plan délimité par la droite (AH) contenant le point C .
- 9** On note S le sommet de (Γ) associé au foyer F . Construire l'arc $(\mathcal{H})$ de (Γ) d'extrémités J et S .
- 10** On désigne par s la similitude plane indirecte définie par : $s = h \circ S_{(BC)}$ où h est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et $S_{(BC)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BC) .
 - a.** Déterminer l'axe (Δ) et le centre (Ω) de s .

- b.** Construire l'arc $(\mathcal{H}')$, image de $(\mathcal{H})$ par s .
c. Déterminer l'excentricité de (Γ') image de (Γ) par s .

Exercice 3

5 points

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par : $f(x) = (x - 1) \ln(x + 1)$.

On pose pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

- 1** **a.** Prouver que F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$; $F'(x) = f(x)$.
b. En déduire le sens de variation de F sur I .

- 2** On admet que pour tout $x \geq 2$, on a $f(x) \geq x - 1$.

- a.** Prouver que pour tout $x \geq 2$, $F(x) \geq \frac{1}{2}(x - 1)^2$.

Erreur dans l'énoncé : L'inégalité $F(x) \geq \frac{1}{2}(x - 1)^2$ pour tout $x \geq 2$ est fausse.

Substituer cette question par :

Prouver que pour tout $x \geq 2$, $F(x) \geq F(2) + \frac{x^2}{2} - x$.

- b.** En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

- c.** Dresser le tableau de variation de F .

- d.** Donner l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$ représentant la fonction F dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. On donne $F(0) = 0,13$; $F(2) = 0,5$.

- 3** Soit la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$.

- a.** Vérifier que $u_n = F(n + 1) - F(n)$.

- b.** En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[n; n + 1]$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) \leq u_n \leq f(n + 1)$.

Erreur dans l'énoncé : l'encadrement $f(n) \leq u_n \leq f(n + 1)$ n'est pas vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4

3 points

Jean s'amuse régulièrement sur un terrain de football avec le gardien de but. L'épreuve consiste à tirer au but et à observer le résultat obtenu. On admet que :

- la probabilité que Jean réussisse le premier tir au but est de 0,7 ;
- s'il réussit le premier tir, alors la probabilité de réussir le second est de 0,8 ;
- s'il manque le premier tir, la probabilité de réussir le second est de 0,4.

On note R_1 l'événement « premier tir au but est réussi » et R_2 l'événement « le second tir au but est réussi ».

- 1** Construire l'arbre de probabilité correspondant à cette expérience.

- 2** Calculer la probabilité pour que les deux tirs au but soient réussis.

- 3** Calculer la probabilité pour que le second tir au but soit réussi.

- 4** On note A , l'événement « Jean a réussi exactement un tir au but ». Calculer $P(A)$.