LYCÉE FRANÇAIS SAINT-EXUPÉRY DE BRAZZAVILLE
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES

LYCÉE INTERNATIONAL FRANÇAIS
SAINT EXUPÉRY
BRAZZAVILLE CONGO

ANNALES DU BAC MATHÉMATIQUES 2024

SUITES NUMERIQUES

Exercices extraits du site de l'APMEP

PAR VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

SUJETS ET CORRIGÉS
46 PAGES

LYCÉE INTERNATIONAL FRANÇAIS SAINT EXUPÉRY
RÉP. DU CONGO

SOMMAIRE

EXERCICE 1 — Amérique du Nord 21 mai 2024

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0.

2. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

c. Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$$

c. Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).

4. **a.** En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$I_n = \frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.
Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1  from math import *
2  def seuil() :
3      n = 0
4      I = 2
5      ...
6          n = n+1
7          I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8      return n
```

EXERCICE 2

Amérique du Nord - 22 mai 2024

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1 et u_2.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.
7. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.
9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.5
    while u < 0.95 :
        n = ...
        u = ...
    return n
```

EXERCICE 3

Centres étrangers 5 juin 2024

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$.

1. **a.** Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

   b. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$f'(x) = 2(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

   c. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.

4. **a.** Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln(2) - u_n$ est positif.

   b. On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.

   Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.1
    while ln (2) − u . . . 0.0001 :
        n = n+1
        u = . . .
    return (u, n)
```

   c. Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction seuil ().

EXERCICE 4 Centres étrangers 6 juin 2024

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}.$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. On considère le script Python ci-dessous :

```
from math import *
def seuil(n) :
    u = 5
    i = 0
    ℓ = (1 + sqrt(5))/2
    while abs(u-ℓ) >= 10**(-n) :
        u = sqrt(u+1)
        i = i+1
    return(i)
```

On rappelle que la commande **abs(x)** *renvoie la valeur absolue de x.*

a. Donner la valeur renvoyée par `seuil (2)`.

b. La valeur renvoyée par `seuil (4)` est 9.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 5 — Asie 10 juin 2024

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.

Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. **Affirmation 1** : Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
2. On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n,on a $u_n \leqslant \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n}$.

   Affirmation 2 : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. On considère la fonction suivante écrite en langage Python :

```
def terme(N) :
    U =1
    for i in range(N) :
        U=U+i
    return U
```

   Affirmation 3 : terme(4) renvoie la valeur 7.
4. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :
   - Prix A : il reçoit 1 000 euros par jour pendant 15 jours ;
   - Prix B : il reçoit 1 euro le 1er jour, 2 euros le 2e jour, 4 euros le 3e jour et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

   Affirmation 4 : La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$v_n = \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x.$$

   Affirmation 5 : La suite (v_n) est croissante.

EXERCICE 6 — Asie 11 juin 2024

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.

Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.

Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.

De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.

On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

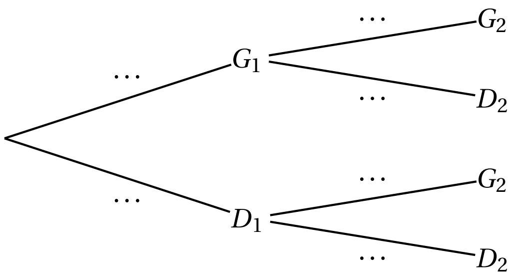
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n.
On a donc $g_1 = 0{,}5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$?

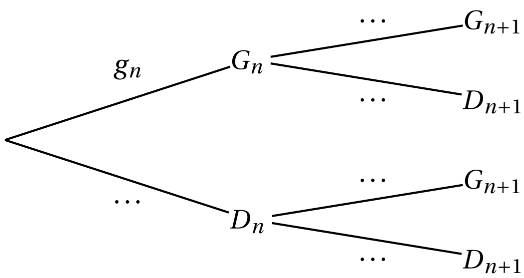
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2.

4. Soit n un entier naturel non nul.

a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.



b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0{,}5 g_n + 0{,}2.$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0{,}4$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
On précisera son premier terme et sa raison.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4.$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n).

7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n).
Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0{,}4 \leqslant 0{,}001$.

9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0{,}4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
def seuil(e) :
    g = 0.5
    n = 1
    while ... :
        g = 0.5 * g + 0.2
        n = ...
    return (n)
```

Exercice 7 — Asie 11 juin 2024

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0~;~+\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :
$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$
4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0~;~+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0~;~+\infty[$.
   On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0~;~+\infty[$.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0~;~+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0~;~+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g.
   Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.
   Résoudre, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$
2. Justifier que la suite (u_n) converge.
   On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
3. Déterminer la valeur de ℓ.

EXERCICE 8

Métropole 19 juin 2024 J1 (secours)

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Montrer que pour tout nombre réel x, on a :
$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :
$$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) & = & u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant 0$.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire la convergence de la suite (u_n).

4. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

5. **a.** Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leqslant h$, où h est un nombre réel strictement positif.

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
  n = 0
  u =7
  while ... :
    n = n+1
    u = ...
  return n
```

b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit seuil(0.01) dans la console Python. Justifier la réponse.

Partie C : calcul intégral

1. Étudier le signe de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Interpréter graphiquement l'intégrale :

$$I = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2\,;\,4]$, on a l'encadrement :

$$0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25.$$

En déduire l'encadrement :

$$1 \leqslant I \leqslant 2.$$

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1m^3 = 1 000 L.

Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en mg. L^{-1}, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 mg.L^{-1}.

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à 0,01 mg.L^{-1}.

Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de 0,70 mg. L^{-1}.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de 0,3 mg. L^{-1}.
2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore, en mg. L^{-1}, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0{,}7$.

   On admet que pour tout entier naturel n,

   $$v_{n+1} = 0{,}92\, v_n + 0{,}3.$$

   a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

   b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse,
4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-contre écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.
5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ?

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def alerte_chlore(s) :
    n=0
    v=0.7
    while ____________ :
        n= ______
        v= ______
    return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en mg. L^{-1}, dans la piscine.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' = -0{,}08y + \frac{q}{50}$$

où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}$ où C est une constante réelle.
2. **a.** Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.

   b. On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à 0,7 mg.L^{-1}.
   On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de 2 mg.L^{-1}.
   Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

EXERCICE 10 — Métropole 20 juin 2024 J2 (dévoilé)

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a.

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$

1. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$.
2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.

   a. En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n < 2$.

   b. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$

1. On donne ci-contre la fonction u écrite en langage Python.
Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit `u(2,1)` et `u(2,2)` dans la console Python.

```
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n) :
      u=u**2-2*u+2
    return u
```

2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a = 2$?
On admettra ce résultat sans démonstration.

Partie C : étude dans le cas général

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de a.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)}$.
2. Déterminer, suivant les valeurs du réel a strictement supérieur à 1, la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 11 — Polynésie 19 juin 2024

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.

Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}.$$

Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = ...
    for i in range(n) :
        ...
    return u
```

2. L'exécution de `suite(2)` renvoie 1.3333333333333333.
Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.
3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5-x}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$

3. **a.** Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
Prouver l'équivalence suivante :

$$f(x) = x \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$$

b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
Déterminer sa limite.

5. Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme terme initial $u_0 = 4$ au lieu de $u_0 = 3$?

Exercice 12

Polynésie 21 juin 2024

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel} \quad n,\; u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. **a.** Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2.

b. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python. On admet que, pour tout réel strictement positif a, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de a.

```
def mystere(k) :
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k) :
        S = S + u
        u = u − log( u / 4 )
    return S
```

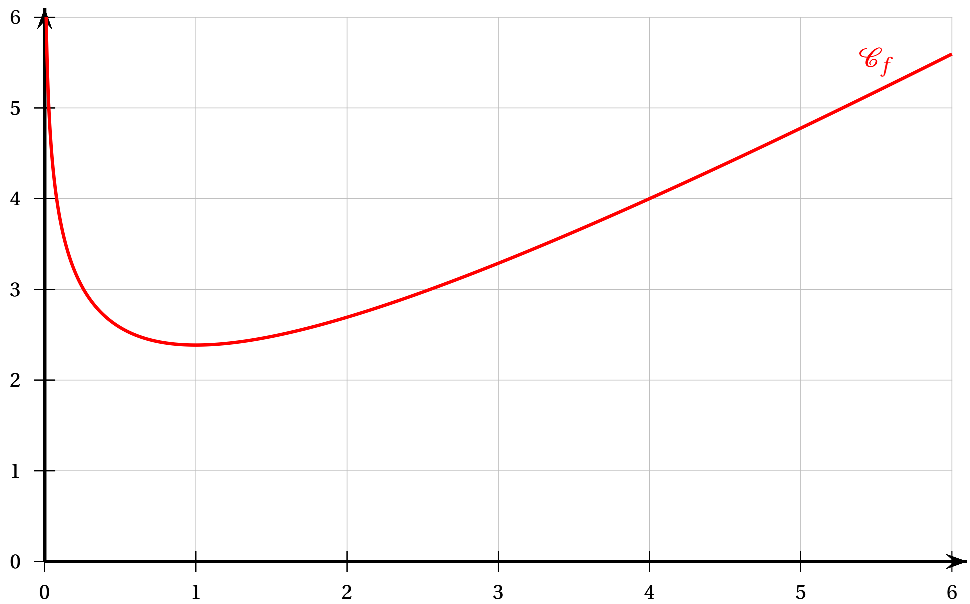
L'exécution de `mystere(10)` renvoie `58.44045206721732`. Que représente ce résultat ?

c. Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

On donne ci-dessous une représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f pour les valeurs de x comprises entre 0 et 6.



Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $[0\ ;\ +\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle.
On note ℓ la valeur de cette limite

c. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

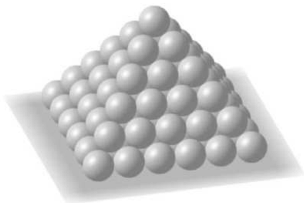
d. En déduire la valeur de ℓ.

EXERCICE 13

Polynésie 5 septembre 2024

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1er étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule ;
- le 2e étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules ;
- le 3e étage possède 9 boules ;
- ...
- le n-ième étage possède n^2 boules.



Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n-ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages.

2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

a. Calculer S_5 et interpréter ce résultat.

b. On considère la fonction `pyramide` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python.

Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n, l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1, n+1) :
        S = ...
    return ...
```

c. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible ?

Exercice 14

Métropole Antilles-Guyane 11 septembre 2024

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = -0{,}8t_n + 18.$$

   Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

2. On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul :

$$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4.$$

   La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \frac{S_n}{n}$.
   Affirmation 2 : La suite (u_n) converge.

3. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n}.$$

   Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^{\,n} - n$.
   Affirmation 4 : La suite (u_n) converge.

5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n.

```
def u(n) :
    valeur = 2
    for k in range(n) :
        valeur = 0.5 * (valeur + 2/valeur)
    return valeur
```

On admet que (u_n) est décroissante et vérifie pour tout entier naturel n :

$$\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2.$$

Affirmation 5 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

EXERCICE 15

Amérique du Sud 21 novembre 2024

Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes et justifier votre réponse.
Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans la notation.
Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par

$$u_n = \frac{25 + (-1)^n}{n}.$$

Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\left\{\begin{array}{lcl} w_0 & = & 1 \\ w_{n+1} & = & \dfrac{w_n}{1 + w_n} \end{array}\right.$

On admet que pour tout entier naturel n, $w_n > 0$.

On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.

Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \ln(1 + v_n) \end{array}\right.$

On admet que pour tout entier naturel n, $v_n > 0$.

Affirmation 3 : La suite (v_n) est décroissante.

4. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} [\ln(x)]^n \,\mathrm{d}x$.

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.

Éléments de la correction de l'exercice 1

Amérique du Nord 21 mai 2024

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. $I_0 = \int_0^{\pi} 1\times\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1+1 = 2.$

2. **a.** On sait que $0 \leqslant x \leqslant \pi \Rightarrow 0 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$ par produit par $\mathrm{e}^{-nx} > 0$: la fonction à intégrer étant positive et l'intervalle d'intégration étant croissant on sait que l'intégrale de cette fonction positive est positive.
Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x =$
$\int_0^{\pi} \sin x\left[\mathrm{e}^{-(n+1)x} - \mathrm{e}^{-(nx)}\right]\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale, puis
$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{e}^{-(nx)}\left[\mathrm{e}^{-x} - 1\right]\mathrm{d}x.$
Soit u la fonction définie sur $[0~;~\pi]$ par $u(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$.
u est dérivable sur $[0~;~\pi]$ et sur cet intervalle $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$. La fonction u est donc décroissante de $\mathrm{e}^{-0} - 1 = 0$ à $\mathrm{e}^{-\pi} - 1 \approx -0{,}957$.
Comme $\sin x\,\mathrm{e}^{-(nx)} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0$, la fonction à intégrer dans $I_{n+1} - I_n$ est négative et donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

c. On vient de démontrer que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0 \iff I_{n+1} \leqslant I_n$, c'est-à-dire que la suite (I_n) est décroissante; étant minorée par zéro elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 0$.

3. **a.** On a déjà vu que que $0 \leqslant x \leqslant \pi \Rightarrow 0 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$, donc par intégration sur l'intervalle $[0~;~+\pi]$ on obtient
$\int_0^{\pi} 0\,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-n\pi}\,\mathrm{d}x.$

$$I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

b. Une primitive de e^{-nx} est $\frac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}$, donc pour $n \geqslant 1$, $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^{\pi} =$
$-\frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{-n\pi} - \mathrm{e}^{0}\right] = -\frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{-n\pi} - 1\right] = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$

c. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-n\pi} = 1$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n} = 0$.
D'après le théorème des « gendarmes » la suite (I_n) a pour limite 0.

4. **a.** • IPP1 On pose :
$u(x) = \mathrm{e}^{-nx}$ $\quad v'(x) = \sin x$
$u'(x) = -n\,\mathrm{e}^{-nx}$ $\quad v(x) = -\cos x$
On a donc $I_n = [-\mathrm{e}^{-nx}\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} n\,\mathrm{e}^{-nx}\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-n\pi} + 1 - nJ_n =$
$1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n$.

• IPP2 On pose :
$u(x) = \sin x$ $\quad v'(x) = \mathrm{e}^{-nx}$
$u'(x) = \cos x$ $\quad v(x) = \frac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}$

On a donc $I_n = \left[\dfrac{1}{-n}\,\mathrm{e}^{-nx}\sin x\right]_0^{\pi} - \displaystyle\int_0^{\pi} \cos x \dfrac{1}{-n}\,\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}J_n$.

b. En égalant les deux valeurs de I_n trouvées on obtient :

$1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n = \dfrac{1}{n}J_n \iff 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} = J_n\left(n + \dfrac{1}{n}\right)$

$\iff J_n\left(\dfrac{n^2+1}{n}\right) = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} \iff J_n = \dfrac{n}{n^2+1} \times \left[1 + \mathrm{e}^{-n\pi}\right]$.

En, reportant dans l'expression $I_n = \dfrac{1}{n}J_n$, on obtient finalement :

$$I_n = \frac{1}{n} \times \frac{n}{n^2+1} \times \left[1 + \mathrm{e}^{-n\pi}\right] = \frac{1 + \mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}.$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.
Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1  from math import *
2  def seuil() :
3      n = 0
4      I = 2
5      while I >= 0.1 :
6          n=n+1
7          I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8  return n
```

Éléments de la correction de l'exercice 2

Amérique du Nord - 22 mai 2024

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. Le trinôme $g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0~;~1]$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x)$.
Or on sait que $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow -x \leqslant 0 \leqslant 1 - x$ ou en lisant de droite à gauche
$1 - x \geqslant 0 \Rightarrow 2(1 - x) \geqslant 0 \iff g'(x) \geqslant 0$: la dérivée étant positive sur $[0~;~1]$ et ne s'annulant qu'en $x = 1$, la fonction g est strictement croissante de $g(0) = 0$ à $g(1) = 2 - 1^2 = 1$.

On considère la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{l c l} u_0 & = & \dfrac{1}{2}\\ u_{n+1} & = & g\left(u_n\right)\end{array}\right.$ pour tout entier naturel n.

2.
- $u_1 = 2 \times \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$;
- $u_2 = 2 \times \dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{24}{16} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{15}{16} = 0{,}9375$.

3. Démonstration par récurrence :

- *Initialisation* :

On a $0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} < 1$, soit $0 < u_0 < u_1 < 1$: l'encadrement est vrai au rang zéro.

- *Hérédité* : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

Alors par stricte croissance sur $[0\,;\,1]$ de la fonction g, on a :

$g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1)$, soit d'après les résultats précédents :

$0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$: l'encadrement est encore vrai au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang $n = 0$ et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est encore au rang $n+1$: par le principe de récurrence, on a donc

Pour tout entier naturel n, : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

4. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est majorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \leqslant 1$.

5. La relation $g(u_n) = u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$ donne à la limite car g est continue car dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$: $\ell = 2\ell - \ell^2 \iff$

$\ell - \ell^2 = 0 \iff \ell(1-\ell) = 0$ soit

$\left\{\begin{array}{lcl} \ell & = & 0 \text{ ou} \\ 1-\ell & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \ell & = & 0 \text{ ou} \\ 1 & = & \ell \end{array}\right.$

La solution $\ell = 0$ n'est pas possible (la suite est croissante) ; il reste $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1-u_n)$.

6. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(1-u_{n+1}) = \ln\left[1-\left(2u_n - u_n^2\right)\right] = \ln\left(1 - 2u_n + u_n^2\right) =$ $\ln(1-u_n)^2 = 2\ln(1-u_n)$ (car $1-u_n > 0$ voir la récurrence ci-dessus, donc $\ln(1-u_n)$ existe). Or $\ln(1-u_n) = v_n$.

Finalement : $v_{n+1} = 2v_n$ ce qui montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \ln(1-u_0) = \ln\left(1-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

7. On sait qu'alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n$, soit $v_n = -\ln 2 \times 2^n$.

8. La relation $v_n = \ln(1-u_n)$ donne donc :

$-\ln 2 \times 2^n = \ln(1-u_n) \iff \mathrm{e}^{-\ln 2 \times 2^n} = \mathrm{e}^{\ln(1-u_n)}$, (par croissance de la fonction exponentielle), soit encore :

$\mathrm{e}^{-\ln 2 \times 2^n} = 1 - u_n \iff u_n = 1 - \mathrm{e}^{-\ln 2\times 2^n}$.

Or on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\ln 2 \times 2^n = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\ln 2 \times 2^n} = 0$ et par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

9.

```
def seuil() :
    n=0
    u=0.5
    while u < 0.95 :
        n=n + 1
        u=2*u - u**2
    return n
```

Éléments de la correction de l'exercice 3

Centres étrangers 5 juin 2024

1. **a.** Résolvons, dans $[0\ ;\ 1]$, l'équation demandée :

$$\begin{aligned}
f(x) = x &\iff 2x\,\mathrm{e}^{-x} = x\\
&\iff 2x\,\mathrm{e}^{-x} - x = 0\\
&\iff x(2\,\mathrm{e}^{-x} - 1) = 0\\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\,\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0\\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\,\mathrm{e}^{-x} = 1\\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{2}\\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln(2)
\end{aligned}$$

Or, 0 et $\ln(2)$ sont deux réels dans $[0;1]$ (en effet, la stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}^{*+}$ donne : $\quad 1 < 2 < \mathrm{e} \implies 0 < \ln(2) < 1$).

L'équation a donc deux solutions dans $[0\ ;\ 1]$: 0 et $\ln(2)$.

b. f est dérivable sur $[0\ ;\ 1]$, en tant que composée et produit de fonctions qui pourraient être définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in [0;1], \quad f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x} + (2x) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (2-2x)\,\mathrm{e}^{-x} = 2(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

On arrive donc à l'expression demandée.

c. On sait que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$. On a : $\quad f(0) = 2 \times 0\,\mathrm{e}^{-0} = 0 \quad$ et $\quad f(1) = 2 \times 1\,\mathrm{e}^{-1} = 2\,\mathrm{e}^{-1}$.

On peut donc établir le tableau de variations de la fonction :

x	0		1
signe de 2		$+$	
signe de $(1-x)$		$+$	0
signe de e^{-x}		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0
variations de f	0	$\nearrow$	$2\,\mathrm{e}^{-1}$

2. **a.** *Initialisation :* Calculons u_1. $u_1 = f(u_0) = f(0{,}1) = 2 \times 0{,}1\,\mathrm{e}^{-0{,}1} \approx 0{,}18$.

On constate que l'inégalité est vraie pour $n = 0$, on a bien : $\quad 0 \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 1$.

Hérédité : Pour un entier naturel k donné, on suppose que l'inégalité $\quad 0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1 \quad$ est vraie.

Montrons que l'inégalité sera vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence on a :

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1 &\implies f(0) \leqslant f(u_k) < f(u_{k+1}) \leqslant f(1) \\
&\qquad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur } [0;1] \\
&\implies 0 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-1} \\
&\qquad \text{car } f \text{ est la fonction de récurrence de la suite } (u_n) \\
&\implies 0 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant 1 \\
&\qquad \text{car } 2\,\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}74 < 1
\end{aligned}
$$

Ainsi, la véracité de l'inégalité est héréditaire.

Conclusion : L'inégalité est vraie au rang 0, et sa véracité est héréditaire pour tout entier naturel, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$

b. On a notamment :

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}.$ La suite (u_n) est donc (strictement) croissante.

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1.$ La suite (u_n) est donc bornée par 0 et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est donc convergente, vers une limite ℓ vérifiant $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $[0;1]$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

D'après la question **1. a.**, cette équation n'a que deux solutions dans $[0;1]$: 0 et $\ln(2)$, or la suite est (strictement) croissante, donc minorée par son premier terme : $u_0 = 0{,}1$, donc la limite ne saurait être inférieure à 0,1 : la possibilité d'avoir $\ell = 0$ est donc écartée, et finalement, l'unique valeur possible pour ℓ est donc $\ln(2)$.

La suite (u_n) converge donc vers $\ln(2)$.

4. **a.** La suite (u_n) est croissante et converge vers $\ln(2)$, donc elle est majorée par $ln(2)$.

On a donc : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ln(2) \implies \ln(2) - u_n \geqslant 0.$

Pour tout entier naturel n, la différence $\ln(2) - u_n$ est bien positive.

b. Un terme de la suite (u_n) sera donc toujours une valeur approchée par défaut de $\ln(2)$. Si on veut que la valeur approchée soit à 10^{-4} près, cela signifie que la différence entre u_n, la valeur approchée, et $\ln(2)$ doit être inférieure ou égale à 10^{-4}.

On va donc explorer les termes consécutifs de la suite (u_n) tant que
$\ln(2) - u_n > 0{,}0001$, de sorte que la boucle s'interrompra dès que la différence deviendra inférieure ou égale à $10^{-4} = 0{,}0001$.

Le script ci-dessous convient (à condition d'avoir importé les fonctions `exp` et `log` qui est la fonction logarithme népérien, de la librairie `math`, au préalable).

On a dans ce corrigé ajouté les deux lignes qui rendent le programme exécutable

```
from math import exp
from math import log as ln
def seuil():
  n=0
  u=0.1
  while ln(2) - u > 0.0001:
    n=n+1
    u=2*u*exp(-u)
  return(u,n)
```

Remarque : on peut aussi importer la constante d'Euler de la librairie maths et utiliser une variante : `from math import e` en lieu et place de la première ligne et `u=2*u*e**(-u)` ou `u=2*u/(e**u)` pour l'avant dernière.

c. $n = 11$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 4

Centres étrangers 6 juin 2024

Partie A

1. f est de la forme $\sqrt{u}$ avec, pour tout x réel positif : $u(x) = x+1$ et $u'(x) = 1$.

Donc $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

La fonction racine carrée étant à valeurs positives, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$f(x) - x = \sqrt{x+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x+1} - x\right) \times \left(\sqrt{x+1} + x\right)}{\sqrt{x+1} + x} = \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x+1} + x} = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}.$$

3.
$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x} = 0 \\ &\iff -x^2 + x + 1 = 0 \end{aligned}$$

Car sur $[0\,;\,+\infty[$, le dénominateur $\sqrt{x+1} + x$ est strictement positif, en tant que somme d'une expression strictement positive ($\sqrt{x+1}$) et d'une autre positive (x), donc ce dénominateur est non nul.

On a un polynome du second degré. Calculons le discriminant.

$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5$

On a donc deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \geqslant 0$

$x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{-2} < 0$ donc n'est pas solution de l'équation sur $[0\,;\,+\infty[$

L'équation $f(x) = x$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$\ell = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Remarque : ce nombre est connu sous l'appellation « nombre d'or ».

Partie B

1. — *Initialisation :* pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$.
   $u_0 \in [0\,;\,+\infty[$, donc $f(u_0)$ est définie et $u_1 = f(u_0) = f(5) = \sqrt{5+1} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$.
   L'inéquation $\quad 1 \leqslant u_{0+1} \leqslant u_0 \quad$ est bien vérifiée.

   — *Hérédité :* Pour un naturel n, on suppose que l'inégalité est vraie au rang n, c'est-à-dire : $\quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   En appliquant la fonction f aux trois membres de cette inégalité, la croissance de f sur $[0\,;\,+\infty[$ donne :
   $$f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \implies \sqrt{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$
   $$\implies 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}, \quad \textit{car } \sqrt{2} \approx 1{,}4 \geqslant 1$$
   Cette conclusion est l'inégalité, au rang suivant.

   — *Conclusion :* l'inégalité est vraie au rang 0, et sa véracité est héréditaire, pour tout entier naturel, donc, en vertu du principe de récurrence, pour tout entier naturel n, l'inégalité est vraie, soit : $\quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. La question précédente donne :
   — $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n \quad$ la suite est donc décroissante ;
   — $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \quad$ la suite est donc minorée, par 1 ;

   La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est donc convergente, vers une limite qui doit être supérieure ou égale à 1 (et inférieure ou égale à u_0 car la suite est décroissante).

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $[0\,;\,+\infty[$, intervalle qui contient la limite de la suite.
   D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   D'après la question **3.** de la **Partie A**, cette équation n'a qu'une solution dans $[0\,;\,+\infty[$: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   On constate également que cette valeur satisfait les critères supplémentaires que l'on connaît pour cette limite (supérieure à 1 et inférieure à u_0).
   La suite (u_n) converge donc vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. La fonction `seuil` présentée initialise la variable `u` à 5, c'est-à-dire u_0 et la variable `i` à 0, c'est-à-dire l'indice de u_0.
   Tant que la valeur absolue de la différence entre ℓ et `u` est supérieure ou égale à 10^{-n}, on remplace dans la variable `u` le terme de la suite par le terme suivant, et dans la variable `i` l'indice par l'indice suivant.
   La boucle s'arrête donc dès que `u` contient un terme de la suite dont la distance à ℓ est strictement inférieure à 10^{-n} et renvoie l'indice de ce terme (qui est donc une valeur approchée à 10^{-n} près de la limite).

   a. `seuil(2)` va donc renvoyer l'indice du premier terme qui est à moins d'un centième de la limite ℓ.
   Par exploration à la calculatrice, on a $u_4 - \ell \approx 0{,}02 \geqslant 10^{-2}$ et
   $u_5 - \ell \approx 0{,}007 < 10^{-2}$ donc la fonction renverra l'indice du premier terme pour lequel le test du `while` n'est pas satisfait : 5.

b. Si `seuil(4)` renvoie 9, c'est que le premier terme de la suite qui est une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près sera u_9.

Remarque : comme la suite (u_n) converge vers ℓ en décroissant, tous les termes de la suite sont des valeurs approchées de ℓ par excès, l'utilisation de la fonction `abs` dans la fonction Python n'était indispensable pour cette fonction de récurrence.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 5

Asie 10 juin 2024

1. **Affirmation 1 : FAUSSE.**

   La propriété du cours indique que toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 0$.

   Il suffit donc d'exhiber un contre-exemple.

   La suite constante égale à 1 est décroissante (mais pas strictement décroissante) et minorée par 0 (entre autres), et pourtant, elle converge vers 1, et pas vers 0.

   Si on préfère donner un contre exemple avec une suite strictement décroissante, on peut par exemple choisir la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ et de terme général : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, par exemple. Cette suite est assez clairement décroissante, minorée par 0 et converge vers 1.

2. **Affirmation 2 : VRAIE.**

   En effet, pour n entier naturel : $v_n = \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n} = -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{3}{9}\right)^n}{1} = -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \times \left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$

   Comme on a : $\dfrac{9}{7} > 1$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{9}{7}\right)^n = +\infty$.

   Par ailleurs : $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, donc on en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, donc, par limite de la somme : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1$.

   Finalement, par limite du produit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \times \left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right) = -\infty$.

   Si on a, pour tout n naturel, $u_n \leqslant v_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors, par comparaison : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3. **Affirmation 3 : VRAIE.**

   L'appel `terme(4)` commence par initialiser la variable `U` avec la valeur 1 (ligne 2 de la fonction).

   Puis, la boucle `for` va s'exécuter `N` fois, ici donc 4 fois, avec le compteur `i` qui va prendre les valeurs entières entre 0 et `N-1`, donc ici 0, 1, 2 et 3.

   — La première exécution « modifie » `U` en `U + 0`, la valeur reste égale à 1;

— La deuxième exécution modifie `U` en `U + 1`, la valeur devient égale à $1+1=2$;

— La troisième exécution modifie `U` en `U + 2`, la valeur devient égale à $2+2=4$;

— La dernière exécution modifie `U` en `U + 3`, la valeur devient égale à $4+3=7$.

On a donc bien la valeur 7 renvoyée par cet appel.

4. Affirmation 4 : FAUSSE.

Pour connaître le montant total du prix A, il suffit de multipler 1000 par 15. Le montant total est donc de 15 000 €.

Pour le prix B, il s'agit d'additionner les 15 premier termes d'une suite géométrique de premier terme 1 (le montant du prix le premier jours) et de raison 2 (car le montant chaque jour est le double du montant de la veille).

On applique la formule connue : $1 \times \dfrac{1-2^{15}}{1-2} = \dfrac{1-2^{15}}{-1} = 2^{15}-1 = 32\,767$.

Comme $32\,767 > 15\,000$, le prix B est (nettement) plus avantageux.

Remarque : En cas d'oubli de cette formule, on peut aussi (patiemment) calculer la somme des 15 termes, voire même remarquer que la somme reçue au quinzième jour sera de $2^{15-1} = 16\,384$, donc rien que la somme reçue le quinzième jour du prix B est strictement supérieure aux quinze jours cumulés pour le prix A.

5. Affirmation 5 : VRAIE.

Soit n un entier naturel non nul quelconque :

— La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$, et $\ln(1) = 0$, donc on en déduit que la fonction ln est à valeurs positives sur $[1\,;\,+\infty[$ (voire à valeurs strictement positives sur $]1\,;\,+\infty[$).

— $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \int_1^{n+1} \ln x\,\mathrm{d}x - \int_1^n \ln x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_n^{n+1} \ln x\,\mathrm{d}x \quad \text{par la relation de Chasles} \end{aligned}$$

— l'expression $v_{n+1} - v_n$ est donc l'intégrale, entre deux bornes ordonnées dans l'ordre croissant (car $n < n+1$) d'une fonction à valeurs positives sur l'intervalle d'intégration (car $[n\,;\,n+1] \subset [1\,;\,+\infty[$, puisque $n \geqslant 1$) : cette expression est donc positive.

Pour un n quelconque supérieur à 1, la différence entre les termes v_{n+1} et v_n est positive, donc la suite (v_n) est bien croissante.

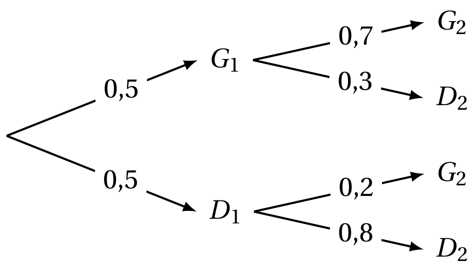
Éléments de la correction de l'exercice 6

Asie 11 juin 2024

1. D'après l'énoncé, si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70% des cas, elle perd donc la suivante dans 30 %.

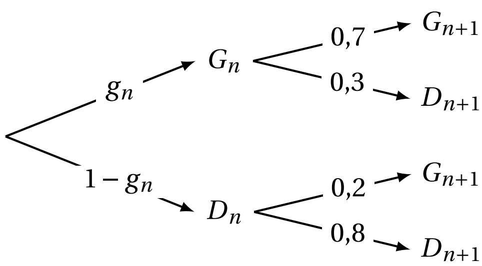
On a donc $P_{G_1}(D_2) = 0{,}3$

2. On a l'arbre suivant :



3. Les évènements G_1 et D_1 partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :
$$\begin{aligned} g_2 = P(G_2) &= P(G_1 \cap G_2) + P(D_1 \cap G_2) \\ &= 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 \\ &= 0,35 + 0,1 \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

4. **a.** On a l'arbre suivant :



b. Pour tout entier naturel n non nul, les évènements G_n et D_n déterminent une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :
$$\begin{aligned} g_{n+1} = P(G_{n+1}) &= P(G_n \cap G_{n+1}) + P(D_n \cap G_{n+1}) \\ &= g_n \times 0,7 + (1 - g_n) \times 0,2 \\ &= 0,7g_n + 0,2 - 0,2g_n \\ &= 0,5g_n + 0,2 \end{aligned}$$
On arrive bien au résultat annoncé.

5. **a.** Soit n un entier non nul.
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= g_{n+1} - 0,4 \quad \text{par définition de la suite } (v_n) \\ &= 0,5g_n + 0,2 - 0,4 \quad \text{par définition de la suite } \left(g_n\right) \\ &= 0,5(v_n + 0,4) - 0,2 \quad \text{car } v_n = g_n - 0,4 \iff g_n = v_n + 0,4 \\ &= 0,5v_n + 0,2 - 0,2 \\ &= 0,5v_n \end{aligned}$$
La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme
$v_1 = g_1 - 0,4 = 0,5 - 0,4 = 0,1$

b. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n non nul :
$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,1 \times 0,5^{n-1}$
Or pour tout entier naturel n non nul $g_n = v_n + 0,4$ donc $g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4$.

6. Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} g_{n+1}-g_n &= 0{,}1\times 0{,}5^n+0{,}4-0{,}1\times 0{,}5^{n-1}-0{,}4\\ &= 0{,}1\times 0{,}5^{n-1}\times(0{,}5-1)\\ &= 0{,}1\times 0{,}5^{n-1}\times(-0{,}5)\\ &= -0{,}1\times 0{,}5^n \end{aligned}$$

or $0{,}5>0$ et $0{,}1>0$ donc $g_{n+1}-g_n<0 \iff g_{n+1}<g_n$

La suite (g_n) est strictement décroissante.

7. $-1<0{,}5<1$, donc on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}(0{,}5)^n=0$, donc, par limite du produit et de la somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}1\times 0{,}5^{n-1}+0{,}4=0{,}4$.

Sur le long terme, Léa gagnera son match dans 40 % des cas.

8. Déterminons les valeurs de n pour lesquels $g_n-0{,}4\leqslant 0{,}001$

$$\begin{aligned} g_n-0{,}4\leqslant 0{,}001 &\iff 0{,}1\times 0{,}5^{n-1}+0{,}4-0{,}4\leqslant 0{,}001\\ &\iff 0{,}1\times 0{,}5^{n-1}\leqslant 0{,}001\\ &\iff 0{,}5^{n-1}\leqslant 0{,}01 \quad \text{car } 0{,}1>0\\ &\iff \ln\left(0{,}5^{n-1}\right)\leqslant \ln(0{,}01) \quad \text{par croissance de la fonction ln sur } \mathbb{R}^{*+}\\ &\iff (n-1)\ln(0{,}5)\leqslant \ln(0{,}01)\\ &\iff (n-1)\geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)} \quad \text{car } \ln(0{,}5)<0\\ &\iff n\geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)}+1 \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)}+1=\dfrac{-\ln(100)}{-\ln(2)}+1=\dfrac{\ln(100)+\ln(2)}{\ln(2)}=\dfrac{\ln(200)}{\ln(2)}\approx 7{,}64$ donc, n étant un entier, la plus petite valeur de n tel que $g_n-0{,}4\leqslant 0{,}001$ est 8.

9. Le programme complété est :

```
def seuil(e):
  g = 0.5
  n = 1
  while g > 0.4 + e :
    g = 0.5 * g + 0.2
    n = n + 1
  return(n)
```

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 7

Asie 11 juin 2024

Partie A :

1. • Limite en 0 :

$\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ et, d'après la propriété des croissances comparées : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$

Par limite de la somme, on a donc : $\lim\limits_{x\to 0} x^2-x\ln(x)=0$

• Limite en $+\infty$:

$f(x) = x^2 - x\ln(x) = x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$

Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc, par limite de la somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 1$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc, par limite du produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$

2. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x) = 2x - 1\times\ln(x) - x\times\dfrac{1}{x} = 2x - 1 - \ln(x)$.

3. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f''(x) = 2 - 0 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-1}{x}$.

4. Déterminons le signe de $2x - 1$:

$$\begin{aligned} 2x - 1 > 0 &\iff 2x > 1 \\ &\iff x > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\times\dfrac{1}{2} - 1 - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - 1 + \ln(2) = \ln(2)$

On a donc :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $2x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variations de f'	$\Vert$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	

5. Le minimum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$ est donc $\ln(2)$ qui est strictement positif, donc, sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$ et donc, la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B :

1. Pour tout réel x strictement positif, on a : $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

Déterminons le signe de $x - 1$:

$x - 1 > 0 \iff x > 1$

L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

$g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1$

On a donc :

x	0		1		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variations de g	$\Vert$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

2.
$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x = x^2 - x\ln(x) \\ &\iff 0 = x^2 - x - x\ln(x) \\ &\iff 0 = x(x - 1 - \ln(x)) \\ &\iff 0 = x - 1 - \ln(x) \quad \text{car } x > 0 \quad \text{donc } x \neq 0 \\ &\iff 1 = x - \ln(x) \\ &\iff 1 = g(x) \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

L'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$, cette solution est $x = 1$.

Partie C :

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Initialisation : Calculons u_1. $u_1 = f(u_0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\ln(2)}{2} \approx 0{,}597$.

On constate que l'inégalité est vraie pour $n = 0$, on a bien : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Montrons que l'inégalité est vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 &\implies f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1) \\ &\qquad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur }]0\ ;\ +\infty[\\ &\implies f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1 \\ &\qquad \text{car } f \text{ est la fonction de récurrence de la suite } (u_n) \\ &\implies \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1 \\ &\qquad \text{car } f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}60 > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ceci montre que les inégalités sont vraies au rang $n+1$.

Conclusion : Les inégalités sont vraies au rang 0, et si elle sont vraies au rang n naturel, elles sont vraies au rang suivant $n+1$, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$

2. On a notamment :

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$. La suite (u_n) est donc bornée par $\dfrac{1}{2}$ et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est convergente, vers une limite ℓ vérifiant $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $]0\ ;\ +\infty[$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

D'après la question **2.** de la **Partie B**, cette équation n'a qu'une solution dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$: 1.

La suite (u_n) converge donc vers $\ell = 1$.

Éléments de la correction de l'exercice 8

Métropole 19 juin 2024 J1 (secours)

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$,
où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. **a.** En posant $u(x) = x^2+1$ et avec $u'(x) = 2x$, on obtient :

$[\ln(u)]' = \dfrac{u'}{u}$ donc $\left[\ln(x^2+1)\right]' = \dfrac{2x}{x^2+1}$, et donc :

pour tout nombre réel x, $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

b. Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+1 \geqslant 1$ donc $x^2+1 > 0$.

Comme $(x-1)^2 \geqslant 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a par quotient $f'(x) \geqslant 0$: la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout nombre réel $x > 0$n on a :

$f(x) = x - \ln\left[x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right] = x - \ln(x^2) - \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

3. On a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1$, puis par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = \ln 1 = 0$.
- $x - 2\ln(x) = x\left(1 - 2\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

  On sait (puissances comparées) que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2\ln(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) & = & u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Soit la propriété « $u_n \geqslant 0$ ».
Initialisation On a $u_0 = 7 \geqslant 0$: la propriété est vraie au rang 0 ;
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n \geqslant 0$: la fonction f étant croissante on a donc $u_n \geqslant 0 \Rightarrow f(u_n) \geqslant f(0)$; or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(0) = 0$, donc $u_{n+1} \geqslant 0$.
Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $u_n \geqslant 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

2. De la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right)$ on déduit :
$u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2 + 1\right)$.
$u_n^2 \geqslant 0 \Rightarrow u_n^2 + 1 \geqslant 1 \Rightarrow \ln\left(u_n^2 + 1\right) \geqslant \ln(1)0$ par croissance de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}^*$.
$\ln(1) = 0$ donc $\ln\left(u_n^2 + 1\right) \geqslant 0$ et donc $-\ln\left(u_n^2 + 1\right) \leqslant 0$.
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \iff u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par zéro ; d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.

4. La fonction f est continue car dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc la relation de récurrence donne par limite en plus l'infini :
$\ell = \ell - \ln\left(\ell^2 + 1\right) \iff \ln\left(\ell^2 + 1\right) = 0 \iff \ell^2 + 1 = 1 \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0$

5. **a.** On complète le script ci-dessous écrit en langage Python : afin qu'il

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
   n = 0
   u = 7
   while u > h :
      n = n + 1
      u = u - ln(u**2+1)
   return n
```

b. La calculatrice donne $u_{96} \approx 0{,}01003$ et $u_{97} \approx 0{,}0099$
Le programme Python renverra la valeur 97 ; à partir du 98e les termes seront inférieurs à un centième.

Partie C : calcul intégral

1. f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, donc, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0)$.
   Or $f(0) = 0$ donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Soit l'intégrale : $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   f étant positive sur $\mathbb{R}^+$ l'est sur l'intervalle $[2\,;4]$, donc I est égale (en unités d'aire) à l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 2$ et $x = 4$.
3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2\,;\,4]$, on a l'encadrement : $0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25$.
   Sur l'intervalle $[2\,;4]$, l'intégration conserve l'ordre donc :
   $$\begin{aligned}0{,}5x-1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x+0{,}25 &\Longrightarrow \int_2^4 (0{,}5x-1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 (0{,}25x+0{,}25)\,\mathrm{d}x\\ &\Longrightarrow \left[\frac{x^2}{4}-x\right]_2^4 \leqslant I \leqslant \left[\frac{x^2}{8}+0{,}25x\right]_2^4\\ &\Longrightarrow 4-4-(1-2) \leqslant I \leqslant 2+1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\\ &\Longrightarrow 1 \leqslant I \leqslant 2\end{aligned}$$

Éléments de la correction de l'exercice 9

Métropole 20 juin 2024

Partie A : étude d'un modèle discret.

1. Ajouter 15 g, soit 15 000 mg, de chlore, dans une piscine de 50 m^3, soit 50 000 L, c'est donc faire augmenter la concentration de : $\dfrac{15000}{50000} = \dfrac{15}{50} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.
2. *Remarque :* la relation de récurrence peut s'interpréter, en disant que sous l'action du milieu ambiant, 8 % du chlore présent dans la piscine disparaît chaque jour (et donc 92 % du chlore présent une journée est encore présent le jour suivant).
   a. *Initialisation :* on a $v_0 = 0{,}7$
   d'après la relation de récurrence : $v_1 = 0{,}92v_0 + 0{,}3 = 0{,}944$.
   On a donc bien : $v_0 \leqslant v_1 \leqslant 4$.
   L'inégalité souhaitée est donc vérifiée au rang 0.
   Hérédité : soit n naturel donné, tel que l'inégalité est vraie au rang n, c'est-à-dire que : $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.
   Par hypothèse de récurrence, on a :
   $$\begin{aligned}v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4 &\Longrightarrow 0{,}92v_n \leqslant 0{,}92v_{n+1} \leqslant 0{,}92\times 4 \qquad \text{car } 0{,}92 > 0\\ &\Longrightarrow 0{,}92v_n + 0{,}3 \leqslant 0{,}92v_{n+1} + 0{,}3 \leqslant 3{,}68 + 0{,}3\\ &\Longrightarrow v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 3{,}98\\ &\Longrightarrow v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 4\end{aligned}$$

La véracité de l'inégalité est donc héréditaire.

Conclusion : L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il l'est encore au rang $n+1$, donc en vertu du principe de récurrence, pour tout entier n naturel, on a : $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

b. De la question précédente, on retient :

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leqslant v_{n+1}$ donc la suite (v_n) est croissante;

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leqslant 4$ donc la suite (v_n) est majorée par 4.

D'après le théorème de croissance monotone la suite (v_n) est donc convergente, vers une limite ℓ inférieure ou égale à 4.

De plus, la suite (v_n) est définie par récurrence, et la fonction de récurrence : $x \longmapsto 0{,}92x+0{,}3$ est continue sur $\mathbb{R}$, puisque c'est une fonction affine, donc la suite ne peut converger que vers un point fixe de la fonction de récurrence

ℓ est donc une solution de l'équation : $x = 0{,}92x + 0{,}3 \iff 0{,}08x = 0{,}3$

$$\iff x = \frac{0{,}3}{0{,}08}$$

$$\iff x = 3{,}75$$

L'équation n'a qu'une solution, donc la suite (v_n) converge vers 3,75.

3. À long terme, le taux de chlore ne sera pas conforme à la préconisation des piscinistes, car si la limite est 3,75 alors tout intervalle ouvert contenant 3,75 contiendra tous les termes à partir d'un certain rang. Notamment l'intervalle $]3\,;\,5[$.

Il existe donc un rang à partir duquel les termes de la suite seront dans l'intervalle $]3\,;\,5[$, et donc la concentration en chlore dépassera strictement la limite supérieure de $3\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$ recommandée par les piscinistes.

4. C'est un algorithme de seuil classique, on va calculer les termes de la suite, les uns après les autres. Pour s'arrêter dès qu'un terme est strictement supérieur au seuil s, il faut continuer tant que (while) les termes ne sont pas strictement supérieurs, donc tant que les termes sont inférieurs ou égaux au seuil s.

Le programme complété est donc :

```
def alerte_chlore(s) :
    n = 0
    u = 0.7
    while u <= s :
        n = n + 1
        u = 0.92*u + 0.3
    return n
```

5. En saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)`, le programme renvoie 17 (en effet, $v_{16} \approx 2{,}95 \leqslant 3$ et $v_{17} \approx 3{,}01 > 3$).

Dans le contexte de l'exercice, cela veut dire que si Alain applique cette méthode, 17 jours après le 19 juin, le taux de chlore dans sa piscine serait trop élevé, par rapport aux recommandations des piscinistes.

Partie B : étude d'un modèle continu.

1. Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$, où a et b sont des réels (a non nul), ont pour solutions les équations de la forme $x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

Ici, avec $a = -0{,}08$ et $b = \dfrac{q}{50}$, cela conduit à :

$x \longmapsto C\mathrm{e}^{-0,08x} - \dfrac{\frac{q}{50}}{-0,08} = C\mathrm{e}^{-0,08x} + \dfrac{q}{50 \times 0,08}$.

On arrive donc bien à une solution f de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{-0,08x} + \dfrac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

2. **a.** Puisque $-0,08 < 0$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} -0,08x = -\infty$

donc, par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,08x} = \lim\limits_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{y} = 0$

puis, par limite du produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} C\mathrm{e}^{-0,08x} = 0$

enfin, par limite de la somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{q}{4}$.

b. Si on veut que le taux de chlore se stabilise autour de $2\,\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$, il faut que la limite de la fonction f soit 2, donc on veut :

$\dfrac{q}{4} = 2 \iff q = 8$.

Pour cet objectif à long terme, Alain devra donc ajouter 8 grammes de chlore par jour dans sa piscine.

À l'instant $t = 0$, on avait donc un taux de $0,7\,\mathrm{mg}\cdot\mathrm{L}^{-1}$, donc $f(0) = 0,7$.

$$\begin{aligned} f(0) = 0,7 &\iff C\mathrm{e}^{-0,08\times 0} + \frac{8}{4} = 0,7 \\ &\iff C + 2 = 0,7 \\ &\iff C = -1,3 \end{aligned}$$

La fonction f donnant l'évolution du taux de chlore dans la piscine d'Alain est donc : $f : x \longmapsto -1,3\mathrm{e}^{-0,08x} + 2$.

Éléments de la correction de l'exercice 10

Métropole 20 juin 2024 J2 (dévoilé)

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a.

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$

1. **a.** D'après la définition : pour tout entier naturel n

$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \iff u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n \iff u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.

b. *Méthode* 1 : d'après la définition : pour tout entier naturel n

$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \iff u_{n+1} = (u_n - 1)^2 - 1 + 2 \iff u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1 \iff u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 + 1 - u_n \iff u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 - 1(u_n - 1) \iff u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 1 - 1) \iff] \iff u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$

Méthode 2 : Soit $P_n = u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$; en posant $u_n = x$, on obtient

$P_n = x^2 - 3x + 2$: ce trinôme a deux racines (car $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 = 1$) :

$x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1$.

Donc $P_n = (x-1)(x-2) = (u_n - 1)(u_n - 2)$.

2. **a.** *Initialisation* : $u_0 = a$ et $1 < a < 2$, donc $u_0 < 2$: l'inégalité est vraie au rang 0 ;

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 2$.

$u_n < 2 \iff u_n - 2 < 0$ et on a admis que $u_n > 1 \iff u_n - 1 > 0$, donc d'après le **1 b.** $(u_n - 1)(u_n - 2) < 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n < 2$, d'où par transitivité : $u_{n+1} < 2$: l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$, donc par le principe de récurrence :

pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.

b. On a vu dans la question précédente que $1 < u_{n+1} < u_n < 2$ qui montre :

- que la suite (u_n) est décroissante ;
- que la suite (u_n) est minorée par 1.

La suite (u_n) est monotone décroissante et minorée par le 1 : elle converge donc vers un réel $\ell \geqslant 1$.

Par continuité de la fonction polynôme $x \longmapsto x^2 - 2x + 2$, la relation de récurrence donne à la limite en plus l'infini :

$$\ell = \ell^2 - 2\ell + 2 \iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} \ell - 1 & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ \ell - 2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \ell & = & 1 \\ & \text{ou} & \\ \ell & = & 2 \end{array}\right.$$

$\ell = 2$ n'est pas possible puisque (u_n) étant strictement décroissante :

$\ell < u_0 = a < 2$, d'où $\ell < 2$, donc $\ell = 1$.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$

1. u(2,1) renvoie 2 et u(2,2) renvoie 2
2. On peut conjecturer que la suite (u_n) est constante : $u_n = 2$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$

Partie C : étude dans le cas général

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.

a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) = \ln\left[(u_n - 1)^2\right] = 2\ln(u_n - 1)$ car on sait que $u_n > 1 \iff u_n - 1 > 0$.

Finalement : $v_{n+1} = 2\ln(u_n - 1) = 2v_n$.

L'égalité $v_{n+1} = 2v_n$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 de premier terme $v_0 = \ln a - 1)$

b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n = 2^n \ln(a-1)$.

On peut écrire $v_n = \ln(a-1)^{2^n} = \ln(u_n - 1)$ soit par croissance de la fonction logarithme népérien :

$(a-1)^{2^n} = u_n - 1 \iff u_n = 1 + (a-1)^{2^n} = 1 + \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)}$.

2.

- Si $1 < a < 2$, alors $0 < a - 1 < 1 \Rightarrow \ln(a-1) < 0$ (par croissance de la fonction logarithme népérien).

On a donc $2^n \ln(a-1) < 0$ et on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

- Si $a = 2$, $\ln(a-1) = \ln 1 = 0$, donc $2^n \ln(a-1) = 0$ et $u_n = 1+1 = 2$. u est constante et on peut écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.
- Si $a > 2$, $a - 1 > 1$, donc $\ln(a-1) > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La suite est divergente.

Éléments de la correction de l'exercice 11

Polynésie 19 juin 2024

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{4}{5-u_n}$.

Partie A

1. On complète la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = 3
    for i in range(n) :
        u = 4/(5 - u)
    return u
```

2. À la première boucle on trouve $u_1 = \dfrac{4}{5-3} = \dfrac{4}{2} = 2$.

   À la seconde on trouve $u_2 = \dfrac{4}{5-2} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}333$.

3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

   Les affichages successifs sont des approximations de u_2, u_5, u_{10}, u_{20} et leur examen laisse à conjecturer que la la limite de la suite est égale à 1.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ par : $f(x) = \dfrac{4}{5-x}$.
Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. La fonction f quotient de fonctions dérivables sur $]-\infty\,;\,5[$, de dénominateur non nul puisque $x \neq 5$, est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{0-4\times(-1)}{(5-x)^2} = \dfrac{4}{(5-x)^2}$
Quotient de deux carrés cette dérivée est strictement positive, donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,5[$.

2. Soit la propriété : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.
Initialisation : on a vu que $u_1 = 2$ et on a $u_0 = 3$, donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 4$.
La propriété est vraie au rang 0.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$: ces nombres étant rangés dans l'ordre croissant leur images par f fonction strictement croissante pour des réels plus petits que 4, sont rangées dans le même ordre, soit $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(4)$.
Comme $f(1) = \dfrac{4}{5-1} = 1$ et $f(4) = \dfrac{4}{5-4} = 4$, on obtient $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.

3. **a.** Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
On a pour $x < 5$:
$f(x) = x \iff \dfrac{4}{5-x} = x \iff 4 = x(5-x) \iff 4 = 5x - x^2 \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$
b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$, revient d'après la question précédente à résoudre l'équation du second degré $x^2 - 5x + 4 = 0$.
Les racines de cette équation 1 et 4 sont évidentes (sinon on calcule le discriminant), donc :
$x^2-5x+4 = 0 \iff (x-1)(x-4) = 0 \iff \left[\begin{array}{ccc} x-1 & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ x-4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ & \text{ou} & \\ x & = & 4 \end{array}\right.$
La solution 4 est vraisemblable puisque $x \leqslant 4$, on a donc $S = \{1\,;\,4\}$.

4. L'encadrement démontré par récurrence montre deux choses : pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - $u_{n+1} \leqslant u_n$ signifie que la suite (u_n) est décroissante ;
   - $1 \leqslant u_n$ signifie que la suite (u_n) est minorée par 1.

La suite (u_n) décroissante et minorée par 1 est donc convergente vers un réel $\ell \geqslant 1$.
Par continuité de la fonction trinôme la limite ℓ est solution de l'équation précédente et cette solution est 1 ou 4, mais on a vu que $u_0 = 3$ et la suite étant décroissante la solution 4 est à rejeter..
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
La suite (u_n) converge vers 1.

5. Avec $u_0 = 4$, on a $u_1 = \dfrac{4}{5-4} = \dfrac{4}{1} = 4$ et donc en répétant le calcul $u_n = 4$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
Dans ce cas la suite est constante : tous ses termes sont égaux à 4, elle converge vers 4.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 12

Polynésie 21 juin 2024

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel} \quad n,\ u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. **a.**

- $u_1 = 8 - \ln 2 \approx 7{,}31$;
- $u_2 = 8 - \ln 2 \ln 8 - \ln 24 - \approx 6{,}70$.

b. `mystere(10)` donne la somme des premiers termes de la suite de u_0 à u_9, soit

$u_0 + u_1 + \ldots + u_9 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

c. Il suffit en ligne 7 de remplacer S par (S /k)

2.

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

La fonction f somme de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle en posant $u(x) = \dfrac{x}{4}$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{4}$,

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{\frac{x}{4}} = 1 - \dfrac{1}{4} \times 4\dfrac{1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$:

- si $0 < x < 1$, alors $x - 1 < 0$: la fonction f est décroissante sur $]0\ ;\ 1[$;
- si $x > 1$, alors $x - 1 > 0$: la fonction f est croissante sur $-1\ ;\ +\infty[$
- si $x = 1$, alors $f'(1) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln\dfrac{1}{4} = 1 - (-\ln 4) = 1 + \ln 4$ est le minimum de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. **a.** *Initialisation* : on a vu que $u_1 \approx 7{,}3$ et comme $u_0 = 8$, on a donc :

$$1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$$

l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

On sait que sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ la fonction f est croissante, donc on a

$f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$.

Or $f(1) = 1 - \ln\dfrac{1}{4} \approx 2{,}39$, donc $f(1) \geqslant 1$ et on a

$1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$ il l'est encore au rang suivant : d'après le principe de récurrence :

pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

b. L'encadrement précédent montre que : pour tout naturel n

- $u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante;
- $1 \leqslant u_n$: la suite (u_n) est minorée par 1.

On sait qu'alors la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 1$

c. $f(x) = x \iff x - \ln\left(\dfrac{x}{4}\right) = x \iff 0 = \ln\left(\dfrac{x}{4}\right) \iff \dfrac{x}{4} = 1 \iff x = 4.$

d. Par continuité de la fonction f (car elle est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$), la relation $u_{n+1} = u_n - \ln\left(\dfrac{u_n}{4}\right)$, donne puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$:

$\ell = \ell - \ln\left(\dfrac{\ell}{4}\right)$: d'après la question précédente $\ell = 4$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 13

Polynésie 5 septembre 2024

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1er étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule ;
- le 2e étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules ;
- le 3e étage possède 9 boules ;
- ...
- le n-ième étage possède n^2 boules.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n-ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages est :
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$

2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

a. $S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \left(u_1 + u_2 + u_3 + u_4\right) + u_5 30 + 5^2 = 55$
Le nombre total de boules d'une pyramide de 5 étages est : $S_5 = 55$.

b. On complète la fonction `pyramide` ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n, l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1, n+1) :
        S = S + i**2
    return S
```

c. Pour tout entier naturel n :

- $$\begin{aligned}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{8} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

- $\dfrac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \dfrac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6}$
$= \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

Donc $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$

d. On démontre par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1 : S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1$ et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = \dfrac{1\times 2\times 3}{6} = 1$
  Donc la propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie au rang n, avec $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. C'est l'hypothèse de récurrence.
  $S_{n+1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} = \left(u_1 + u_2 + \cdots + u_n\right) + u_{n+1}$
  $= S_n + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$
  $= \dfrac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$ (d'après la question précédente)
  $= \dfrac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$
  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 1, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$.
  Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1 : S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges.
Il faut donc trouver le plus grand entier n tel que $S_n \leqslant 200$.
On calcule : $S(7) = \dfrac{7(7+1)(2\times 7+1}{6} = 140 < 200$ et $S(8) = \dfrac{8(8+1)(2\times 8+1)}{6} = 204 > 200$.
Le marchand utilise donc 140 oranges pour construire une pyramide à 7 étages.

Éléments de la correction de l'exercice 14

Métropole Antilles-Guyane 11 septembre 2024

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :
pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = -0{,}8t_n + 18$.

Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

Pour tout n : $w_{n+1} = t_{n+1} - 10 = -0{,}8t_n + 18 - 10 = -0{,}8t_n + 8 = -0{,}8\,(t_n - 10)$
$= -0{,}8w_n$

Donc la suite (w_n) est géométrique de raison $-0{,}8$.

Affirmation 1 vraie

2. Soit la suite (S_n) qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4$.

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \dfrac{S_n}{n}$.

Affirmation 2 : La suite (u_n) converge.

$n > 0$ donc
$3n-4 \leqslant S_n \leqslant 3n+4$. entraîne $\dfrac{3n-4}{n} \leqslant \dfrac{S_n}{n} \leqslant \dfrac{3n+4}{n}$ c'est-à-dire $3-\dfrac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant 3+\dfrac{4}{n}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \dfrac{4}{n} = 3$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \dfrac{4}{n} = 3$
- Pour tout $n > 0$: $3 - \dfrac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{4}{n}$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Affirmation 2 vraie

3. Soit la suite (v_n) définie par : $v_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{v_n}$.

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

On va démontrer cette propriété par récurrence.

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$: $v_1 = 2$ et $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1+1}{1} = 2$. Donc la propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $v_n = \dfrac{n+1}{n}$ (hypothèse de récurrence).
  $v_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{v_n} = 2 - \dfrac{1}{\frac{n+1}{n}} = 2 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2(n+1)-n}{n+1} = \dfrac{2n+2-n}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$
  $= \dfrac{(n+1)+1}{n+1}$
  Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 1, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$. Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Affirmation 3 vraie

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^{\,n} - n$.

Affirmation 4 : La suite (u_n) converge.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{\,x} - x$. Donc $u_n = f(n)$ pour tout n.

Pour $x > 0$, $f(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\,x}}{x} - 1\right)$.

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1 = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right) = +\infty$.

On a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$n ce qui entraîne que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Affirmation 4 fausse

5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n.

```
def u(n) :
    valeur = 2
    for k in range(n) :
        valeur = 0.5 * (valeur + 2/valeur)
    return valeur
```

On admet que (u_n) est décroissante et vérifie pour tout n : $\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.
Affirmation 5 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

D'après le script Python, (u_n) est définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & 0{,}5\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \text{ pour tout } n \end{array}\right.$

- La suite (u_n) est décroissante.
- Pour tout n, on a : $\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2$ donc la suite est minorée par $\sqrt{2}$.
- D'après le théorème de la convergence monotone, on peut dire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ tel que $\ell \geqslant \sqrt{2}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$

De l'égalité $u_{n+1} = 0{,}5\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$, on déduit : $\ell = 0{,}5\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right)$.

On résout cette équation.

$\ell = 0{,}5\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right) \iff 2\ell = \ell + \dfrac{2}{\ell} \iff \ell = \dfrac{2}{\ell} \iff \ell^2 = 2 \iff \ell = \sqrt{2}$ ou $\ell = -\sqrt{2}$

On a vu que $\ell \geqslant \sqrt{2}$ donc $\ell = \sqrt{2}$.

Affirmation 5 vraie

Éléments de la correction de l'exercice 15

Amérique du Sud 21 novembre 2024

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout n non nul par $u_n = \dfrac{25 + (-1)^n}{n}$.

Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.

Pour tout n non nul, on a : $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant +1$ donc $25 - 1 \leqslant 25 + (-1)^n \leqslant 25 + 1$ donc $24 \leqslant 25 + (-1)^n \leqslant 26$ donc $\dfrac{24}{n} \leqslant \dfrac{25 + (-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{26}{n}$ donc $\dfrac{24}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{26}{n}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{24}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{26}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Affirmation 1 fausse

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\left\{\begin{array}{lcl} w_0 & = & 1 \\ w_{n+1} & = & \dfrac{w_n}{1+w_n}\end{array}\right.$

On admet que pour tout entier naturel n, $w_n > 0$n et on considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.

Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

Pour tout n, on a : $t_{n+1} = \dfrac{k}{w_{n+1}} = \dfrac{k}{\frac{w_n}{1+w_n}} = \dfrac{k(1+w_n)}{w_n} = \dfrac{k+kw_n}{w_n} = \dfrac{k}{w_n} + k = t_n + k$

Donc la suite (t_n) est arithmétique de raison k.

De plus, $k > 0$ donc la suite (t_n) est strictement croissante.

Affirmation 2 vraie

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \ln(1+v_n)\end{array}\right.$

On admet que pour tout entier naturel n, $v_n > 0$,

Affirmation 3 : La suite (v_n) est décroissante.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $v_n > v_{n+1}$.

On va démontrer par récurrence que cette propriété est vraie pour tout n.

- **Initialisation**
  $v_0 = 1$ et $v_1 = \ln(1+v_0) = \ln(2) \approx 0{,}69$; donc $v_0 > v_1$.
  La propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité**
  On suppose que $v_n > v_{n+1}$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  $v_n > v_{n+1}$ donc $1+v_n > 1+v_{n+1}$
  Or la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $\ln(1+v_n) > \ln(1+v_{n+1})$, ce qui veut dire que $v_{n+1} > v_{n+2}$. La propriété est donc héréditaire.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0. Elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a démontré que, pour tout $n \geqslant 0$, on avait : $v_n > v_{n+1}$; donc la suite (v_n) est décroissante.

Affirmation 3 vraie

4. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} [\ln(x)]^n \,\mathrm{d}x$.

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.

$I_{n+1} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} [\ln(x)]^{n+1} \,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 1 \times [\ln(x)]^{n+1} \,\mathrm{d}x$

On va calculer I_{n+1} au moyen d'une intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$

On pose $u'(x) = 1$ donc $u(x) = x$, et $v(x) = [\ln(x)]^{n+1}$ donc $v'(x) = (n+1) \times \dfrac{1}{x} \times [\ln(x)]^n$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[x \times [\ln(x)]^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times (n+1) \times \frac{1}{x} \times [\ln(x)]^n \,\mathrm{d}x \\ &= \left(\mathrm{e}\,[\ln(\mathrm{e})]^{n+1} - 1\,[\ln(1)]^{n+1}\right) - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} [\ln(x)]^n \,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - (n+1)\,I_n \end{aligned}$$

Affirmation 4 vraie