

# Sujet bac 2009 - Série C

## Exercice 1

5 points

On considère la famille  $(S)$  des suites  $(V_n)$  de premiers termes  $V_0$  et  $V_1$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+2} + V_{n+1} - 6V_n = 0$$

- 1**
  - a. Déterminer les suites géométriques  $(a_n)$  et  $(b_n)$  de  $(S)$  de premier terme 1.
  - b. Démontrer que la suite  $(U_n)$  définie par  $U_n = \alpha 2^n + \beta (-3)^n$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels, est dans  $(S)$ .
- 2**
  - a. Déterminer les entiers relatifs  $\alpha$  et  $\beta$  solutions de l'équation :  $8\alpha - 27\beta = -11$ .
  - b. Déterminer l'entier relatif  $k$  pour que le couple  $(\alpha; \beta)$  défini par  $\alpha = 110 + 27k$  et  $\beta = 33 + 8k$  soit solution de l'équation :  $4\alpha + 9\beta = 17$ .
  - c. En déduire les valeurs des entiers relatifs  $\alpha$  et  $\beta$  pour lesquelles  $U_2 = 17$  et  $U_3 = -11$ .
  - d. Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \equiv 3 \cdot 2^n [5]$ .
  - e. Déduire le reste de la division euclidienne du terme  $U_n$  par 5.
- 3** Soit  $W_n = 2^{n+1} + (-3)^n$  et  $S_n = W_0 + \dots + W_n$ .
  - a. Démontrer que  $S_n \equiv 2 - 4(2)^n [5]$
  - b. Déduire le reste de la division euclidienne de la somme de  $S_{1956}$  par 5.

## Exercice 2

4 points

Le plan rapporté à un repère orthonormé de sens direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1** Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, l'équation :

$$z^2 + (\sqrt{3} + i)z + 1 = 0 \quad (E)$$

- 2** Écrire les solutions  $z'$  et  $z''$  de  $(E)$  sous leur forme trigonométrique.

## Problème

11 points

Dans le plan  $(\mathcal{P})$  orienté, on considère les points  $A, O, B$ , dans le sens tels que  $AB = 6$  et  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$ .

### Partie A

- I**
  1. Construire les points  $I$  et  $J$  tels que :  $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$  et  $2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JA} = \vec{0}$ .
  2. Construire le cercle  $(\mathcal{C}_1)$  de diamètre  $[IJ]$ .
- II**
  1. Construire la droite  $(\mathcal{T})$  passant par  $A$  telle que  $((\mathcal{T}), (AB)) = 60^\circ$ .
  2. Construire le cercle  $(\mathcal{C}_2)$  passant par  $A$  et  $B$  dont la tangente en  $A$  est  $(\mathcal{T})$ .

3. Démontrer que les cercles  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$  ont deux points communs  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  situés de part et d'autre de la droite  $(AB)$ . On notera  $\Omega_1$  celui situé dans le plan de frontière  $(AB)$  contenant le centre  $E$  du cercle  $(\mathcal{C}_2)$

- III** 1. Démontrer que le centre de la similitude  $S$  d'angle de mesure  $60^\circ$ , de rapport  $\frac{1}{2}$  et qui transforme  $A$  en  $B$  est le point  $\Omega_1$ .
2. Démontrer que les points  $A$ ,  $E$  et  $\Omega_1$  sont alignés.

## Partie B

- I** 1. Soit  $F$  le symétrique de  $E$  par rapport à la droite  $(AB)$ .
- Démontrer que  $J$  est le centre de gravité du triangle  $EFB$ .
  - Démontrer que  $EJ = BK$  et  $(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{BK}) = 60^\circ$ ,  $K$  désignant le centre du cercle  $(\mathcal{C}_1)$ .
  - En déduire qu'il existe une rotation  $R$  qui transforme  $E$  en  $B$  et  $J$  en  $K$ .
2. Démontrer que les médiatrices des segments  $[EB]$  et  $[JK]$  se rencontrent en  $\Omega_1$ . En déduire le centre de  $R$ .
- II** Soit  $g = T_{\overrightarrow{BA}} \circ R$ , où  $R$  est la rotation de I.c) et  $T_{\overrightarrow{BA}}$  la translation du vecteur  $\overrightarrow{BA}$ .
- Démontrer que les points  $\Omega_1$ ,  $J$  et  $F$  sont alignés.
  - Démontrer que le centre de rotation de  $g$  est  $F$ .

## Partie C

Soit  $(\mathcal{H})$  une hyperbole de centre  $J$ , dont un des foyers est  $I$  et passant par  $A$ .

- Construire le point  $M$  de  $(\mathcal{H})$  situé sur le segment  $[I\Omega_1]$  ainsi que ses deux sommets.
- Démontrer que les droites  $(JE)$  et  $(F\Omega_1)$  sont les asymptotes de  $(\mathcal{H})$ . Tracer la branche de  $(\mathcal{H})$  située dans le plan de frontière la droite  $(B\Omega_1)$  contenant  $K$ .
- On désigne par  $(\mathcal{H}')$  l'image de  $(\mathcal{H})$  par  $S$ .
  - Démontrer que l'excentricité  $e$  de  $(\mathcal{H}')$  est 2.
  - Déterminer les sommets et les asymptotes de  $(\mathcal{H}')$ .