

Sujet bac 2013 - Série C

Exercice 1 4 points

On considère l'équation complexe (E) telle que

$$(E) : z^3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1 = 0$$

- 1 Montrer que -1 est solution de (E) .
- 2 Démontrer que si z_0 est solution de (E) alors son inverse $\frac{1}{z_0}$ est aussi solution de (E) .
- 3 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E') telle que $(E') : z^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1 = 0$.
- 4 Déterminer toutes les solutions de l'équation (E) .

Exercice 2 4 points

Les caractères X et Y sont distribués suivants le tableau ci-dessous.

X	-2	-2	-1	-2	-1	0	-1	-2	-1	-2	0	-1	-1	-1
Y	-1	2	2	-1	2	2	0	-1	0	2	-1	-1	0	-1

- 1 Transformer ce tableau en un tableau à double entrées d'effectifs n_i .
- 2 Déterminer le point moyen $G(\overline{X}, \overline{Y})$.
- 3 Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de X et Y .
- 4 Calculer la covariance $\text{Cov}(X, Y)$ et le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .

Problème 12 points

On considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 90^\circ$ et $AD = 2$. On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ la parabole de directrice la droite (AD) et tangente en C à la droite (AC) .

- 1 Démontrer que le foyer de $(\mathcal{P}_1)$ est B .

Soit $(\mathcal{P}_2)$ la parabole de foyer B et tangente à la droite (AD) en D , E le symétrique de B par rapport à A , F le symétrique de D par rapport à la droite (AB) .

- 2 Démontrer que la droite (EF) est la directrice de $(\mathcal{P}_2)$.
- 3 Construire le deuxième point H de $(\mathcal{P}_2)$ appartenant à la droite (DB) .

- 4 Comment appelle-t-on le segment $[DH]$ pour la parabole $(\mathcal{P}_2)$? Justifier la réponse.
- 5 Démontrer que le point I symétrique de C par rapport à (BE) appartient à $(\mathcal{P}_1)$.
- 6 Construire les arcs des paraboles $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ de cordes respectives $[CI]$ et $[DH]$.

Soit S la similitude plane directe qui transforme $(\mathcal{P}_2)$ en $(\mathcal{P}_1)$.

- 7 Déterminer une mesure θ de l'angle de S . Justifier la réponse.
- 8 Déterminer son rapport k . Justifier la réponse.
- 9 Déterminer son centre. Justifier la réponse.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(J, \overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JO})$ où J est le milieu de $[AB]$, on considère la fonction f définie par : $f(x) = 2\sqrt{x} + \ln(x+1)$. $(\mathcal{C})$ désigne sa courbe représentative dans le repère $(J, \overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JO})$.

- 10 Dresser le tableau de variation de f .
- 11 Étudier la branche infinie de $(\mathcal{C})$.
- 12 Construire $(\mathcal{C})$ dans le repère $(J, \overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JO})$.
- 13 Calculer l'aire de la portion du plan $(\mathcal{E})$ limitée par les droites (JO) , (BC) et les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{P}_1)$. On montrera que l'équation cartésienne de $(\mathcal{P}_1)$ dans le repère $(J, \overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JO})$ est $y^2 = 4x$.

VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
FRANCE