Sujet bac 2011 - Série C

Exercice 1 — 3 points

On pose $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx, \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x dx.$

1. Calculer $A + B$.
2. Calculer $A - B$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Déduire des questions 1. et 2., les valeurs de A et B.

Exercice 2 — 5 points

On donne en milliers de francs CFA le bénéfice d'une ferme avicole qui importe des poussins sur une période de 5 mois.

x_i (en mois)	1	2	3	4	5
y_j (en milliers de francs)	96,1	63,5	49,2	41,5	35,7

1. Représenter graphiquement cette série statistique par un nuage de points dans un repère orthogonal d'unités : 2 cm pour 1 mois en abscisses et 2 cm pour 5 milliers de francs en ordonnées.
2. Donner une équation de la droite de régression de y en x.
3. Tracer cette droite sur le graphique.
   Estimer le bénéfice de la ferme avicole au 6 ème mois.

Problème — 12 points

Le plan est orienté. Soit ABC un triangle tel que $AC = 2\,AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$. On prendra $AB = 3$ cm et $AC = 6$ cm. On construit à l'extérieur de ce triangle, les carrés $ACFG$ et $ABDE$ tels que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

K est le point tel que $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AE}$.
Les droites (AK) et (BC) se coupent en I.
Les droites (AB) et (KG) se coupent en J.

Partie A

1. Faire une figure.

2 Démontrer qu'il existe une rotation R_1 qui transforme le triangle ABC en le triangle EAK.

On note Ω_1 son centre. Construire Ω_1. Donner l'angle de R_1.

3 Démontrer qu'il existe une rotation R_2 qui transforme le triangle ABC en le triangle GKA. Donner l'angle de R_2.

On note Ω_2 son centre. Construire Ω_2.

4 **a.** On considère l'application $f = R_1 \circ R_2$. Montrer que f est une translation.

b. Calculer $f(C)$. En déduire le vecteur de translation de f

5 Démontrer que les points A, B, I et Ω_1 sont situés sur un même cercle $(\mathscr{C})$ de centre O, milieu du segment $[AB]$.

6 Démontrer que les points A, G, J et Ω_2 sont situés sur un même cercle $(\mathscr{C}')$ de centre O', milieu du segment $[AG]$.

Partie B

On rapporte maintenant le plan au repère orthonormal direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = -\overrightarrow{AE}$.
Soit S la similitude plane directe de centre A qui transforme $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$.

7 Donner les éléments caractéristiques de S.

8 Donner l'écriture complexe de la similitude S.

9 Exprimer x et y en fonction de x' et y'.

Partie C

Soit $(\mathscr{E})$ l'ellipse d'équation $4x^2 + y^2 = 4$.

10 Construire $(\mathscr{E})$ tout en précisant son centre, ses sommets et foyers.

11 Déterminer une équation de $(\mathscr{E}')$ image de $(\mathscr{E})$ par S.