

Sujet bac 2014 - Série C

Exercice 1

4 points

- 1** Soit (E) l'équation d'inconnue Z :

$$Z^2 - (2i e^{i\theta} \cos \theta) Z - e^{i2\theta} = 0 \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R}$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On présentera les solutions sous forme exponentielle.

- 2** Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, A et B sont les points d'affixes respectives $Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $Z_B = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\theta)}$.

On note Z_0 l'affixe de O .

- a. Exprimer $\arg\left(\frac{Z_B - Z_0}{Z_A - Z_0}\right)$ en fonction de θ .
- b. En déduire l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
- c. On suppose que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Écrire le conjugué de $Z_A + Z_B$ sous forme exponentielle.

Exercice 2

8 points

On considère un triangle ABC isocèle rectangle en A de sens direct tel que $AC = 6$ cm. On désigne par D, E, F les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AB]$ et $[BD]$.

- 1** Faire la figure.

Soit $(\mathcal{P})$ la parabole de foyer B et de directrice la droite (AC) .

- 2**
 - a. Qu'appelle-t-on pas ou paramètre d'une parabole ?
 - b. Déterminer le pas α de $(\mathcal{P})$.

Soit G le symétrique de A par rapport à la droite (BC) .

- 3**
 - a. Démontrer que la droite (AG) est une tangente à $(\mathcal{P})$ en un point à déterminer.
 - b. Construire le point H de $(\mathcal{P})$ situé sur la médiatrice du segment $[EB]$.
 - c. Construire l'arc $(\mathcal{P}_0)$ de $(\mathcal{P})$ de corde focale le segment $[GI]$ où I est le symétrique de G par rapport à la droite (AB) .

Soit $(\mathcal{P}')$ la parabole de foyer B et de directrice (AG) .

- 4** Déterminer le centre Ω , le rapport K et une mesure de l'angle de la similitude plane directe S qui transforme $(\mathcal{P}')$ en $(\mathcal{P})$.
- 5** Construire l'antécédent J de G par S .
- 6** Construire l'arc $(\mathcal{P}'_0)$ qui a pour image $(\mathcal{P}_0)$ par S .

On désigne par A'_0 l'aire de la portion $(\mathcal{E}'_0)$ du plan limitée par les droites (JB) , (EF) et $(\mathcal{P}'_0)$, et par A_0 celle de la portion du plan $(\mathcal{E}_0)$ image de $(\mathcal{E}'_0)$ par S .

- 7** Démontrer que $A_0 = 2A'_0$.
- 8** Déterminer l'aire A de $S \circ S \circ S \circ S(\mathcal{E}'_0)$ en fonction de A_0

Exercice 3

4 points

Soit la fonction :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = e^{-x} x^{n+1} \quad \text{où } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

- 1** Déterminer l'ensemble de définition E_{f_n} de f_n .
- 2** On suppose que n est impair.
 - a.** Calculer la dérivée de f_n et étudier le signe de cette dérivée.
 - b.** Calculer les limites de f_n aux bornes de E_{f_n} .
 - c.** Dresser le tableau de variation de f_n .
- 3** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_{n,p} = \int_0^p f_n(x) dx$ et $J_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} I_{n,p}$.
 - a.** En intégrant $I_{n,p}$ par parties, montrer que $J_{n+1} = (n+2)J_n$.
 - b.** En déduire l'expression de J_n en fonction de n et J_0 .

Exercice 4

4 points

Dans une urne contenant quatre jetons numérotés 1, 2, 3 et 4 indiscernables au toucher, on extrait successivement sans remise deux jetons.

La variable aléatoire X est celle qui détermine «la valeur absolue de la différence des deux numéros sortis»

- 1** Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2** Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .