

ANNALES DU BAC MATHÉMATIQUES 2024

PROBABILITES

Exercices extraits du site de l'APMEP

PAR VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

SUJETS ET CORRIGÉS
50 PAGES

SOMMAIRE

• Exercice 1 (Amérique du Nord 22 mai 2024)	page 3
Solution de l'exercice 1	page 23
• Exercice 2 (Amérique du Nord 22 mai 2024)	page 4
Solution de l'exercice 2	page 25
• Exercice 3 (Centres étrangers 5 juin 2024)	page 5
Solution de l'exercice 3	page 26
• Exercice 4 (Centres étrangers 6 juin 2024)	
<i>probabilité avec somme de variables aléatoires</i>	page 6
Solution de l'exercice 4	page 27
• Exercice 5 (Asie 10 juin 2024)	page 7
Solution de l'exercice 5	page 29
• Exercice 6 (Asie 11 juin 2024)	page 8
Solution de l'exercice 6	page 31
• Exercice 7 (Métropole 19 juin 2024)	page 10
Solution de l'exercice 7	page 33
• Exercice 8 (Métropole 19 juin 2024 J1 (secours))	page 11
Solution de l'exercice 8	page 34
• Exercice 9 (Métropole 20 juin 2024)	page 12
Solution de l'exercice 9	page 36
• Exercice 10 (Métropole 20 juin 2024 J2 (dévoilé))	page 14
Solution de l'exercice 10	page 37
• Exercice 11 (Polynésie 19 juin 2024)	page 15
Solution de l'exercice 11	page 39
• Exercice 12 (Polynésie 21 juin 2024)	page 16
Solution de l'exercice 12	page 41
• Exercice 14 (Métropole Antilles-Guyane 11 septembre 2024)	page 18
Solution de l'exercice 14	page 43
• Exercice 15 (Amérique du Sud 21 novembre 2024)	page 20
Solution de l'exercice 15	page 45
• Exercice 13 (Polynésie 5 septembre 2024)	page 18
Solution de l'exercice 13	page 42
• Exercice 16 (Amérique du Sud 22 novembre 2024)	page 21
Solution de l'exercice 16	page 48

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.

Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

- la probabilité de tirer un objet rare est de 7 %;
- si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 %;
- si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet. On note :

- R l'évènement « le joueur tire un objet rare »;
- E l'évènement « le joueur tire une épée »;
- $\bar{R}$ et $\bar{E}$ les évènements contraires des évènements R et E .

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.
2. Calculer la probabilité de tirer une épée.
3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millièm.

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X . Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.
2. Déterminer $P(X < 6)$. Arrondir le résultat au millièm.
3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geq k) \geq 0,5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %. Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à 0,95.

Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.

Les données publiées le 1^{er} mars 2023 par le ministère de la transition écologique sur les immatriculations de véhicules particuliers en France en 2022 contiennent les informations suivantes :

- 22,86 % des véhicules étaient des véhicules neufs ;
- 8,08 % des véhicules neufs étaient des hybrides rechargeables ;
- 1,27 % des véhicules d'occasion (c'est-à-dire qui ne sont pas neufs) étaient des hybrides rechargeables.

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au dix-millième.

Partie A

Dans cette partie, on considère un véhicule particulier immatriculé en France en 2022.

On note :

- N l'évènement « le véhicule est neuf » ;
- R l'évènement « le véhicule est hybride rechargeable » ;
- $\overline{N}$ et $\overline{R}$ les évènements contraires des évènements contraires de N et R .

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf et hybride rechargeable.
3. Démontrer que la valeur arrondie au dix-millième de la probabilité que ce véhicule soit hybride rechargeable est 0,0283.
4. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable.

Partie B

Dans cette partie, on choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022.

Dans la suite, on admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.

On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser la valeur de ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactly 325 de ces véhicules soient neufs.
3. Déterminer la probabilité $p(X \geq 325)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

On choisit désormais n véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022, où n désigne un entier naturel strictement positif.

On rappelle que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.

On assimile le choix de ces n véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

1. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n que tous ces véhicules soient d'occasion.
2. On note q_n la probabilité qu'au moins un de ces véhicules soit neuf. En résolvant une inéquation, déterminer la plus petite valeur de n telle que $q_n \geq 0,9999$.

EXERCICE 3

Centres étrangers 5 juin 2024

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{0,96x}{0,93x + 0,03}.$$

1. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$,

$$f'(x) = \frac{0,0288}{(0,93x + 0,03)^2}.$$

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

Partie B

La lutte contre le dopage passe notamment par la réalisation de contrôles antidopage qui visent à déterminer si un sportif a fait usage de substances interdites.

Lors d'une compétition rassemblant 1 000 sportifs, une équipe médicale teste tous les concurrents. On propose d'étudier la fiabilité de ce test.

On appelle x le réel compris entre 0 et 1 qui désigne la proportion de sportifs dopés.

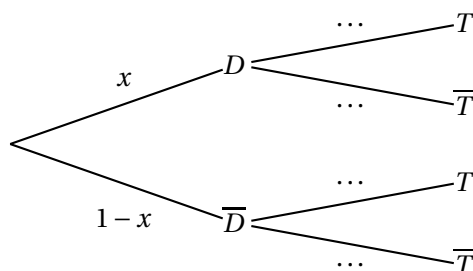
Lors de l'élaboration de ce test, on a pu déterminer que :

- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il est dopé est égale à 0,96;
- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il n'est pas dopé est égale à 0,03.

On note :

- D l'évènement : « le sportif est dopé ».
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. Déterminer, en fonction de x , la probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif.
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement T est égale à $0,93x + 0,03$.
4. Pour cette question uniquement, on suppose qu'il y a 50 sportifs dopés parmi les 1 000 testés.

La fonction f désigne la fonction définie à la partie A.

Démontrer que la probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est égale à $f(0,05)$. *En donner une valeur arrondie au centième.*

5. On appelle valeur prédictive positive d'un test la probabilité que le sportif soit réellement dopé lorsque le résultat du test est positif.
 - a. Déterminer à partir de quelle valeur de x la valeur prédictive positive du test étudié sera supérieure ou égale à 0,9. Arrondir le résultat au centième.
 - b. Un responsable de la compétition décide de ne plus tester l'ensemble des sportifs, mais de cibler les sportifs les plus performants supposés être plus fréquemment dopés.
Quelle est la conséquence de cette décision sur la valeur prédictive positive du test?
Argumenter en utilisant un résultat de la partie A.

EXERCICE 4

Centres étrangers 6 juin 2024

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher. À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.

Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.

Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est (4 ; 5 ; 1).

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2.
 - a. Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
 - b. En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché.

Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1, X_2 , et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_1

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S .
 6. Déterminer $P(S = 24)$.
 7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
 - a. Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
 - b. En déduire la probabilité de gagner un lot.
-

EXERCICE 5

Asie 10 juin 2024

Dans la revue *Lancet Public Health*, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.

Source : [https://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667\(21\)00064-5/fulltext](https://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667(21)00064-5/fulltext)

On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

Partie A

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note I l'évènement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »
Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19?
2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres.
On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.
 - a. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
 - b. Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
 - c. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
 - d. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
 - e. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leq n) > 0,9$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection), si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19.

Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID 19.

Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa sensibilité et sa spécificité.

La **sensibilité** d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai positif).

La **spécificité** d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai négatif).

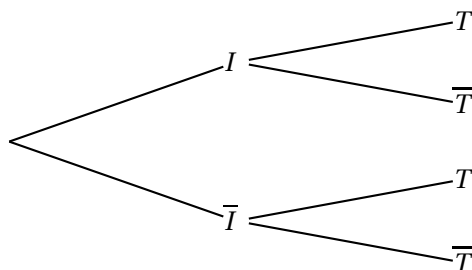
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :

- Sa sensibilité est de 0,8.
- Sa spécificité est de 0,99.

On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020.

On note T l'évènement « le test réalisé est positif ».

1. Compléter l'arbre des probabilités ci-dessous avec les données de l'énoncé :



2. Montrer que $p(T) = 0,05503$.
3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

Partie C

On considère un groupe d'une population d'un autre pays soumis au même test de sensibilité 0,8 et de spécificité 0,99.

Dans ce groupe la proportion d'individus ayant un test positif est de 29,44 %.

On choisit au hasard un individu de ce groupe ; quelle est la probabilité qu'il ait été infecté ?

EXERCICE 6

Asie 11 juin 2024

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.

Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.

Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.

De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.

On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

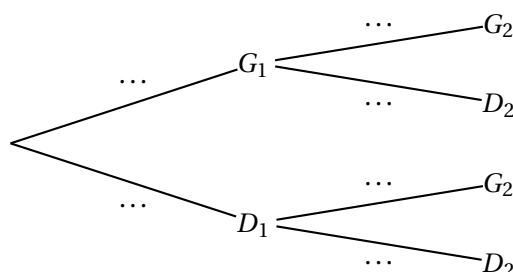
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les événements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n -ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n -ième partie de la journée ».

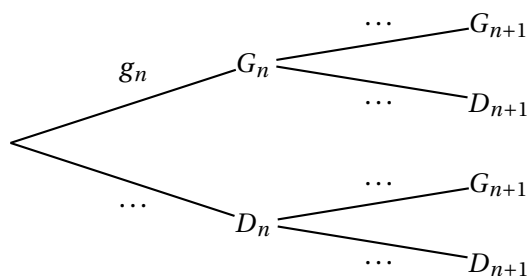
Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n .

On a donc $g_1 = 0,5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$?
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2 .
4. Soit n un entier naturel non nul.
 - a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n -ième et $(n+1)$ -ième parties de la journée.



- b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2.$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0,4$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
On précisera son premier terme et sa raison.
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n) .

7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n) .
Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leq 0,001$.
9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1  def seuil(e) :  
2      g = 0.5  
3      n = 1  
4      while ... :  
5          g = 0.5 * g + 0.2  
6          n = ...  
7      return (n)
```

EXERCICE 7

Métropole 19 juin 2024

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60% des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30% des ventes et ceux en grandes surfaces 10% des ventes.

Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- 75% pour les clients sur internet ;
- 90% pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80% pour les clients en grande surface.

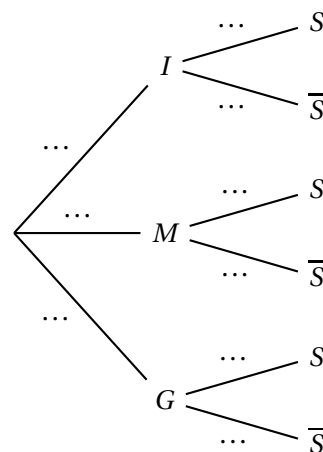
On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.

On définit les événements suivants :

- I : « le client a effectué son achat sur internet » ;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un événement quelconque, on notera $\bar{A}$ son événement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.
2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.
3. Démontrer que $P(S) = 0,8$.
4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet? On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.



5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.
 - a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.
6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.

7. Dans les deux questions **a.** et **b.** qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.

Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2 .

La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :

- L'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;
- L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.

- a. Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T .
- b. Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

Suite à une étude statistique réalisée dans la station-service Carbuplus, on évalue à 0,25 la probabilité qu'un client venant alimenter son véhicule en carburant passe moins de 12 minutes dans la station avant de la quitter.

On choisit au hasard et de façon indépendante 10 clients de la station et on assimile ce choix à un tirage avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 10 clients associe le nombre de ces clients ayant passé moins de 12 minutes à la station.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 4 clients dans un échantillon de 10 passent moins de 12 minutes à la station? On arrondira si besoin le résultat à 10^{-3} près.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un client arrive à la station et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.

On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.

On suppose que T_1, T_2, T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.

On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. Exprimer S en fonction de T_1, T_2 et T_3 .
2.
 - a. Déterminer l'espérance de S et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
 - b. Quelle est la variance du temps d'attente total S de ce troisième client?
3. Montrer que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

EXERCICE 9

Métropole 20 juin 2024

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen? ». Seules les réponses

« oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ».

Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.

On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».

Pour un évènement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\bar{A}$ son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et

$$P_{\bar{R}}(\bar{Q}).$$

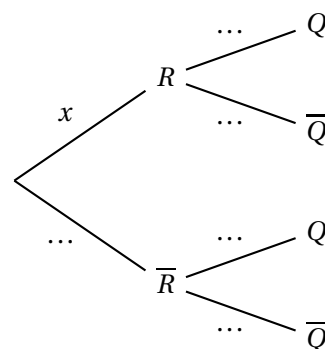
2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.

- a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

- b. Montrer que $x = 0,9$.

3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.

Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?



4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20 ; 0,615)$.

La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.

À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?

5. On interroge au hasard dix étudiants.

Les variables aléatoires $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20 ; 0,615)$.

Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \dots + N_{10}$.

Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S .

6. On considère la variable aléatoire $M = \frac{S}{10}$.

- a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?
- b. Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.
- c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.
« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans.

Elle constate que 60 % de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47 % ont acheté la carte de fidélité.

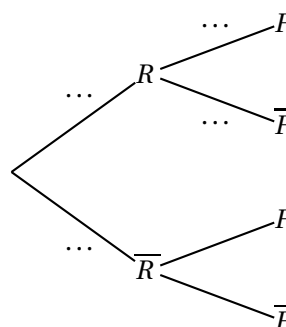
Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.

On interroge au hasard un client et on considère les événements suivants :

- R : « le client est un client régulier » ;
- F : « le client a acheté la carte de fidélité ».

Pour un événement E quelconque, on note $\bar{E}$ son événement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

1.
 - a. Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.
 - b. Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.
 - c. Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.
 - d. Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers.



Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.

2. On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0,38$.

Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.

- a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier.
- b. Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

Partie B

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.

On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1 000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1 000 clients.

On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100 000.

On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.

On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{Y}{1000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice.

Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,722 75.

3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

EXERCICE 11

Polynésie 19 juin 2024

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles

Partie A

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face ».

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
2. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X .

k	0	1	2	3
$P(X = k)$				

Partie B

Voici les règles d'un jeu où le but est d'obtenir trois pièces du côté « Face » en un ou deux essais :

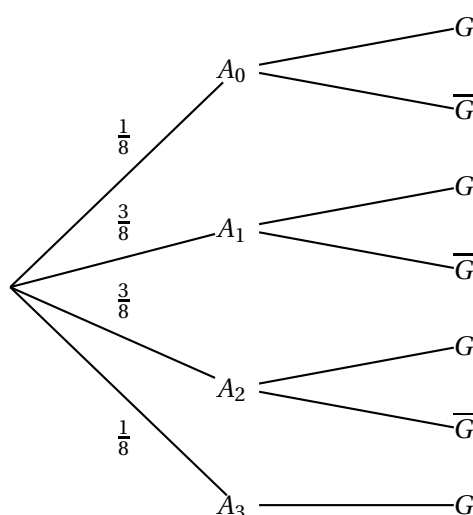
- On lance trois pièces équilibrées :
 - Si les trois pièces sont tombées du côté « Face », la partie est gagnée ;
 - Sinon, les pièces tombées du côté « Face » sont conservées et on relance celles tombées du côté « Pile ».
- La partie est gagnée si on obtient trois pièces du côté « Face », sinon elle est perdue.

On considère les événements suivants :

- G : « la partie est gagnée ».
- Et pour tout entier k compris entre 0 et 3, les événements :
- A_k : « k pièces sont tombées du côté « Face » au premier lancer ».

1. Démontrer que $P_{A_1}(G) = \frac{1}{4}$.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. Démontrer que la probabilité p de gagner à ce jeu est $p = \frac{27}{64}$
4. La partie a été gagnée. Quelle est la probabilité qu'exactly une pièce soit tombée du côté « Face » à la première tentative?
5. Combien de fois faut-il jouer à ce jeu pour que la probabilité de gagner au moins une partie dépasse 0,95?

Un sondage réalisé en France fournit les informations suivantes :

- 60 % des plus de 15 ans ont l'intention de regarder les Jeux olympiques et paralympiques (JOP) de Paris 2024 à la télévision ;
- parmi ceux qui ont l'intention de regarder les JOP, 8 personnes sur 9 déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

On choisit au hasard une personne de plus de 15 ans. On considère les événements suivants :

- J : « la personne a l'intention de regarder les JOP Paris 2024 à la télévision » ;
- S : « la personne choisie déclare pratiquer une activité sportive régulière ».

On note $\bar{J}$ et $\bar{S}$ leurs événements contraires.

Dans les questions 1. et 2., les probabilités seront données sous la forme d'une fraction irréductible.

1. Démontrer que la probabilité que la personne choisie ait l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière est de $\frac{8}{15}$.

On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

Selon ce sondage, deux personnes sur trois parmi les plus de 15 ans déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

2.
 - a. Calculer la probabilité que la personne choisie n'ait pas l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière.
 - b. En déduire la probabilité de S sachant $\bar{J}$ notée $P_{\bar{J}}(S)$.

Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième.

3. Dans le cadre d'une opération de promotion, 30 personnes de plus de 15 ans sont choisies au hasard.

On assimile ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.

- a. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
- b. Calculer la probabilité qu'exactement 16 personnes déclarent pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.
- c. La fédération française de judo souhaite offrir une place pour la finale de l'épreuve par équipe mixte de judo à l'Arena Champ-de-Mars pour chaque personne déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi ces 30 personnes.

Le prix d'une place s'élève à 380 € et on dispose d'un budget de 10 000 euros pour cette opération.

Quelle est la probabilité que ce budget soit insuffisant ?

Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

- 60 % sont des véhicules tout-électrique;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.

On choisit un acheteur au hasard et on considère les évènements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique »;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième si nécessaire.

1. Calculer la probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile.

On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que $P(B) = 0,658$.
3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique?
4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.

- a. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
- b. Calculer $P(X = 8)$.
- c. Calculer la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge.
- d. Calculer l'espérance de X .
- e. La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1 200 €.

En moyenne, quelle somme doit-elle prévoir d'engager pour cette offre lors de la vente de 20 véhicules?

Les deux parties sont indépendantes.

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.

On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

1. Justifier que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. On arrondira les résultats à 10^{-3} près.
 - a. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes.
 - b. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes.
4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ».

Combien de cachets une boîte doit-elle contenir au maximum pour respecter ce critère? Justifier.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i , pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i -ème cachet prélevé.

On considère la variable aléatoire S définie par :

$$S = M_1 + M_2 + \dots + M_{100}.$$

On admet que les variables aléatoires $M_1, M_2, \dots, M_{100}$ suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ .

1. Déterminer $E(S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On note s l'écart type de la variable aléatoire S .
Montrer que : $s = 10\sigma$.
3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9.
 - a. Montrer que cette condition est équivalente à :

$$P(|S - 200| \geq 1) \leq 0,1.$$

- b. En déduire la valeur maximale de σ qui permet, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'assurer cette condition. Bienaymé-Tchebychev

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2 .
 L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches.
 L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.
 On considère l'expérience aléatoire suivante :
 On pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans U_2 .

On note :

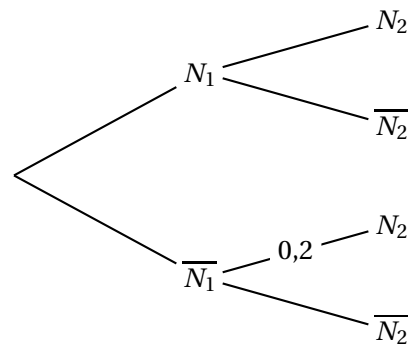
- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

Pour tout évènement A , on note $\bar{A}$ son évènement contraire.

PARTIE A

1. On considère l'arbre de probabilités ci-contre.

- Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est 0,2.
- Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des évènements concernés, sous forme décimale.



- Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2 .
- Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28.
- On a pioché une boule noire dans l'urne U_2 .
Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 . On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2} .

PARTIE B

n désigne un entier naturel non nul.

L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 , entre chaque expérience.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2 .

On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X . Justifier votre réponse.
2. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que :

$$1 - 0,72^n \geq 0,9.$$

3. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.

PARTIE C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 .

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante :

On pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2 .

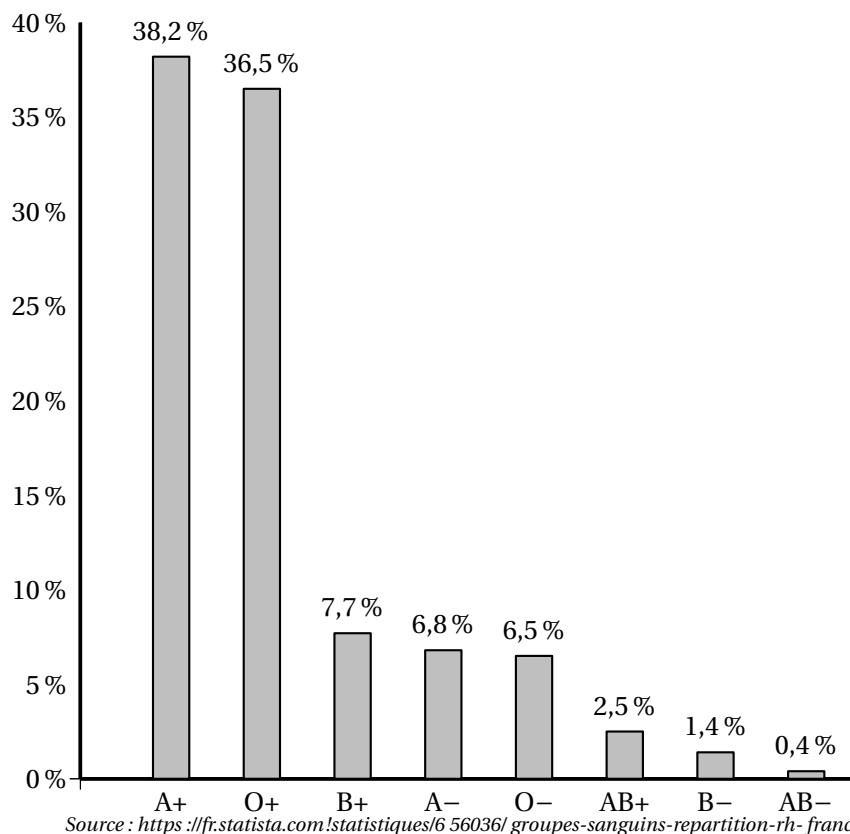
1. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?
3. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est-elle supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A ? Justifier votre réponse.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette expérience.

EXERCICE 16

Amérique du Sud 22 novembre 2024

Voici la répartition des principaux groupes sanguins des habitants de France :



A+, O+, B+, A-, O-, AB+, B- et AB- sont les différents groupes sanguins combinés aux rhésus.

Par exemple : A + est le groupe sanguin A de rhésus +.

Une expérience aléatoire consiste à choisir une personne au hasard dans la population française et à déterminer son groupe sanguin et son rhésus.

Dans l'exercice, on adopte les notations du type :

A + est l'évènement « la personne est de groupe sanguin A et de rhésus + »

A- est l'évènement « la personne est de groupe sanguin A et de rhésus - »

A est l'évènement « la personne est de groupe sanguin A »

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

On note Rh + l'évènement « La personne est de rhésus positif ».

1. Justifier que la probabilité que la personne choisie soit de rhésus positif est égale à 0,849.
2. Démontrer à l'aide des données de l'énoncé que $P_{Rh+}(A) = 0,450$ à 0,001 près.
3. Une personne se souvient que son groupe sanguin est AB mais a oublié son rhésus. Quelle est la probabilité que son rhésus soit négatif? Arrondir le résultat à 0,001 près.

Partie 2

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 0,001 près.

Un donneur universel de sang est une personne de groupe sanguin O et de rhésus négatif. On rappelle que 6,5 % de la population française est de groupe O-.

1. On considère 50 personnes choisies au hasard dans la population française et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de donneurs universels.
 - a. Déterminer la probabilité que 8 personnes soient des donneurs universels. Justifier votre réponse.
 - b. On considère la fonction ci-dessous nommée `proba` d'argument k écrite en langage Python.

```
def proba(k) :  
    p=0  
    for i in range(k+1) :  
        p = p + binomiale(i,50,0.065)  
    return p
```

Cette fonction utilise la fonction binomiale d'argument i, n et p , créée pour l'occasion, qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où X suit une loi binomiale de paramètres n et p .

Déterminer la valeur numérique renvoyée par la fonction `proba` lorsqu'on saisit `proba(8)` dans la console Python. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

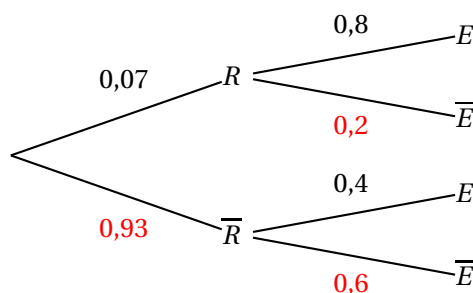
2. Quel est le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel, soit supérieure à 0,999.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 1

Amérique du Nord 21 mai 2024

Partie A

1. On dresse l'arbre pondéré de probabilités en utilisant les données de l'énoncé :
 $p(R) = 0,07$; $p_R(E) = 0,8$ et $p_{\bar{R}}(E) = 0,4$:



On a $p(R \cap E) = p(R) \times p_R(E) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.

2. D'après la loi des probabilités totales :

$$p(E) = p(R \cap E) + p(\bar{R} \cap E).$$

$$\text{Or } p(\bar{R} \cap E) = p(\bar{R}) \times p_{\bar{R}}(E) = 0,93 \times 0,4 = 0,372.$$

$$\text{Donc } p(E) = 0,056 + 0,372 = 0,428.$$

3. On a $p_E(R) = \frac{p(E \cap R)}{p(E)} = \frac{p(R \cap E)}{p(E)} = \frac{0,056}{0,428} = \frac{56}{428} = \frac{14}{107} \approx 0,1308$ soit 0,131 au millième près.

Partie B

1. Les événements étant indépendants et la probabilité d'obtenir un objet rare étant toujours égale à 0,07, la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 30$ et $p = 0,07$.

L'espérance mathématique est $E = n \times p = 30 \times 0,07 = 2,1$.

2. La calculatrice donne $P(X < 6) \approx 0,9838$ soit 0,984 au millième près.

3. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $p(X \geq k+1) = 1 - p(X \leq k)$. D'après la calculatrice :

$p(X \geq 1+1) = 1 - p(X \leq 1) \approx 0,631$, et $p(X \geq 2+1) = 1 - p(X \leq 2) \approx 0,351$, on a donc $k = 2$.

Dans le cadre du jeu ceci signifie que la probabilité d'obtenir au moins 2 objets rares est supérieure à $\frac{1}{2}$.

4. Soit Y la variable correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté N défis Il faut donc trouver Y tel que $p(Y \geq 1) \geq 0,95$ ou encore $1 - p(X = 0) \geq 0,95 \iff p(X = 0) \leq 1 - 0,95 \iff p(X = 0) \leq 0,05$.

$$\text{Or } p(X = 0) = \binom{N}{0} \times 0,07^0 \times (1 - 0,07)^N = 0,93^N.$$

Il faut donc résoudre l'inéquation :

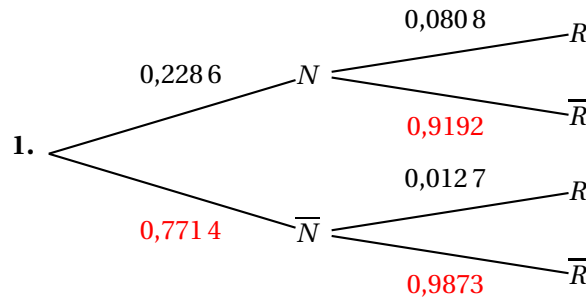
$$0,93^N \leq 0,05 \Rightarrow N \ln 0,93 \leq \ln 0,05 \text{ par croissance de la fonction logarithme népérien et enfin } N \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,93}, \text{ car } \ln 0,93 < 0 \text{ et son inverse } \frac{1}{\ln 0,93} \text{ aussi.}$$

$$\text{D'après la calculatrice } \frac{\ln 0,05}{\ln 0,93} \approx 41,3.$$

Conclusion : il faut que $N \geq 42$. À partir de 42 succès la probabilité d'obtenir un objet rare est supérieure ou égale à 0,95.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 2

Amérique du Nord - 22 mai 2024



2. On calcule $p(N \cap R) = p(N) \times p_N(R) = 0,2286 \times 0,0808 = 0,018471$ soit 0,0185 à 10^{-4} près.
3. On a de même $p(\overline{N} \cap R) = p(\overline{N}) \times p_{\overline{N}}(R) = 0,7714 \times 0,0127 = 0,009797$ soit 0,0098 à 10^{-4} près.
D'après la loi des probabilités totales :
 $p(R) = p(N \cap R) + p(\overline{N} \cap R) \approx 0,0185 + 0,0098$
 $p(R) \approx 0,0283$.
4. On a $p_R(N) = \frac{p(R \cap N)}{p(R)} = \frac{p(N \cap R)}{p(R)} \approx \frac{0,0185}{0,0283} \approx 0,65371$ soit 0,6537 à 10^{-4} près.

0.1

1. X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 500, p = 0,65)$.
2. On calcule $\binom{500}{325} \times 0,65^{325} \times 0,35^{175} \approx 0,037384$ soit 0,0374 à 10^{-4} près. (Utiliser la fonction binomiale de la calculatrice si les capacités de calcul de celle-ci sont dépassées).
3. On a $p(X \geq 325) = 1 - p(X \leq 324)$ soit d'après la calculatrice 0,47944, donc
 $p(X \geq 325) \approx 1 - 0,4794 = 0,5206$ à 10^{-4} près.

0.2

1. On a $p_n = (1 - 0,65)^n = 0,35^n$.
2. On a $q_n = 1 - p_n$.
On cherche donc n tel que $1 - p_n \geq 0,9999 \iff p_n \leq 0,0001$, soit par croissance de la fonction logarithme népérien :
$$n \ln 0,35 \leq \ln 0,0001 \iff n \geq \frac{\ln 0,0001}{\ln 0,35} \text{ car } \frac{1}{\ln 0,35} < 0.$$

D'après la calculatrice $\frac{\ln 0,0001}{\ln 0,35} \approx 8,8$.
Il faut prendre au minimum $n = 9$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 3

Centres étrangers 5 juin 2024

Partie A

1. f est dérivable sur son ensemble de définition, en tant que fraction rationnelle.

$$\begin{aligned}\forall x \in [0 ; 1], \quad f'(x) &= \frac{0,96 \times (0,93x + 0,03) - (0,96x \times 0,93)}{(0,93x + 0,03)^2} \\ &= \frac{0,8928x + 0,0288 - 0,8928x}{(0,93x + 0,03)^2} \\ &= \frac{0,0288}{(0,93x + 0,03)^2}\end{aligned}$$

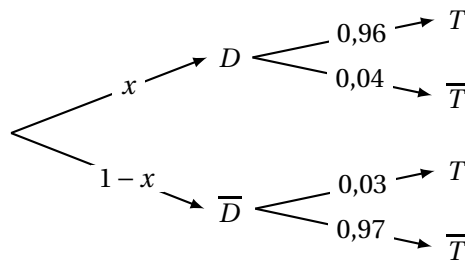
On arrive donc bien à l'expression demandée.

2. On a une fonction dérivée qui est le quotient d'un numérateur strictement positif par un dénominateur qui est le carré d'un réel non nul, donc strictement positif également, donc pour tout x dans $[0 ; 1]$, $f'(x)$ est strictement positif.

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

Partie B

1. On a l'arbre suivant :



2. Ici, on nous demande de déterminer : $P(D \cap T)$

$$P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = x \times 0,96 = 0,96x.$$

3. Les événements D et $\overline{D}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}P(T) &= P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T) \\ &= 0,96x + (1-x) \times 0,03 \\ &= 0,96x + 0,03 - 0,03x \\ &= 0,93x + 0,03\end{aligned}$$

On arrive bien à la probabilité annoncée.

4. Dans cette question, on veut calculer $P_T(D)$.

$$\text{Par définition des probabilités conditionnelles, on a : } P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)}.$$

$$\text{D'après les questions précédentes, cela donne : } P_T(D) = \frac{0,96x}{0,93x + 0,03} = f(x).$$

On est, dans cette question, avec 50 sportifs dopés sur les 1 000 testés, donc en choisissant un sportif au hasard, on est en situation d'équiprobabilité et donc la probabilité qu'un sportif soit dopé est, pour cette question $x = \frac{50}{1000} = 0,05$.

La probabilité demandée est donc bien $f(0,05) = \frac{0,96 \times 0,05}{0,93 \times 0,05 + 0,03} = \frac{32}{51} \approx 0,627$ soit environ 0,63 au centième près.

5. a. La valeur prédictive positive du test est donc la probabilité $P_T(D)$. D'après la question 4. a., pour toute probabilité x dans $[0 ; 1]$, on a : $P_T(D) = f(x)$.

On veut donc résoudre, dans $[0 ; 1]$, l'inéquation : $f(x) \geq 0,9$.

$$f(x) \geq 0,9 \iff \frac{0,96x}{0,93x + 0,03} \geq 0,9$$

$$\iff 0,96x \geq 0,9(0,93x + 0,03) \quad \text{car sur } [0 ; 1], \quad 0,93x + 0,03 > 0$$

$$\iff (0,96 - 0,9 \times 0,93)x \geq 0,9 \times 0,03$$

$$\iff 0,123x \geq 0,027$$

$$\iff x \geq \frac{27}{123} = \frac{9}{41}$$

C'est donc pour x supérieur à $\frac{9}{41} \approx 0,22$ que la valeur prédictive positive du test sera supérieure ou égale à 0,9.

- b. Si on accepte comme vraie l'affirmation « les sportifs les plus performants [sont les] plus fréquemment dopés », alors le fait de restreindre la population testée aux sportifs les plus performants doit avoir pour conséquence de faire augmenter x , la proportion de sportifs dopés dans la population testée.

Comme la valeur prédictive positive est donnée par $f(x)$ et que la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$, plus x augmente, plus $f(x)$ augmente et donc plus on teste une population où la proportion de dopés est élevée (ce qui est le cas si on ne teste que les sportifs les plus performants), meilleure est la valeur prédictive positive du test.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 4

Centres étrangers 6 juin 2024

1. Un tirage est donc un triplet (c'est-à-dire une 3-liste ou un 3-uplet) ordonné d'éléments choisis dans un ensemble E de cardinal $\text{Card}(E) = 8$ (il y a 8 jetons), qui ne s'amenuise pas (car on remet le jeton avant de tirer le suivant, et donc les répétitions sont possibles.)

Le nombre de tirages possibles est donc de : $\text{Card}(E)^3 = 8^3 = 512$.

Il y a 512 tirages possibles.

2. a. Si on souhaite un tirage sans répétition de numéro, alors, c'est comme si on avait fait un tirage sans remise (un numéro déjà choisi ne peut pas être choisi à nouveau), et donc un triplet ordonné d'éléments choisis dans un ensemble qui s'amenuise.

Il y a donc $\frac{8!}{(8-3)!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$ tirages possibles sans numéro répété.

Remarque : On peut parler d'arrangement, même si ce mot n'est pas explicitement à connaître en terminale.

On peut aussi voir cette valeur comme étant : 8 choix possibles pour le premier numéro du triplet, puis 7 choix possibles pour le deuxième numéro, sachant qu'il doit être différent du premier et enfin 6 choix possibles pour le dernier numéro, qui doit être différent des deux précédents.

- b.** Le nombre de tirages avec au moins une répétition de numéro est donc la différence des deux résultats précédents : $512 - 336 = 176$.

En effet, l'ensemble des tirages possibles est la réunion de deux ensembles disjoints : les tirages sans aucune répétition de numéro et les tirages avec au moins une répétition de numéro.

Remarque : On pouvait aussi compter le nombre de tirages avec deux numé-

ros identiques : $8 \times \binom{3}{2} \times 7 = 168$ (huit choix pour le numéro répété, multiplié

par $\binom{3}{2}$ façons de placer ces deux numéros identiques dans le triplet, multiplié par sept choix pour le numéro différent des deux premiers) et l'ajouter au nombre de tirages avec trois numéros identiques : 8 (huit choix possibles pour le numéro qui sera répété trois fois), mais dans ce cas, on obtient 176 sans le déduire des questions précédentes.

- 3.** Le sac étant opaque et les jetons indiscernables au toucher, chaque sélection d'un jeton dans le sac est une situation d'équiprobabilité, et donc on a une loi équirépartie.

On peut donc présenter la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1 sous la forme du tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

- 4.** L'espérance de la variable aléatoire X_1 est donc donnée par :

$$E(X_1) = x_1 \times P(X_1 = x_1) + x_2 \times P(X_1 = x_2) + \dots + x_8 \times P(X_1 = x_8)$$

$$= (x_1 + x_2 + \dots + x_8) \times \frac{1}{8} \quad \text{car la loi est équirépartie}$$

$$= (1 + 2 + \dots + 8) \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1+8}{2} \times 8 \times \frac{1}{8} \quad \text{avec la formule de la somme des premiers termes d'une suite arithmétique}$$

$$= 4,5$$

- 5.** On a $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$, et puisque X_1 , X_2 et X_3 suivent la même loi de probabilité, alors on en déduit :

$$E(S) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 4,5 = 13,5$$

- 6.** L'évènement $\{S = 24\}$ n'est réalisé que par le tirage $(8 ; 8 ; 8)$, donc sur les 512 issues possibles de l'expérience aléatoire, une seule est favorable à l'évènement : la probabilité est donc de $\frac{1}{512}$ (puisque l'on est en situation d'équiprobabilité).

Remarque : On peut aussi dire que l'évènement $\{S = 24\}$ est égal à l'évènement $\{X_1 = 8\} \cap \{X_2 = 8\} \cap \{X_3 = 8\}$.

Et comme les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 sont indépendantes :

$$P(S = 24) = P(\{X_1 = 8\} \cap \{X_2 = 8\} \cap \{X_3 = 8\}) = P(X_1 = 8) \times P(X_2 = 8) \times P(X_3 = 8)$$

$$= \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}$$

- 7. a.** — Le nombre 24 ne peut être obtenu que par la somme $8 + 8 + 8$, qui ne procède que d'un seul tirage (le tirage $(8 ; 8 ; 8)$).

- Le nombre 23 ne peut être obtenu que par la somme $7 + 8 + 8$, cette somme est constituée d'un doublon (le 8) et d'un entier présent une seule fois (le 7).

Elle peut procéder de trois tirages différents, car il y a $\binom{3}{2} = 3$ façons de placer les deux entiers identiques dans un triplet.

Les trois triplets conduisant à $\{S = 23\}$ sont : $(7 ; 8 ; 8)$; $(8 ; 7; 8)$ et $(8 ; 8 ; 7)$.

- Le nombre 22 peut être obtenu comme somme de trois entiers naturels entre 1 et 8 en faisant : $6 + 8 + 8$, ou bien en faisant $7 + 7 + 8$.

Chacune de ces sommes est constitué d'un doublon et d'un troisième entier différent, et est donc le résultat de trois tirages différents.

Il y a donc six tirages donnant 22 (les tirages $(6 ; 8 ; 8)$; $(8 ; 6 ; 8)$; $(8 ; 8 ; 6)$; $(8 ; 7 ; 7)$; $(7 ; 8; 7)$ et $(7 ; 7 ; 8)$).

On a donc bien finalement $1 + 3 + 6 = 10$ tirages conduisant au gain d'un lot.

- b.** On est en situation d'équiprobabilité pour les 512 tirages possibles (nombre déterminé à la question 1.), donc, avec 10 tirages favorables à l'évènement « gagner un lot », la probabilité de gagner un lot est donc de $\frac{10}{512} = \frac{5}{256}$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 5

Asie 10 juin 2024

Partie A

- 1.** Puisque l'individu est choisi dans la population française, on suppose qu'il y a une situation d'équiprobabilité et que les proportions sont assimilables à des probabilités.

Comme 5,7 % des adultes avaient déjà été infectés, d'après l'étude du *Lancet*, la probabilité que l'individu choisi ait déjà été infecté est de $P(I) = 0,057$.

- 2. a.** — On a une épreuve de Bernoulli, dont le succès : « l'individu choisi a déjà été infecté », a une probabilité $p = 0,057$;
- Cette épreuve est répétée $N = 100$ fois, de façon identique et indépendante (car le prélèvement des 100 individus est assimilé à un tirage avec remise);
 - X est une variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi ces répétitions.

Avec ces éléments, on peut affirmer que X suit la loi binomiale de paramètres $N = 100$ et $p = 0,057$.

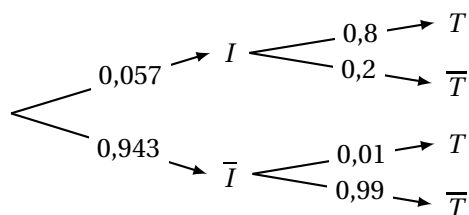
Remarque : le paramètre donnant le nombre de répétitions est souvent noté n , plutôt que N , mais dans la question **2. e.**, un entier n est introduit, donc pour éviter le conflit de notation, on utilise N ici.

- b. Puisque X suit une loi binomiale, on a : $E(X) = N \times p = 100 \times 0,057 = 5,7$.
On en déduit que dans un échantillon de 100 personnes adultes choisies au sein de la population française le 11 mai 2020, en moyenne, 5,7 d'entre eux avaient déjà été infectés par la COVID 19.
- c. La probabilité demandée est celle de l'évènement $\{X = 0\}$.
Pour les variables aléatoires régies par la loi binomiale, on a (pour k entier naturel inférieur à n) : $P(X = k) = \binom{N}{k} \times p^k \times (1 - p)^{N-k}$.
On a donc, ici : $P(X = 0) = \binom{100}{0} \times 0,057^0 \times 0,943^{100} = 0,943^{100} \approx 0,0028$.
- d. La probabilité qu'au moins deux personnes de l'échantillon aient été préalablement infectées est de :
 $P(X \geq 2) = 1 - P(\overline{X \geq 2}) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$. (Certains modèles de calculatrices n'ont pas besoin de ce calcul).
À la calculatrice, on obtient : $P(X \geq 2) \approx 0,9801$.
- e. Par exploration à la calculatrice, on constate que pour $n \leq 8$, on a une probabilité inférieure ou égale à 0,9, avec $P(X \leq 8) \approx 0,8829$ et $P(X \leq 9) \approx 0,9408$.
L'entier cherché est 9.
Cela signifie que dans un échantillon de cent adultes choisis dans la population française le 11 mai 2020, il y a plus de neuf chances sur dix que le nombre d'entre eux préalablement infectés par la COVID 19 est inférieur ou égal à 9.

Partie B

1. L'évènement I est l'évènement déjà utilisé dans la **Partie A**. On avait $P(I) = 0,057$.
- La description de la **sensibilité** nous fait comprendre qu'il s'agit de la probabilité conditionnelle : $P_I(T) = 0,8$;
 - celle de la **spécificité** indique que est : $P_{\bar{I}}(\bar{T}) = 0,99$.

Avec ces informations, on peut compléter l'arbre probabilisé :



2. Les évènements I et $\bar{I}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :
- $$P(T) = P(I \cap T) + P(\bar{I} \cap T) = 0,057 \times 0,8 + 0,943 \times 0,01 = 0,05503.$$
3. La question posée est de calculer : $P_T(I)$.

D'après la définition des probabilités conditionnelles :

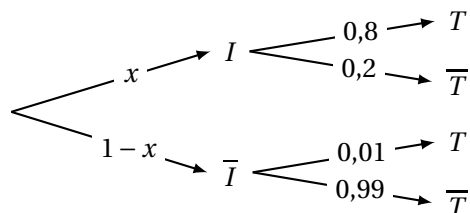
$$P_T(I) = \frac{P(I \cap T)}{P(T)} = \frac{0,057 \times 0,8}{0,05503} = \frac{4560}{5503} \approx 0,8286.$$

Cela signifie qu'une personne dont le test est positif n'a qu'une probabilité de 0,8286 (environ) d'avoir été préalablement infectée par la COVID 19.

Partie C

Si le test est le même, sa sensibilité et sa spécificité sont les mêmes, ce qui change, c'est donc la probabilité d'avoir été préalablement infecté. Cette probabilité n'est pas connue, notons la x .

On a donc l'arbre suivant :



Les événements I et $\bar{I}$ partitionnent toujours cet univers différent, donc, d'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(I \cap T) + P(\bar{I} \cap T) = x \times 0,8 + (1 - x) \times 0,01 = 0,8x + 0,01 - 0,01x = 0,79x + 0,01.$$

D'après l'énoncé, 29,44 % des gens ont un test positif, donc la probabilité de choisir un individu dont le test est positif est de 0,2944.

On a donc une double égalité, dont on déduit l'équation suivante : $0,79x + 0,01 = 0,2944$

$$\text{Résolvons : } 0,79x + 0,01 = 0,2944 \iff 0,79x = 0,2844$$

$$\iff x = \frac{0,2844}{0,79}$$

$$\iff x = \frac{2844}{7900}$$

La probabilité que la personne choisie ait été infectée est donc de $\frac{2844}{7900} = 0,36$.

Dans cet autre pays, la proportion de personnes préalablement infectées est donc 36 %.

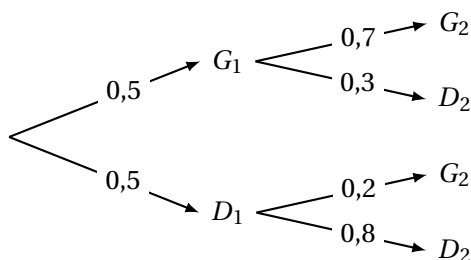
ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 6

Asie 11 juin 2024

1. D'après l'énoncé, si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70% des cas, elle perd donc la suivante dans 30 %.

On a donc $P_{G_1}(D_2) = 0,3$

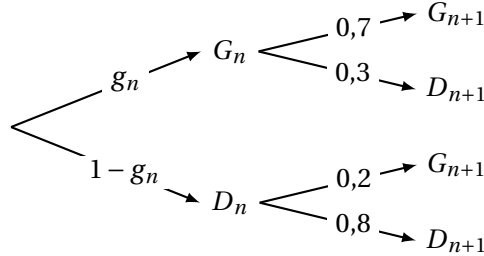
2. On a l'arbre suivant :



3. Les événements G_1 et D_1 partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
g_2 &= P(G_2) = P(G_1 \cap G_2) + P(D_1 \cap G_2) \\
&= 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 \\
&= 0,35 + 0,1 \\
&= 0,45
\end{aligned}$$

4. a. On a l'arbre suivant :



b. Pour tout entier naturel n non nul, les événements G_n et D_n déterminent une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
g_{n+1} &= P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(D_n \cap G_{n+1}) \\
&= g_n \times 0,7 + (1 - g_n) \times 0,2 \\
&= 0,7g_n + 0,2 - 0,2g_n \\
&= 0,5g_n + 0,2
\end{aligned}$$

On arrive bien au résultat annoncé.

5. a. Soit n un entier non nul.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= g_{n+1} - 0,4 \quad \text{par définition de la suite } (v_n) \\
&= 0,5g_n + 0,2 - 0,4 \quad \text{par définition de la suite } (g_n) \\
&= 0,5(v_n + 0,4) - 0,2 \quad \text{car } v_n = g_n - 0,4 \iff g_n = v_n + 0,4 \\
&= 0,5v_n + 0,2 - 0,2 \\
&= 0,5v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme

$$v_1 = g_1 - 0,4 = 0,5 - 0,4 = 0,1$$

b. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,1 \times 0,5^{n-1}$$

$$\text{Or pour tout entier naturel } n \text{ non nul} \quad g_n = v_n + 0,4 \quad \text{donc} \quad g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

6. Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
g_{n+1} - g_n &= 0,1 \times 0,5^n + 0,4 - 0,1 \times 0,5^{n-1} - 0,4 \\
&= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (0,5 - 1) \\
&= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (-0,5) \\
&= -0,1 \times 0,5^n
\end{aligned}$$

$$\text{or } 0,5 > 0 \text{ et } 0,1 > 0 \text{ donc } g_{n+1} - g_n < 0 \iff g_{n+1} < g_n$$

La suite (g_n) est strictement décroissante.

7. $-1 < 0,5 < 1$, donc on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5)^n = 0$, donc, par limite du produit et de la somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 = 0,4$.

Sur le long terme, Léa gagnera son match dans 40 % des cas.

8. Déterminons les valeurs de n pour lesquels $g_n - 0,4 \leq 0,001$

$$\begin{aligned}
g_n - 0,4 \leq 0,001 &\iff 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 - 0,4 \leq 0,001 \\
&\iff 0,1 \times 0,5^{n-1} \leq 0,001 \\
&\iff 0,5^{n-1} \leq 0,01 \quad \text{car } 0,1 > 0 \\
&\iff \ln(0,5^{n-1}) \leq \ln(0,01) \quad \text{par croissance de la fonction } \ln \text{ sur } \mathbb{R}^{*+} \\
&\iff (n-1) \ln(0,5) \leq \ln(0,01) \\
&\iff (n-1) \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} \quad \text{car } \ln(0,5) < 0 \\
&\iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1 \\
\text{Or } \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1 &= \frac{-\ln(100)}{-\ln(2)} + 1 = \frac{\ln(100) + \ln(2)}{\ln(2)} = \frac{\ln(200)}{\ln(2)} \approx 7,64 \text{ donc, } n \text{ étant un} \\
&\text{entier, la plus petite valeur de } n \text{ tel que } g_n - 0,4 \leq 0,001 \text{ est } 8.
\end{aligned}$$

9. Le programme complété est :

```

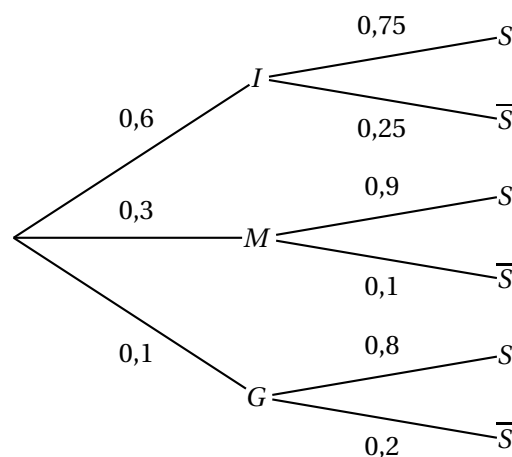
def seuil(e):
    g = 0.5
    n = 1
    while g > 0.4 + e :
        g = 0.5 * g + 0.2
        n = n + 1
    return(n)

```

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 7

Métropole 19 juin 2024

1. Voici l'arbre pondéré :



2. La probabilité cherchée est $p(I \cap S) = p(I) \times p_I(S) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$.
3. On a de même $p(M \cap S) = p(M) \times p_M(S) = 0,3 \times 0,9 = 0,27$.
 $p(G \cap S) = p(G) \times p_G(S) = 0,1 \times 0,8 = 0,08$.
 D'après la loi des probabilités totale :
 $p(S) = p(I \cap S) + p(M \cap S) + p(G \cap S) = 0,45 + 0,27 + 0,08 = 0,45 + 0,35 = 0,8$.

4. on a $p_{S(I)} = \frac{p(S \cap I)}{p(S)} = \frac{p(I \cap S)}{p(S)} = \frac{0,45}{0,8} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16} = 0,5625$, soit 0,563 au millièmè près.

5. a. Les conditions de l'étude sont telles que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,8$.

b. D'après la calculatrice $p(X \geq 25) = 1 - p(X \leq 24) \approx 1 - 0,5725$ soit environ 0,4275, donc 0,428 au millièmè près.

6. Il faut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $p(X \geq n) > 0,99$, donc tel que $1 - 0,8^n > 0,99 \iff 0,8^n < 0,01 \iff n \ln 0,8 < \ln 0,01 \iff n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$

Or $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,6$.

Il faut donc interroger au moins 21 personnes.

7. a.

- $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$ et T_1 et T_2 sont deux variables indépendantes, donc

- $V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3$.

b. Il faut trouver :

$p(5 \leq T \leq 9)$ ou encore $p(4 < T < 10) = p(4 - E(T) < T - E(T) < 10 - E(T)) = p(-3 < T - E(T) < 3)$ soit $p(|T - E(T)| < 3)$ ou encore $1 - p(|T - E(T)| \geq 3)$ et finalement d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$p(5 \leq T \leq 9) \geq 1 - \frac{V(T)}{3^2}$, soit

$p(5 \leq T \leq 9) \geq 1 - \frac{3}{9}$ et finalement :

$p(5 \leq T \leq 9) \geq \frac{2}{3}$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 8

Métropole 19 juin 2024 J1 (secours)

Partie A

1. La variable aléatoire X suit d'après les conditions de l'énoncé une loi binomiale de paramètres $n = 10$ de probabilité $p = 0,25$.

2. On a $P(X \leq 3) \approx 0,7758$, d'où $P(X > 3) \approx 0,2242$ soit environ 0,224 au millièmè près.

3. $E(X) = n \times p = 10 \times 0,25 = 2,5$.

Sur un grand nombre de tirages 25 clients sur 100 passeront moins de 12 minutes à la station.

Partie B

Un client arrive à la station et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.

On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.

On suppose que T_1, T_2 et T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.

On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. La variable aléatoire T_1 correspond au temps d'attente passé par le premier client à la station; comme ce premier client n'a personne devant lui, la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station par le premier client est T_1 .

La variable aléatoire T_2 correspond au temps d'attente passé par le deuxième client à la station; comme ce deuxième client avait le premier client devant lui, la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station par le deuxième client est $T_1 + T_2$.

La variable aléatoire T_3 correspond au temps d'attente passé par le troisième client à la station; comme ce troisième client avait deux autres clients devant lui, la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station par le troisième client est $T_1 + T_2 + T_3$.

Donc $S = T_1 + T_2 + T_3$.

2. a. L'espérance est linéaire donc :

$$E(S) = E(T_1 + T_2 + T_3) = E(T_1) + E(T_2) + E(T_3) = 6 + 6 + 6 = 18.$$

Cela signifie que le temps moyen d'attente à la station d'un client qui a deux personnes devant lui est de 18 minutes.

- b. Les 3 variables aléatoires T_1, T_2 et T_3 sont indépendantes, donc on peut utiliser l'additivité de la variance :

$$V(S) = V(T_1 + T_2 + T_3) = V(T_1) + V(T_2) + V(T_3) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

3. La variable aléatoire S a pour espérance $E(S) = 18$ et pour variance $V(S) = 3$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$\text{pour tout } \delta \in]0; +\infty[, P(|S - E(S)| \geq \delta) \leq \frac{V(S)}{\delta^2}, \text{ c'est-à-dire : } P(|S - 18| \geq \delta) \leq \frac{3}{\delta^2}.$$

En prenant l'événement contraire, on a donc : $P(|S - 18| < \delta) > 1 - \frac{3}{\delta^2}$.

La probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est : $P(14 < S < 22)$, soit : $P(18 - 4 < S < 18 + 4)$, ou encore : $P(-4 < S - 18 < 4)$, c'est-à-dire : $P(|S - 18| < 4)$.

En prenant $\delta = 4$, on a donc : $P(|S - 18| < 4) > 1 - \frac{3}{16}$ donc $P(|S - 18| < 4) > 0,8125$.

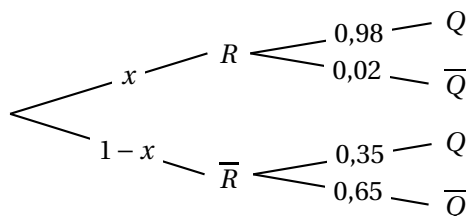
On en déduit que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 9

Métropole 20 juin 2024

Puisque l'on interroge un étudiant au hasard, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions sont assimilables à des probabilités.

1. Comme 91,7 % des étudiants ont répondu oui, on a donc $P(Q) = 0,917$.
Et $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0,65$, cela correspond à la probabilité que le candidat interrogé ait répondu « non », sachant qu'il a échoué à l'examen.
2. a. L'arbre pondéré complété est :



- b. On sait que $P(Q) = 0,917$, or, comme R et $\bar{R}$ partitionnent l'univers, en vertu de la loi des probabilités totales, on a également :

$$\begin{aligned}P(Q) &= P(Q \cap R) + P(Q \cap \bar{R}) \\&= x \times 0,98 + (1 - x) \times 0,35 \\&= 0,98x + 0,35 - 0,35x \\&= 0,63x + 0,35\end{aligned}$$

Puisque la probabilité de Q est unique, on peut donc écrire, puis résoudre l'équation : $0,63x + 0,35 = 0,917 \iff 0,63x = 0,567$

$$\iff x = \frac{0,567}{0,63}$$

$$\iff x = 0,9$$

La solution de l'équation est donc 0,9 : la probabilité que l'étudiant ait réussi son examen est donc de 0,9 (ou bien : 90 % des étudiants ont réussi leur examen).

3. Pour cette question, on doit calculer $P_Q(R)$.

$$\text{On a : } P_Q(R) = \frac{P(Q \cap R)}{P(Q)} = \frac{0,9 \times 0,98}{0,917} = \frac{0,882}{0,917} = \frac{126}{131} \approx 0,962$$

Si l'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question, la probabilité qu'il ait réussi l'examen est d'environ 0,962 (à 10^{-3} près).

C'est-à-dire qu'environ 96,2 % des étudiants ayant répondu « oui » ont effectivement réussi l'examen.

4. Par exploration à la calculatrice, avec une loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615), on a : $P(N \geq 11) \approx 0,797$, et $P(N \geq 12) \approx 0,649$.

En choisissant de récompenser les candidats dont la note est supérieure ou égale à 11, la directrice récompensera environ 80 % d'eux.

5. Comme les dix variables aléatoires suivent la même loi binomiale de paramètres 20 et 0,615, chacune de ces variables aléatoires a

- pour espérance : $E(N_i) = n \times p = 20 \times 0,615 = 12,3$;
- et pour variance : $V(N_i) = n \times p \times (1 - p) = 20 \times 0,615 \times 0,385 = 4,7355$.

S'étant la somme de ces dix variables aléatoires, on a :

- $E(S) = E(N_1) + E(N_2) + \dots + E(N_{10}) = 12,3 + 12,3 + \dots + 12,3 = 123$;
- comme les variables aléatoires sont indépendantes,
 $V(S) = V(N_1) + V(N_2) + \dots + V(N_{10}) = 10 \times 4,7355 = 47,355$.

6. a. La variable aléatoire M donne la moyenne des notes obtenues par un groupe (un échantillon) de 10 étudiants choisis au hasard.

b. On a bien

$$— E(M) = \frac{1}{10} \times E(S) = \frac{1}{10} \times 123 = 12,3;$$

$$— V(M) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times V(S) = \frac{1}{100} \times 47,355 = 0,47355.$$

- c. On remarque que l'intervalle de notes considéré : $]10,3 ; 14,3[$ est un intervalle centré sur l'espérance de M , autrement dit, la probabilité qui nous intéresse est celle de l'évènement : $A = \{|M - E(M)| < 2\}$.

L'évènement contraire de cet évènement est : $\bar{A} = \{|M - E(M)| \geq 2\}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev affirme que :

$$P(|M - E(M)| \geq 2) \leq \frac{V(M)}{2^2} \iff P(|M - 12,3| \geq 2) \leq \frac{0,47355}{4}$$

$$\iff P(|M - 12,3| \geq 2) \leq 0,1183875$$

$$\iff P(|M - 12,3| < 2) \geq 1 - 0,1183875$$

$$\iff P(|M - 12,3| < 2) \geq 0,8816125$$

L'affirmation « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % » est donc bien correcte, la probabilité que cet évènement soit réalisé étant supérieure à 0,88, elle est aussi supérieure à 0,8 qui correspond à 80 %.

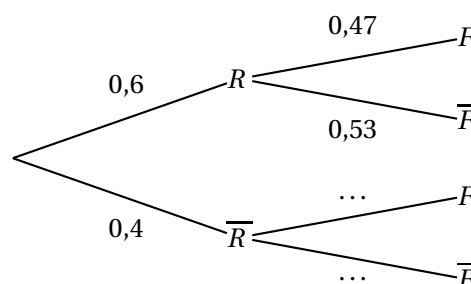
ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 10

Métropole 20 juin 2024 J2 (dévoilé)

1.

- a. Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.

- b. On a $p(R \cap F) = p(R) \times p_R(F) = 0,6 \times 0,47 = 0,282$.



2. Il faut trouver $p_{\bar{R}}(F)$

D'après la loi des probabilités totales, on a :

$$p(F) = p(F \cap R) + p(F \cap \bar{R}) = p(R \cap F) + p(\bar{R} \cap F), \text{ soit :}$$

$$0,38 = 0,282 + p(\bar{R} \cap F), \text{ d'où } p(\bar{R} \cap F) = 0,38 - 0,282 = 0,098.$$

$$\text{Puis } p_{\bar{R}}(F) = \frac{\bar{R} \cap F}{\bar{R}} = \frac{0,098}{0,4} = 0,245.$$

3. On a $p_F(R) = \frac{p(F \cap R)}{p(F)} = \frac{0,282}{0,38} \approx 0,74$, soit 74 %. L'affirmation est fausse.
4. a. Le choix des 20 clients s'effectue de façon indépendante et chaque tirage correspond à un choix de probabilité 0,38, la variable aléatoire X donnant le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité est une loi binomiale de paramètres $n = 20$, $p = 0,38$.
- b. On a $p(X \leq 4) \approx 0,0726$, donc $p(X \geq 5) \approx 1 - 0,0726$ soit environ 0,9273 soit 0,927 au millième près.

Partie B

1. La variable aléatoire X_2 suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,47$ donc son espérance $E(X_2)$ est égale à $np = 1000 \times 0,47 = 470$.

Cela signifie qu'en moyenne, sur un échantillon de 1 000 clients réguliers, il y en aura 470 qui ont acheté la carte de fidélité.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{Y}{1000}$.

2. La variable Z représente la moyenne par client des montants offerts aux 1 000 clients.

- On utilise la linéarité de l'espérance.

$$Z = \frac{Y}{1000} \text{ donc } E(Z) = \frac{E(Y)}{1000}, \text{ et } Y = Y_1 + Y_2 \text{ donc } E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2).$$

$$\text{De plus, } Y_2 = 50X_2 \text{ donc } E(Y_2) = 50E(X_2) = 50 \times 470 = 23\,500$$

$$\text{On sait que } E(Y_1) = 30\,000.$$

$$\text{On en déduit que : } E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2) = 30\,000 + 23\,500 = 53\,500, \text{ et donc que}$$

$$E(Z) = \frac{E(Y)}{1000} = \frac{53\,500}{1000} = 53,5.$$

- Les variables étant indépendantes, on va utiliser l'additivité de la variance.

$$V(Y) = V(Y_1 + Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2), \quad V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2 V(X_2) = 2\,500 V(X_2),$$

$$\text{et } V(Z) = V\left(\frac{Y}{1000}\right) = \frac{V(Y)}{1000^2} = \frac{V(Y)}{10^6}$$

La variable aléatoire X_2 suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,47$ donc sa variance $V(X_2)$ est égale à $np(1-p) = 1000 \times 0,47 \times (1 - 0,47) = 249,1$.

$$\text{On en déduit que } V(Y_2) = 2\,500 V(X_2) = 2\,500 \times 249,1 = 622\,750.$$

$$\text{On sait que } V(Y_1) = 100\,000 \text{ donc}$$

$$V(Y) = V(Y_1) + V(Y_2) = 100\,000 + 622\,750 = 722\,750.$$

$$V(Z) = \frac{V(Y)}{10^6} = \frac{722\,750}{10^6} = 0,72275$$

3. La variable aléatoire Z a pour espérance $E(Z) = 53,5$ et pour variance $V(Z) = 0,72275$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$\text{pour tout } \delta \in]0; +\infty[, \quad P(|Z - E(Z)| \geq \delta) \leq \frac{V(Z)}{\delta^2}.$$

$$51,7 < Z < 55,3 \iff 53,5 - 1,8 < Z < 53,5 + 1,8 \iff -1,8 < Z - 53,5 < 1,8$$

$$\iff |Z - 53,5| < 1,8$$

En remplaçant $E(Z)$ et $V(Z)$ par leurs valeurs, et en prenant $\delta = 1,8$, l'inégalité de

$$\text{Bienaymé-Tchebychev devient : } P(|Z - 53,5| \geq 1,8) \leq \frac{0,72275}{1,8^2}$$

En considérant l'évènement contraire, on a : $P(|Z - 53,5| < 1,8) > 1 - \frac{0,72275}{1,8^2}$.

$$1 - \frac{0,72275}{1,8^2} \approx 0,777$$

Donc la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 11

Polynésie 19 juin 2024

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles

Partie A

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face ».

- On lance 3 fois une pièce de monnaie bien équilibrée donc il s'agit d'une répétition de 3 épreuves identiques et indépendantes; la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face » suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{2}$.

$$2. P(X = 0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-0} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-1} = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-2} = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

On complète le tableau donnant la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Partie B

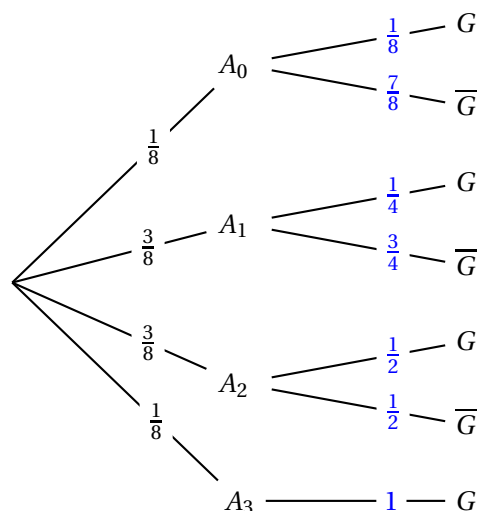
Voici les règles d'un jeu où le but est d'obtenir trois pièces du côté « Face » en un ou deux essais :

- On lance trois pièces équilibrées :
 - Si les trois pièces sont tombées du côté « Face », la partie est gagnée;

- Sinon, les pièces tombées du côté « Face » sont conservées et on relance celles tombées du côté « Pile ».
- La partie est gagnée si on obtient trois pièces du côté « Face », sinon elle est perdue.

On considère les évènements suivants :

- G : « la partie est gagnée ».
- Et pour tout entier k compris entre 0 et 3, les évènements :
- A_k : « k pièces sont tombées du côté « Face » au premier lancer ».
1. $P_{A_1}(G)$ est la probabilité de l'évènement « on a gagné sachant que lors du premier lancer, on a obtenu une fois « Face ». C'est donc la probabilité qu'au deuxième lancer, les deux pièces tombent sur « Face ».
Il y a 4 résultats équiprobables possibles : PP - PF - FP - FF, dont un seul favorable ; la probabilité cherchée est donc égale à $\frac{1}{4}$.
 2. On complète l'arbre pondéré ci-dessous :



3. D'après la loi des probabilités totales on a :

$$p = P(A_0) \times P_{A_0}(G) + P(A_1) \times P_{A_1}(G) + P(A_2) \times P_{A_2}(G) + P(A_3) \times P_{A_3}(G)$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times 1 = \frac{1+6+12+8}{64} = \frac{27}{64}$$

4. La partie a été gagnée. La probabilité qu'exactement une pièce soit tombée du côté « Face » à la première tentative est :

$$P_G(A_1) = \frac{P(A_1 \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{4}}{\frac{27}{64}} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{27}{64}} = \frac{3}{32} \times \frac{64}{27} = \frac{2}{9}.$$

5. Les parties sont à chaque fois indépendantes et la probabilité de gagner est à chaque fois égale à $\frac{27}{64}$. Pour n parties jouées, on appelle Z la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées, Z suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{27}{64}$.

$$P(Z=0) = \binom{n}{0} \times \left(\frac{27}{64}\right)^0 \times \left(1 - \frac{27}{64}\right)^n = \left(\frac{37}{64}\right)^n \text{ donc } P(Z \geq 1) = 1 - \left(\frac{37}{64}\right)^n.$$

Il faut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(Z \geq 1) > 0,95$.

On résout donc l'inéquation :

$$\begin{aligned}
1 - \left(\frac{37}{64}\right)^n > 0,95 &\iff \left(\frac{37}{64}\right)^n < 0,05 \\
&\iff \ln\left(\left(\frac{37}{64}\right)^n\right) < \ln(0,05) \text{ (croissance de la fonction } \ln) \\
&\iff n \ln\left(\frac{37}{64}\right) < \ln(0,05) \\
&\iff n > \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \text{ car } \frac{1}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} < 0
\end{aligned}$$

Or la calculatrice donne $\frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \approx 5,46$. Il faut donc faire au moins 6 parties.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 12

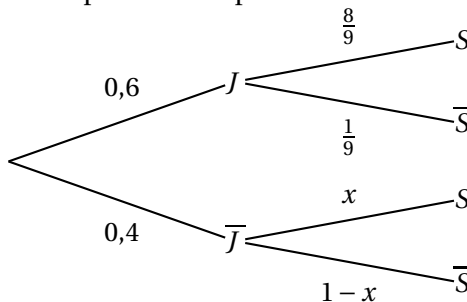
Polynésie 21 juin 2024

1. D'après l'énoncé $P(J) = 0,6$ et $P_J(S) = \frac{8}{9}$.

$$\text{On a donc } P(J \cap S) = P(J) \times P_J(S) = 0,6 \times \frac{8}{9} = \frac{4,8}{9} = \frac{3 \times 1,6}{3 \times 3} = \frac{1,6}{3} = \frac{5 \times 1,6}{5 \times 3} = \frac{8}{15}.$$

2. a. On sait que $P(S) = \frac{2}{3}$.

On commence l'arbre de probabilités pondéré suivant :



D'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(S) &= P(J \cap S) + P(\bar{J} \cap S), \text{ soit } \frac{2}{3} = \frac{8}{15} + P(\bar{J} \cap S) \iff P(\bar{J} \cap S) = \frac{2}{3} - \frac{8}{15} = \\
&\frac{10}{15} - \frac{8}{15} = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

La probabilité que la personne choisie n'a pas l'intention de regarder les JO à la télévision et a une activité sportive régulière est égale à $\frac{2}{15}$;

b. On a $P_{\bar{J}}(S) = \frac{P(\bar{J} \cap S)}{P(\bar{J})} = \frac{\frac{2}{15}}{0,4} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{15} \times \frac{5}{2} = \frac{1}{3} = x$.

3. a. Les personnes sont choisies au hasard et chacune d'elles a une pratique sportive régulière avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et

$$p = \frac{2}{3}.$$

- b. On a $P(X = 16) = \binom{30}{16} \left(\frac{2}{3}\right)^{16} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{30-16} = \binom{30}{16} \left(\frac{2}{3}\right)^{16} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{14} \approx 0,0462$ soit 0,046 au millième près à la calculatrice.
- c. On a $\frac{10\,000}{380} \approx 26,3$: on peut donc offrir 26 entrées gratuites au maximum.
La calculatrice donne $P(X \leq 26) \approx 0,9967$ soit environ 0,997. La probabilité que le budget soit insuffisant est donc égale à environ $1 - 0,997$ soit environ 0,003 ou trois millièmes.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 13

Polynésie 5 septembre 2024

Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

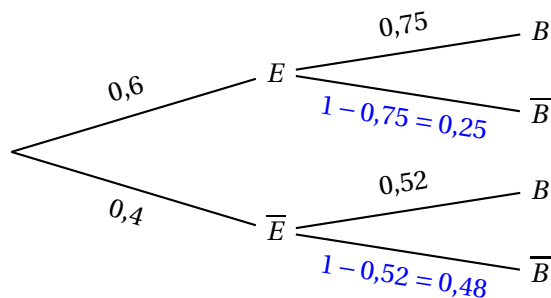
- 60 % sont des véhicules tout-électrique ;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.

On choisit un acheteur au hasard et on considère les événements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

On crée un arbre pondéré résumant la situation.



1. La probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile est :

$$P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B) = 0,6 \times 0,75 = 0,45.$$

2. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(E \cap B) + P(\overline{E} \cap B) = 0,45 + 0,4 \times 0,52 = 0,658.$$

3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile.

La probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique est :

$$P_B(E) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)} = \frac{0,45}{0,658} \approx 0,684.$$

4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.
- On est dans le cas d'une répétition avec remise d'une expérience n'ayant que 2 issues : la possibilité d'installer une borne de recharge, avec la probabilité $p = 0,658$, ou non. Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,658$.
 - $P(X = 8) = \binom{20}{8} \times 0,658^8 \times (1 - 0,658)^{20-8} \approx 0,011$
 - La probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge est : $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 1 - 0,0452 \approx 0,955$
 - L'espérance de X est : $E(X) = np = 20 \times 0,658 = 13,16$.
 - La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1 200 €.
L'espérance de X représente le nombre moyen de clients pouvant installer une borne de recharge à leur domicile. L'installation d'une borne coûte 1 200 €. Il faut donc prévoir : $13,16 \times 1\,200$ soit 15 792 €.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 14

Métropole Antilles-Guyane 11 septembre 2024

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.

On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

- Un cachet peut être non conforme, avec la probabilité $p = 0,02$, ou conforme.
Un échantillon de 100 cachets correspond à une répétition avec remise de l'expérience qui consiste à tirer un cachet de la production totale.
Donc la variable aléatoire N qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,02$.
- L'espérance de N est $E(N) = np = 100 \times 0,02 = 2$.
Il y a donc, en moyenne, 2 cachets non conformes par boîte.

3. a. La probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes est : $P(N = 3) = \binom{100}{3} \times 0,02^3 \times (1 - 0,02)^{100-3} \approx 0,182$.

- b. La probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes est la probabilité qu'elle contienne au plus 5 cachets non conformes, c'est-à-dire : $P(N \leq 5) \approx 0,985$.

4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ».

Pour N suivant la loi binomiale de paramètres n , à déterminer, et $p = 0,02$, on veut : $P(N = 0) > 0,5$. C'est-à-dire : $\binom{n}{0} \times 0,02^0 \times (1 - 0,02)^n > 0,5$. On résout cette inéquation.

$$\binom{n}{0} \times 0,02^0 \times (1 - 0,02)^n > 0,5 \iff 0,98^n > 0,5 \iff \ln(0,98^n) > \ln(0,5)$$

$$\iff n \times \ln(0,98) > \ln(0,5) \iff n < \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)}$$

$$\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)} \approx 34,3$$

Donc le nombre maximum de cachets dans la boîte pour que la probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes soit supérieure à 0,5 est 34.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les uns des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i , pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i -ème cachet prélevé.

On considère la variable aléatoire S définie par : $S = M_1 + M_1 + \dots + M_{100}$.

On admet que les variables aléatoires $M_1, M_2, \dots, M_{100}$ suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ .

1. Chaque variable aléatoire M_i suit une loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$.

$$S = M_1 + M_2 + \dots + M_{100}$$

On utilise la linéarité de l'espérance donc :

$$E(S) = E(M_1 + M_2 + \dots + M_{100}) = E(M_1) + E(M_2) + \dots + E(M_{100}) = 100 \times 2 = 200$$

La masse de 100 cachets est donc en moyenne de 200 grammes.

2. On note s l'écart type de la variable aléatoire S .

Chaque variable aléatoire M_i suit une loi de probabilité d'écart-type σ , donc de variance $V(M_i) = \sigma^2$.

Les variables M_i étant indépendantes, on va utiliser l'additivité de la variance :

$$V(S) = V(M_1 + M_2 + \dots + M_{100}) = V(M_1) + V(M_2) + \dots + V(M_{100}) = 100\sigma^2$$

$$s = \sqrt{V(S)} = \sqrt{100\sigma^2} = 10\sigma$$

3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9, c'est-à-dire que $P(199 < S < 201) > 0,9$.

$$\begin{aligned} \text{a. } 199 < S < 201 &\iff 199 - 200 < S - 200 < 201 - 200 \iff -1 < S - 200 < 1 \\ &\iff |S - 200| < 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P(199 < S < 201) = P(|S - 200| < 1)$$

En prenant l'événement contraire :

$$P(|S - 200| < 1) > 0,9 \iff P(|S - 200| \geq 1) \leq 0,1$$

- b. La variable aléatoire S a pour espérance $E(S) = 200$ et pour variance $V(S) = 100\sigma^2$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$\text{pour tout } \delta \in]0; +\infty[, P(|S - E(S)| \geq \delta) \leq \frac{V(S)}{\delta^2},$$

$$\text{c'est-à-dire, pour tout } \delta \in]0; +\infty[, P(|S - 200| \geq \delta) \leq \frac{100\sigma^2}{\delta^2},$$

On cherche σ pour que $P(|S - 200| \geq 1) \leq 0,1$.

On prend $\delta = 1$ donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev devient :

$$P(|S - 200| \geq 1) \leq \frac{100\sigma^2}{1^2}, \text{ c'est-à-dire } P(|S - 200| \geq 1) \leq 100\sigma^2$$

Il suffit que $100\sigma^2 \leq 0,1$ donc que $\sigma^2 \leq 10^{-3}$, et donc que $\sigma \leq \sqrt{10^{-3}}$.

La valeur maximale de σ qui permet d'assurer la condition requise est $\sigma = \sqrt{10^{-3}} \approx 0,0316$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 15

Amérique du Sud 21 novembre 2024

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches. L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.

On considère l'expérience aléatoire suivante : on pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans U_2 .

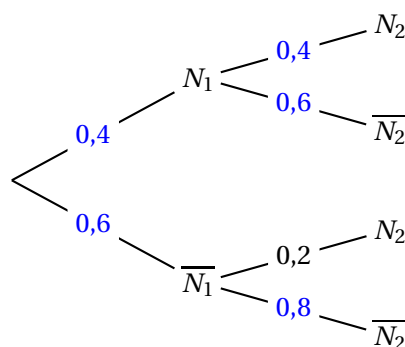
On note :

- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

Pour tout évènement A , on note $\bar{A}$ son évènement contraire.

PARTIE A

1. a. Si on a pioché une boule blanche dans U_1 et qu'on l'a mise dans U_2 , il y a dans l'urne U_2 1 boule noire et 4 boules blanches. La probabilité de piocher alors une boule noire dans l'urne U_2 est $P_{\bar{N}_1}(N_2) = \frac{1}{5} = 0,2$.
- b. Dans U_1 il y a 4 boules noires et 6 boules blanches donc la probabilité de piocher une boule noire est $P(N_1) = \frac{4}{10} = 0,4$.
Si on a pioché une boule noire dans U_1 et qu'on l'a mise dans U_2 , il y a dans l'urne U_2 2 boules noires et 3 boules blanches. La probabilité de piocher alors une boule noire dans l'urne U_2 est $P_{N_1}(N_2) = \frac{2}{5} = 0,4$.



2. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2 est : $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$.

3. On cherche la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 .

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(N_2) = P(N_1 \cap N_2) + P(\overline{N_1} \cap N_2) = 0,16 + 0,6 \times 0,2 = 0,28.$$

4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2 .

La probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est :

$$P_{N_2}(\overline{N_1}) = \frac{P(N_2 \cap \overline{N_1})}{P(N_2)} = \frac{0,12}{0,28} = \frac{3}{7} \approx 0,43.$$

PARTIE B

n désigne un entier naturel non nul.

L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 , entre chaque expérience.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2 .

On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. D'après le texte, on est dans le cas de n répétitions, de façon identique et indépendante, d'une expérience qui n'a que deux issues.

Donc la variable X qui donne le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2 , suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,28$.

2. On résout l'inéquation $1 - 0,72^n \geq 0,9$.

$$1 - 0,72^n \geq 0,9 \iff 1 - 0,9 \geq 0,72^n \iff 0,1 \geq 0,72^n$$

$$\iff \ln(0,1) \geq \ln(0,72^n) \quad (\text{fonction } \ln \text{ croissante sur } [0; +\infty[)$$

$$\iff \ln(0,1) \geq n \ln(0,72)$$

$$\iff \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,72)} \leq n \quad (\ln(0,72) < 0)$$

$$\frac{\ln(0,1)}{\ln(0,72)} \approx 7,01 \text{ donc le plus petit entier naturel } n \text{ tel que : } 1 - 0,72^n \geq 0,9 \text{ est } 8.$$

3. 0,72 est la probabilité de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 .

$0,72^n$ est la probabilité de piocher n boules blanches dans l'urne U_2 lors des n tirages.

$1 - 0,72^n$ est la probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire la probabilité de piocher au moins une boule noire lors des n tirages.

Il faut donc au moins 8 tirages pour que la probabilité de piocher au moins une boule noire soit supérieure à 0,9.

PARTIE C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 .

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante : on pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2 .

1. Dans l'urne U_1 il y a 10 boules et on en prend 2 simultanément ; il y a donc $\binom{10}{2} = 45$ tirages possibles.

2. Il y a 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 ; le nombre de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire est donc $\binom{4}{1} \times \binom{6}{1} = 4 \times 6 = 24$.

3. On examine les différents cas.

- On a pioché 2 boules noires dans U_1 (événement noté NN).

$$\triangleright P(NN) = \frac{\binom{4}{2}}{45} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

- $\triangleright$ On a mis les 2 boules noires piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 3 boules noires et 3 boules blanches.

La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est alors $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

- On a pioché 1 boule noire et 1 boule blanche dans U_1 (événement noté NB).

$$\triangleright P(NB) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

- $\triangleright$ On a mis les 2 boules, une noire une blanche, piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 2 boules noires et 4 boules blanches.

La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est alors $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

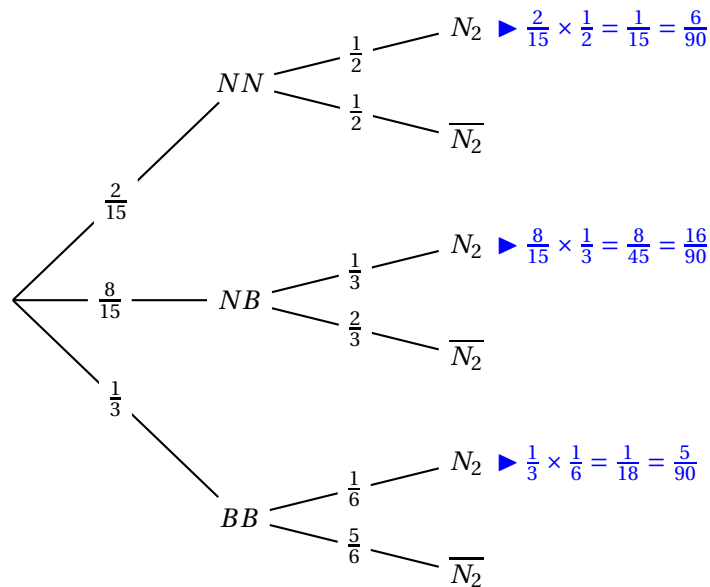
- On a pioché 2 boules blanches dans U_1 (événement noté BB).

$$\triangleright P(BB) = \frac{\binom{6}{2}}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

- $\triangleright$ On a mis les 2 boules blanches piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 1 boule noire et 5 boules blanches.

La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est alors $\frac{1}{6}$.

On résume la situation dans un arbre pondéré.



La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est, d'après la formule des probabilités totales :

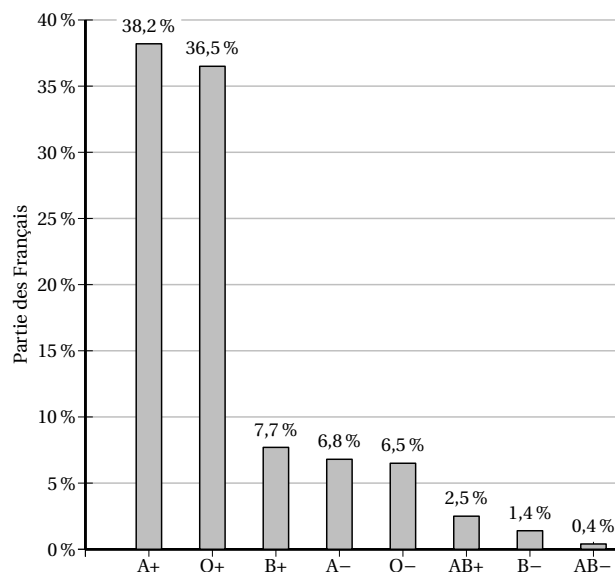
$$P(N_2) = P(NN \cap N_2) + P(NB \cap N_2) + P(BB \cap N_2) = \frac{6}{90} + \frac{16}{90} + \frac{5}{90} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10} = 0,3$$

La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est égale à 0,3; elle est donc supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A qui était de 0,28.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 16

Amérique du Sud 22 novembre 2024

Voici la répartition des principaux groupes sanguins des habitants de France :



Une expérience aléatoire consiste à choisir une personne au hasard dans la population française et à déterminer son groupe sanguin et son rhésus.

Partie 1

1. Le pourcentage de personne ayant un rhésus positif est : $38,2 + 36,5 + 7,7 + 2,5$ soit $84,9\%$. Donc la probabilité $P(Rh+)$ que la personne choisie soit de rhésus positif est égale à $0,849$.

2. On cherche $P_{Rh+}(A) = \frac{P(Rh+ \cap A)}{P(Rh+)} = \frac{P(A+)}{P(Rh+)}$

Il y a $38,2\%$ de personnes $A+$ dans la population donc $P(A+) = 0,382$.

Donc $P_{Rh+}(A) = \frac{0,382}{0,849} \approx 0,450$.

3. Une personne se souvient que son groupe sanguin est AB mais a oublié son rhésus.

La probabilité que son rhésus soit négatif est : $P_{AB}(Rh-) = \frac{P(Rh- \cap AB)}{P(AB)} = \frac{P(AB-)}{P(AB)}$.

Il y a $0,4\%$ de personnes $AB-$ dans la population donc $P(AB-) = 0,004$.

$2,5 + 0,4 = 2,9$ donc il y a $2,9\%$ de personnes AB dans la population donc $P(AB) = 0,029$.

$\frac{0,004}{0,029} \approx 0,138$ donc la probabilité que son rhésus soit négatif est $0,138$ à $0,001$ près.

Partie 2

Un donneur universel de sang est une personne de groupe sanguin O et de rhésus négatif. On rappelle que $6,5\%$ de la population française est de groupe $O-$ donc $P(O-) = 0,065$.

1. On considère 50 personnes choisies au hasard dans la population française et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de donneurs universels.

- a. Le choix au hasard de 50 personnes peut être assimilé à un tirage avec remise donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de donneurs universels suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,065$.

La probabilité que 8 personnes soient des donneurs universels est donc :

$$P(X = 8) = \binom{50}{8} \times 0,065^8 \times (1 - 0,065)^{50-8} \approx 0,010.$$

- b. On considère la fonction ci-dessous nommée `proba` d'argument k écrite en langage Python.

```
def proba(k):
    p = 0
    for i in range(k+1):
        p = p + binomiale(i, 50, 0.065)
    return p
```

Cette fonction utilise la fonction `binomiale` d'argument i, n et p , créée pour l'occasion, qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où X suit une loi binomiale de paramètres n et p .

La valeur numérique renvoyée par la fonction `proba` lorsqu'on saisit `proba(8)` dans la console Python correspond à $P(X \leq 8)$ et vaut environ $0,995$; cela veut dire qu'il y a une probabilité de $0,995$ que sur les 50 personnes, il y en ait au plus 8 de groupe $O-$.

2. On veut déterminer le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel, soit supérieure à 0,999.

Autrement dit on cherche n pour que $P(X \geq 1) > 0,999$, donc en passant par l'événement contraire : $1 - P(X = 0) > 0,999$.

Pour une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,065$,

$$\text{on a : } P(X = 0) = \binom{50}{0} \times 0,065^0 \times (1 - 0,065)^n = 0,935^n.$$

On résout l'inéquation : $1 - 0,935^n > 0,999$.

$$1 - 0,935^n > 0,999 \iff 1 - 0,999 > 0,935^n \iff 0,001 > 0,935^n$$

$$\iff \ln(0,001) > \ln(0,935^n) \quad (\text{croissance de la fonction } \ln)$$

$$\iff \ln(0,001) > n \times \ln(0,935)$$

$$\iff \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,935)} < n \quad (\text{car } \ln(0,935) < 0)$$

Or $\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,935)} \approx 102,8$ donc le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel, soit supérieure à 0,999 est $n = 103$.