

Sujet bac 2015 - Série C

Exercice 1

4 points

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $(E) : 21x - 17y = 4$

- 1**
 - a.** Montrer que cette équation admet au moins une solution.
 - b.** Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E') : 21x \equiv 4[17]$.
- 2** On se propose de résoudre l'équation (E') . On rappelle qu'un entier relatif a est l'inverse modulo n ($n \in \mathbb{N}$) d'un entier relatif b si $ab \equiv 1[n]$.
 - a.** Déterminer l'inverse modulo 17 de 21.
 - b.** Montrer que les solutions de l'équation (E') sont les entiers relatifs x tels que $x = 1 + 17k ; k \in \mathbb{Z}$.
- 3** En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

Exercice 2

8 points

Dans le plan orienté, on considère le carré $ABCD$ de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit I et J les milieux respectifs des segments $[DC]$ et $[AD]$.

On prendra $AB = 4$ cm.

- 1** Faire une figure.
- 2** On considère l'ellipse $(\mathcal{E})$ de centre Ω , d'excentricité $\frac{1}{2}$ dont un foyer est B et une directrice (AD) . Quel est l'axe focal de $(\mathcal{E})$?
- 3** Soit S_1 et S_2 les points de $(\mathcal{E})$ situés sur la droite (AB) .
 - a.** Montrer que $\overrightarrow{BS_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BS_2} = -\overrightarrow{BA}$
 - b.** Placer S_1 et S_2 .
- 4** Tracer le cercle principal $(\mathcal{C}_p)$ de $(\mathcal{E})$.
- 5** Tracer le cercle secondaire $(\mathcal{C}_s)$ de $(\mathcal{E})$.
- 6** Tracer le cercle directeur $(\mathcal{C}_d)$ de $(\mathcal{E})$ ayant pour centre le foyer B .
- 7** Construire le point de $(\mathcal{E})$ situé sur la demi-droite $[BC)$.
- 8** Tracer l'arc de $(\mathcal{E})$ balayé par l'angle $(\overrightarrow{\Omega S_3}, \overrightarrow{\Omega B})$ où S_3 est un sommet de $(\mathcal{E})$ situé sur l'axe non focal et du même côté que C .
- 9** Soit f la transformation plane définie par : $f = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}$.
 - a.** Qu'appelle-t-on symétrie glissée?
 - b.** Montrer que f est une symétrie glissée. Déterminer son vecteur et son axe.
 - c.** Tracer $(\mathcal{E}')$ l'image de $(\mathcal{E})$ par f .

Exercice 3 5 points

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 - x \ln x}{x}$$

On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.
Le but de cet exercice est de donner une valeur approchée de α .

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

On définit la suite numérique (u_n) telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

- 1** Sachant que $f(\alpha) = 0$, montrer que α est solution de l'équation $g(x) = x$.
- 2** Montrer par récurrence que pour tout entier n , $u_n \in I$.
- 3** On suppose que pour tout x de I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\forall x \in I, |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.
- 4**
 - a.** Montrer que : $\forall n \geq 0, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
 - b.** En déduire que $\forall n \geq 0, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
 - c.** Montrer que la suite (u_n) converge vers α .
- 5**
 - a.** Déterminer un entier n_0 tel que $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-1}$.
 - b.** Déterminer la valeur approchée u_{n_0} de α .

Exercice 4 3 points

Une maladie atteint 3 % d'une population. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 95 % de tests sont positifs et 5 % sont négatifs.
- Chez les individus non malades, 1 % de tests sont positifs et 99 % négatifs.

On note :

- M l'évènement : « être malade » et,
- T l'évènement : « le test est positif ».

- 1** Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
- 2** Donner la probabilité de l'évènement « $M \cap T$ », puis celle de « $\overline{M} \cap \overline{T}$ ».
- 3** Déterminer $P(T)$ et $P(\overline{T})$.
- 4**
 - a.** Calculer la probabilité de ne pas être malade sachant que le test est positif.
 - b.** Calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est négatif.