

Sujet bac 2012 - Série C

Exercice 1 3 points

- 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 + 4\sqrt{2}Z - 16 = 0$ sachant qu'elle admet deux solutions imaginaires pures.
- 2 On considère dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 2i$; $z_B = -\sqrt{2}$; $z_C = -2i$ et $z_D = 2\sqrt{2}$.
 - a. Représenter les points A, B, C et D dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
 - b. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle ($\mathcal{C}$) dont on précisera le rayon et le centre.

Exercice 2 5 points

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la suite (I_n) définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- 1 Calculer I_1 .
- 2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq 0$.
- 3 Par une intégration par parties, montrer que $I_n = -e^{-\frac{1}{2}} + (n-1)I_{n-2}$ (On pourra écrire $x^n = x^{n-1} \cdot x$).
- 4 Étudier le sens de variation de la suite (I_n) . En déduire que la suite (I_n) est convergente et converge vers une limite l .
- 5 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
Calculer l .

Problème 12 points

Le plan $\mathcal{P}$ est orienté. $ABCD$ est un carré de sens direct, de centre O .

I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AD], [AB], [BC]$ et $[CD]$.

- 1 E est le point du plan tel que le triangle IDE soit rectangle isocèle en D et de sens direct. Montrer que $IE = AO$.
- 2 En déduire qu'il existe une rotation r transformant I en A et E en O . Préciser une mesure θ de l'angle de la rotation r .
- 3 Construire Ω le centre de la rotation r .
- 4 On désigne par Ω_1 , le point d'intersection des droites (IE) et (OA) . Montrer que les points Ω, E, O, Ω_1 sont situés sur un cercle ($\mathcal{C}$) que l'on tracera.

- 5** Montrer que $A\Omega_1I\Omega$ est un carré.
- 6** Donner les caractéristiques de la similitude plane directe S qui transforme le carré $ABCD$ en $A\Omega_1I\Omega$.
- 7** Placer $K' = S(K)$ puis $L' = S(L)$.
- 8** Soit $\bar{S} = h_{(Q, \frac{1}{2})} \circ S_{OD}$, Q étant un point de la droite (OD) . Caractériser $\bar{S}$.
- 9** On se propose de construire Q sachant que $\bar{S}(C) = J$.
- a.** Montrer que si $\bar{S}(C) = J$ alors $\overrightarrow{QJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA}$.
 - b.** Construire alors le point Q .
- 10** Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M associe M' tel que $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HM}$, H étant le projeté orthogonal de M sur la droite (OE) .
- a.** Caractériser f .
 - b.** Tracer $(\mathcal{C}')$ l'image de $(\mathcal{C})$ par f .
 - c.** Donner la nature de la courbe $(\mathcal{C}')$.