

Sujet bac 2007 - Série C

Exercice 1

4 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère la fonction vectorielle f de fonctions coordonnées f_1 et f_2 définies par :

$$\begin{cases} f_1(t) = \cos t \\ f_2(t) = \sin 2t + 2 \sin t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

- 1 Étudier les variations de f_1 et de f_2 .
- 2 Démontrer que la fonction f peut être étudiée sur l'intervalle $I = [0; \pi]$.
- 3 Dresser le tableau récapitulatif des variations de f sur I .
- 4 Construire la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 2

4 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

- 1 Construire le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $A(0; -8)$ tangent en O à l'axe $(O, \vec{i})$.
- 2 Construire le point M image de O par la rotation de centre A d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
- 3 Construire la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C})$ en M .
- 4 Construire le projeté orthogonal H de M sur l'axe $(O, \vec{i})$.
- 5 On désigne par N l'intersection des droites $(\mathcal{T})$ et $(O, \vec{i})$.
Démontrer que les points O, N, M et A appartiennent à un cercle $(\mathcal{C}_1)$ à construire.
- 6 Soit S_1 la similitude plane directe de centre O qui transforme $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}_1)$.
Déterminer son rapport k_1 et son angle θ_1 .
- 7 Soit S_2 la similitude plane directe de centre N qui transforme M en H .
 - a. Déterminer son rapport k_2 et son angle θ_2 .
 - b. Construire les images des points A et O par $S_2 \circ S_1$.
 - c. En déduire la construction du centre Ω de $S_2 \circ S_1$.

Problème

12 points

A Soit p le polynôme défini par : $p(x) = x^2 - ax + 1$.Déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) > 0$;
2. $p(x)$ admette une racine double que l'on déterminera.

B Soit g_a la fonction définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ par :

$$g_a(x) = a \ln(x) + \frac{1}{x} - x \quad \text{où } a \in [-2; 2].$$

On note $(\mathcal{C}_a)$ la courbe représentative de g_a dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[, g'_a(x) \leq 0$.
2. Dresser le tableau de variation de g_a pour $a \in]-2; 2[, a = 2$ et $a = -2$.
3. Étudier suivant les valeurs de a , le signe de g_a sur $I =]0; 1[$.

C Dans la suite du problème, on prendra $a = 2$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction r définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ par

$$r(x) = 2 \ln x - x$$

puis démontrer que la courbe $(\mathcal{H})$ de r est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_2)$.

2. Construire les courbes $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{H})$ dans le même repère.

D On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0; 1[$ par

$$f(x) = \int_0^x \frac{t \ln t}{t^2 - 1} dt$$

1. Dédurre du signe de g_2 sur I que $\forall x \in I$,

$$0 < \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2} \quad ; \quad 0 < f'(x) < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 < f(x) < \frac{1}{2}$$

2. Soit h la fonction définie sur I de manière suivante :

$$\forall x \in I, h'(x) = f'(x) \quad \text{et} \quad 0 < h(x) < \frac{1}{2}$$

Démontrer que l'équation $h(x) = x$ admet une solution unique x_0 appartenant à I .

3. Soit (u_n) la suite numérique définie par

$$u_0 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$$

- a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{2}$ puis, $|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2} |u_n - x_0|$.
- b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - x_0|$.
- c. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.
- d. Déterminer le plus petit entier n_0 pour que u_{n_0} soit une valeur approchée à 10^{-2} près de x_0 .