

Sujet bac 2008 - Série C

Exercice 1

5 points

Dans un plan orienté, on considère le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O ; A et B deux points de $(\mathcal{C})$ tels que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \pi$; E le point de $(\mathcal{C})$ tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = 35^\circ$. La demi-droite $[OG)$ où G est le milieu de $[AE]$ coupe le cercle en un point C . Les droites (AE) et (BC) se coupent en D .

- 1** Démontrer que les points D, E, F, C sont cocycliques, avec $F = (AC) \cap (BE)$.
- 2**
 - a.** Démontrer que le triangle ABF est un triangle isocèle en B .
 - b.** En déduire qu'il existe une rotation R de centre B qui transforme F en A .
- 3**
 - a.** Démontrer que $S_{BF} \circ S_{OC}$ est une translation T .
 - b.** Démontrer que son vecteur est $\overrightarrow{AE}$.
- 4**
 - a.** Déterminer le centre Ω et l'angle θ de la rotation $g = R \circ T$.
 - b.** Déterminer $g(C)$ en utilisant la composée $R \circ T$.
 - c.** Démontrer que la droite (FD) est une hauteur du triangle ABF .

Exercice 2

4 points

On considère la suite définie par $V_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - 4V_n + 6 = 0$.

- 1**
 - a.** Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n \equiv V_{n+1} [6]$.
 - b.** En déduire que (V_n) est périodique dans la division euclidienne par 6.
- 2**
 - a.** Déterminer les restes de la division euclidienne de 4^n par 6 suivant les valeurs de n .
 - b.** Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, V_n \equiv 4^n [6]$.
 - c.** En déduire le reste de la division euclidienne du terme V_{1956} par 6.
- 3** Soit $S_n = V_0 + \dots + V_n$.
 - a.** Déterminer le reste de la division euclidienne de S_n par 6 suivant les valeurs de n .
 - b.** En déduire le reste dans la division euclidienne de la somme S_{1956} par 6.

VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
FRANCE

Problème

12 points

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A Soit S la similitude plane directe de centre $A(-2, 2)$ qui transforme la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$ en la droite $(O, \vec{i})$ qui est l'axe des abscisses.

1. Déterminer l'angle θ et le rapport k de S .
2. Démontrer que l'expression complexe de S est : $z' = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)z - 2$ où z' est l'affixe du point M' image du point M d'affixe z par S .

B

Soit f fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{|x^2 - 3x|}{x + 1} & \text{si } x > -1 \\ f(-1) = -1 \\ f(x) = x - (x + 1) \ln |x + 1| & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. Démontrer que l'ensemble de définition E_f de f est $\mathbb{R}$.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.
3. Dresser le tableau de variation de f .
4. Démontrer que pour $x < -1$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α avec $-4,6 < \alpha < -4,5$. Construire $(\mathcal{C})$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
5. On désigne par $(\mathcal{H})$ la partie de $(\mathcal{C})$ dont les abscisses appartiennent à $I =]\alpha; -1[\cup]0; 3]$.
 - a) Construire $(\mathcal{H}')$ le symétrique de $(\mathcal{H})$ par rapport à l'axe des abscisses.
 - b) Soit $(\mathcal{E}_0)$ le domaine limité par $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{H}')$ et les droites d'équations $x = \alpha$, $x = -1$, $x = 0$ et $x = 3$. On prendra $\alpha \approx -4,55$. Calculer l'aire A_0 de $(\mathcal{E}_0)$ en centimètre carré.
6. On pose $S^n = \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_{n \text{ fois}}$ et $(\mathcal{E}_n) = S^n((\mathcal{E}_0))$.
 - a. Calculer l'aire A_n de $(\mathcal{E}_n)$ en fonction de A_0 et de n .
 - b. Calculer $A_0 + A_1 + \dots + A_n$ en fonction de n .
 - c. Calculer la limite de cette somme en $+\infty$.