Sujet bac 2010 - Série C

Exercice 1 — 4 points

1 **a.** Montrer que les équations $x^2 \equiv -1\,[25]$ et $x^2 = -1 + 25k$ où $k \in \mathbb{Z}$ sont équivalentes.

b. Pour $k = 2$, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 \equiv -1\,[25]$.

2 **a.** Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes de la division euclidienne de $2^n - 4$ par 5.

b. En déduire le reste de la division euclidienne de $2^{2010} - 4$ par 5.
Que peut-on alors dire de la divisibilité de $2^{2010} - 4$ par 5 ?

Exercice 2 — 5 points

Dans le plan orienté $(\mathscr{P})$, on considère un carré $ABCD$ de sens direct, de centre O. I et J sont des milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[AD]$.

1 Construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

2 On note $(\mathscr{D})$ la droite passant par A telle que $\overline{((AC), (\mathscr{D}))} = \dfrac{\pi}{3}\,[\pi]$. $(\mathscr{D})$ coupe (Γ) en E.

a. Montrer que le triangle EAC est équilatéral.

b. En déduire qu'il existe une rotation r de centre E qui transforme A en C.

3 On désigne par H le centre de gravité du triangle EAC. La parallèle à la droite (AC) passant par H coupe (EA) et (EC) respectivement en G et F.

a. Montrer que $\dfrac{EG}{EA} = \dfrac{EF}{EC} = \dfrac{2}{3}$.

b. Montrer qu'il existe une homothétie de centre E qui transforme A en G et C en F.

c. En déduire qu'il existe une similitude plane directe S de centre E qui transforme A en F.

Problème — 11 points

Partie A

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = 0$.

2 Déterminer la solution particulière g vérifiant $g(0) = 0$ et $g'(0) = 2\pi$.

Partie B

On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin \pi x & \text{si} \quad -4 \leq x \leq 0 \\ x^2\left(\dfrac{1}{2} - \ln x\right) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

3 **a.** Déterminer l'ensemble de définition E_f de f.
b. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = 0$.
c. Montrer que l'étude de f peut être réduite sur l'intervalle $I = [-2; +\infty[$.

4 **a.** Étudier les variations de f sur I. On dressera un tableau résumant les variations de f.
b. Étudier la branche infinie de $(\mathscr{C})$ et tracer $(\mathscr{C})$ sur son ensemble de définition.

5 Calculer l'aire A_0 du domaine plan $(\mathscr{D})$ limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe (Ox) des abscisses et les droites d'équations $x = 1$, $x = \sqrt{e}$.

Partie C

6 Soit S la similitude plane directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
Pour $x > 0$, construire l'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par S.

7 On définit la suite $(\mathscr{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} \mathscr{D}_0 = \mathscr{D} \\ \mathscr{D}_{n+1} = S(\mathscr{D}_n) \end{cases}$$

a. Exprimer l'aire A_n du domaine $(\mathscr{D}_n)$ en fonction de n et A_0.
b. Exprimer la somme $S_n = A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_n$ en fonction de n et A_0.
c. Calculer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.