LYCÉE FRANÇAIS SAINT-EXUPÉRY DE BRAZZAVILLE
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES

LYCÉE INTERNATIONAL FRANÇAIS
SAINT
EXUPÉRY
BRAZZAVILLE CONGO

# ANNALES DU BAC MATHÉMATIQUES 2024

## Calcul intégral
## Equations différentielles

Exercices extraits du site de l'APMEP

---

PAR VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

SUJETS ET CORRIGÉS
36 PAGES

LYCÉE INTERNATIONAL FRANÇAIS SAINT EXUPÉRY
RÉP. DU CONGO

# SOMMAIRE

## EXERCICE 1

Amérique du Nord 21 mai 2024

Pour tout entier naturel $n$, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

**1.** Calculer $I_0$.

**2.** **a.** Justifier que, pour tout entier naturel $n$ , on a $I_n \geqslant 0$.

**b.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$ , on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

**c.** Déduire des deux questions précédentes que la suite $(I_n)$ converge.

**3.** **a.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$ , on a :

$$I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

**b.** Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$$

**c.** Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite $(I_n)$.

**4.** **a.** En intégrant par parties l'intégrale $I_n$ de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ :

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

**b.** En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$I_n = \frac{1 + \mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

**5.** On souhaite obtenir le rang $n$ à partir duquel la suite $(I_n)$ devient inférieure à 0,1. Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1   from math import *
2   def seuil() :
3       n = 0
4       I = 2
5       ...
6           n = n+1
7           I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8       return n
```

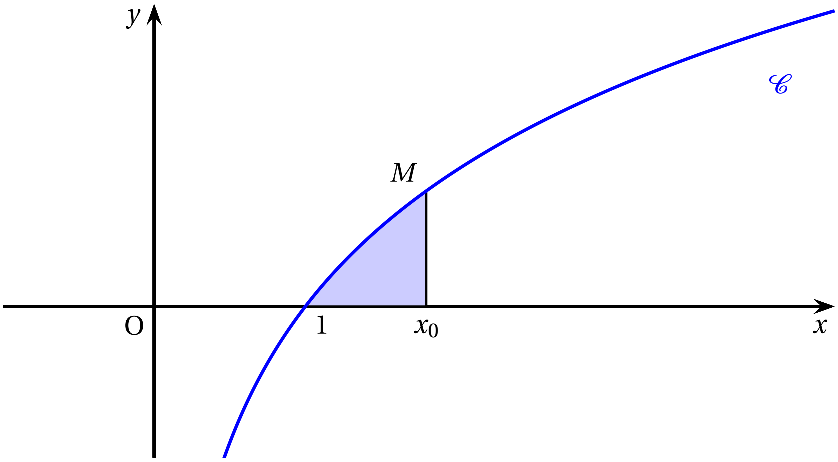
## EXERCICE 2

Soit $a$ un réel strictement positif.
On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = a\ln(x).$$

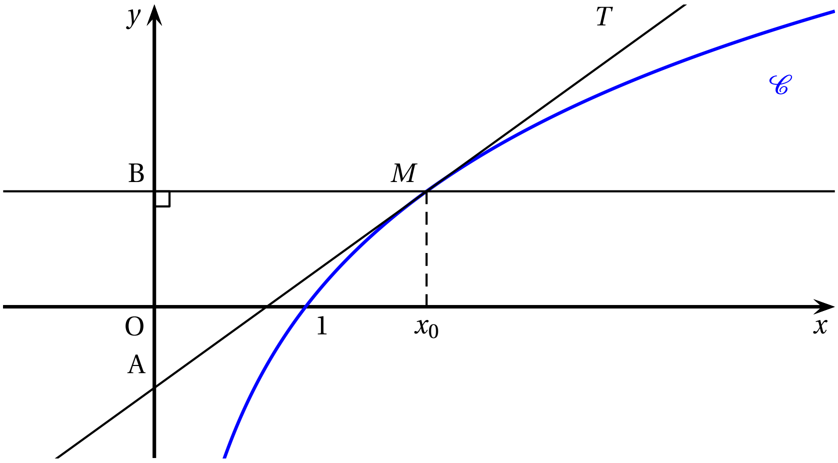
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit $x_0$ un réel strictement supérieur à 1.

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
2. Vérifier que la fonction $F$ définie par $F(x) = a[x\ln(x) - x]$ est une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. En déduire l'aire du domaine bleuté en fonction de $a$ et de $x_0$.



On note $T$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $M$ d'abscisse $x_0$.

On appelle A le point d'intersection de la tangente $T$ avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de $M$ sur l'axe des ordonnées.



4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de $x_0$) que l'on déterminera.
*Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.*

---

## EXERCICE 3

Thèmes : Centres étrangers 5 juin 2024

On considère l'équation différentielle

$$(E_0): \quad y' = y$$

où $y$ est une fonction dérivable de la variable réelle $x$.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle $(E_0)$ est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $(E_0)$.
   On considère l'équation différentielle
   $$(E): \quad y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$
   où $y$ est une fonction dérivable de la variable réelle $x$.
3. La fonction $h$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
   On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que la fonction $h$ est solution de l'équation différentielle $(E)$.
4. On considère une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que : « $f$ est solution de $(E)$ » est équivalent à « $f - h$ est solution de $(E_0)$ ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $(E)$.
6. Déterminer l'unique solution $g$ de l'équation différentielle $(E)$ telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer :
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2\,\mathrm{e}^{\,x} + \sin(x) + 2\cos(x)\right] \mathrm{d}x.$$

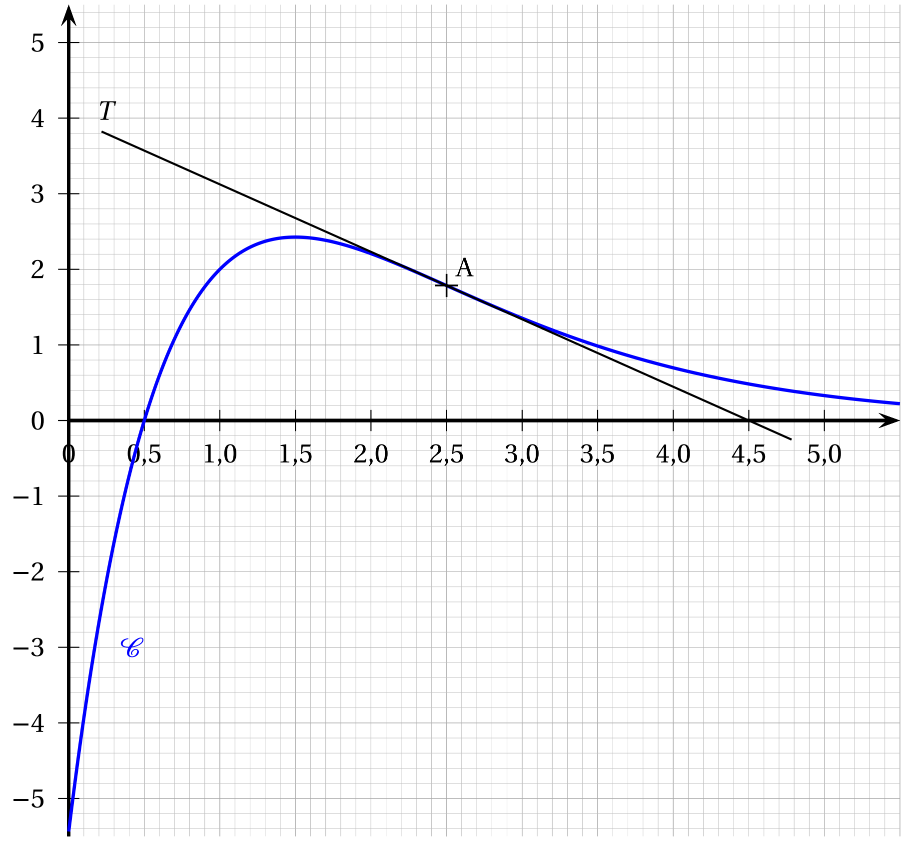
---

## EXERCICE 4

Thèmes : Asie 10 juin 2024

On considère une fonction $f$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.

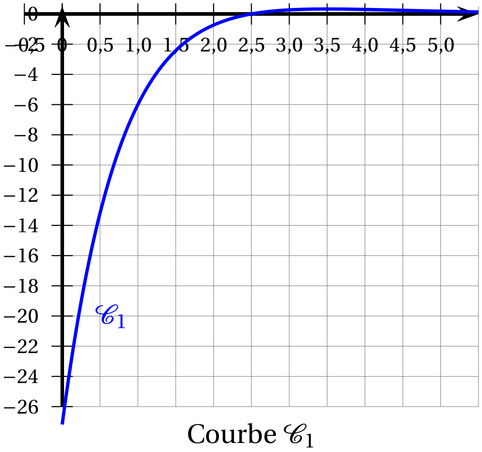
La droite $T$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.



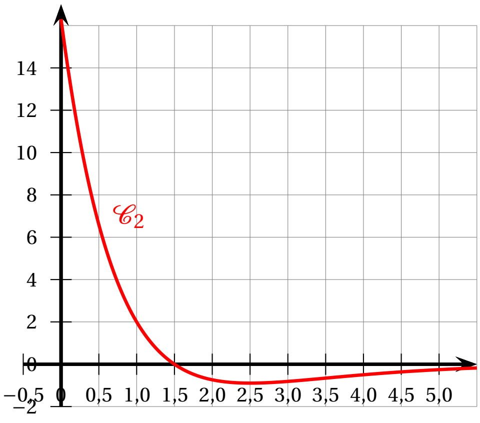
1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;5]$.
2. Que semble présenter la courbe $\mathscr{C}$ au point A ?
3. La dérivée $f'$ et la dérivée seconde $f''$ de la fonction $f$ sont représentées par les courbes ci-dessous.

   Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente.

   Ce choix sera justifié.

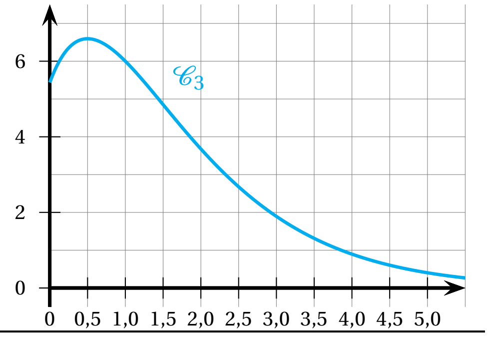


Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

4. La courbe $\mathscr{C}_3$ ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0\,;\,+\infty[$ d'une primitive de la fonction $f$ ? Justifier.



**Partie B**

Dans cette partie, on considère que la fonction $f$, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, est définie par

$$f(x) = (4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}.$$

On notera respectivement $f'$ et $f''$ la dérivée et la dérivée seconde de la fonction $f$.

**1.** Étude de la fonction $f$

- **a.** Montrer que $f'(x) = (-4x+6)\,\mathrm{e}^{-x+1}$.
- **b.** Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
- **c.** Étudier la convexité de la fonction $f$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de $f$.

**2.** On considère une fonction $F$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x+1}$, où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.

- **a.** Déterminer les valeurs des réels $a$ et $b$ telles que la fonction $F$ soit une primitive de la fonction $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
- **b.** On admet que $F(x) = (-4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de la fonction $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

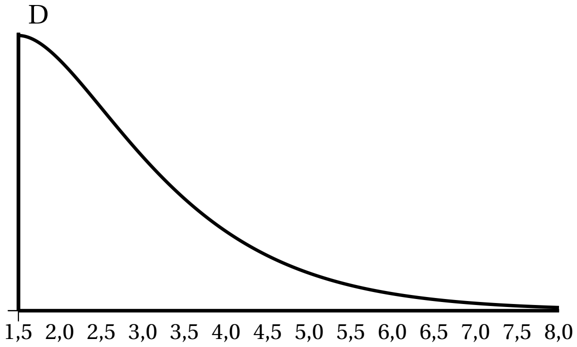
  En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à $10^{-2}$ près, de l'intégrale

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**3.** Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.

Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction $f$ sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}\,;\,8\right]$.

L'unité de longueur est le mètre.



- **a.** Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.
- **b.** La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur.

  Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de 0,8 m$^2$, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.

## EXERCICE 5

Thèmes : Métropole 19 juin 2024

### Partie A : étude de la fonction $f$

La fonction $f$ est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction $f$ est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, on note $f'$ sa dérivée et $f''$ sa dérivée seconde.

1. **a.** Déterminer, en justifiant, les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.

   **b.** Montrer que pour tout $x$ appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.

   **c.** Étudier le sens de variation de $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   **d.** Étudier la convexité de $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\ ;\ +\infty[$ une solution unique qu'on notera $\alpha$ et justifier que $\alpha$ appartient à l'intervalle $[1\ ;\ 2]$.

   **b.** Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in ]0\ ;\ +\infty[$.

   **c.** Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

### Partie B : étude de la fonction $g$.

La fonction $g$ est définie sur $]0\ ;\ 1]$ par : $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x$.
On admet que la fonction $g$ est dérivable sur $]0\ ;\ 1]$ et on note $g'$ sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in ]0\ ;\ 1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2. **a.** Justifier que pour $x$ appartenant à l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.

   **b.** On admet le tableau de signes suivant :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{\alpha}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ | ‖ | + | 0 | − | |

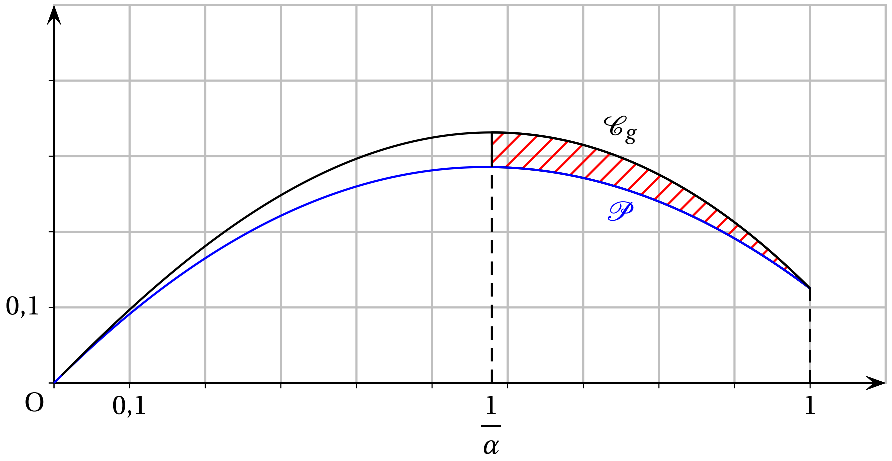
   En déduire le tableau de variations de $g$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

### Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

— La courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction $g$ ;

— La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{P}$, et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

**1.** **a.** Justifier la position relative des courbes $C_g$ et $\mathscr{P}$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.

**b.** Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

**2.** En déduire l'expression en fonction de $\alpha$ de l'aire $\mathscr{A}$.

---

## EXERCICE 6

Thèmes : Métropole 19 juin 2024 J1 (secours)

### Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

**1.** On admet que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.

**a.** Montrer que pour tout nombre réel $x$, on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

**b.** En déduire le sens de variation de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

3. Calculer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

### Partie B : étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) & = & u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel $n : u_n \geqslant 0$.
2. Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.
3. En déduire la convergence de la suite $(u_n)$.
4. On note $\ell$ la limite de la suite $(u_n)$. Déterminer la valeur de $\ell$.
5. **a.** Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier $n$ à partir de laquelle $u_n \leqslant h$, où $h$ est un nombre réel strictement positif.

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
  n = 0
  u =7
  while ... :
    n = n+1
    u = ...
  return n
```

   **b.** Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit seuil(0.01) dans la console Python. Justifier la réponse.

### Partie C : calcul intégral

1. Étudier le signe de la fonction $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Interpréter graphiquement l'intégrale :

$$I = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2\,;\,4]$, on a l'encadrement :

$$0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25.$$

En déduire l'encadrement :

$$1 \leqslant I \leqslant 2.$$

## EXERCICE 7 Thèmes : Métropole 20 juin 2024

*Les parties* A *et* B *sont indépendantes*

Alain possède une piscine qui contient 50 $\text{m}^3$ d'eau. On rappelle que $1\text{m}^3 = 1\,000$ L.

Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en mg. $\text{L}^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 mg.$\text{L}^{-1}$.

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à 0,01 mg.$\text{L}^{-1}$.

Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de 0,70 mg. $\text{L}^{-1}$.

### Partie A : étude d'un modèle discret

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de 0,3 mg. $\text{L}^{-1}$.
2. Pour tout entier naturel $n$, on note $v_n$ le taux de chlore, en mg. $\text{L}^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole $n$ jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0{,}7$.

   On admet que pour tout entier naturel $n$,

   $$v_{n+1} = 0{,}92\,v_n + 0{,}3.$$

   **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

   **b.** Montrer que la suite $(v_n)$ est convergente et calculer sa limite.
3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse,
4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-contre écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier $n$ tel que $v_n > s$.
5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ?

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def alerte_chlore(s) :
    n=0
    v=0.7
    while ____________ :
        n= ______
        v= ______
    return n
```

### Partie B : étude d'un modèle continu

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée $x$ (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en mg. $\text{L}^{-1}$, dans la piscine.

On admet que la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' = -0{,}08y + \frac{q}{50}$$

où $q$ est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction $f$ est de la forme $f(x) = C\,\mathrm{e}\,-^{0{,}08x} + \frac{q}{4}$ où $C$ est une constante réelle.
2. **a.** Exprimer en fonction de $q$ la limite de $f$ en $+\infty$.

   **b.** On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à 0,7 mg.L$^{-1}$.

   On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de 2 mg.L$^{-1}$.

   Déterminer les valeurs de $C$ et $q$ afin que ces deux conditions soient respectées.

---

## EXERCICE 8

Thèmes : Polynésie 19 juin 2024

Une entreprise fabrique des objets en plastique en injectant dans un moule de la matière fondue à 210 °C. On cherche à modéliser le refroidissement du matériau à l'aide d'une fonction $f$ donnant la température du matériau injecté en fonction du temps $t$.

Le temps est exprimé en seconde et la température est exprimée en degré Celsius.

On admet que la fonction $f$ cherchée est solution d'une équation différentielle de la forme suivante où $m$ est une constante réelle que l'on cherche à déterminer :

$$(E): \quad y' + 0{,}02y = m$$

### Partie A

1. Justifier l'affichage suivant d'un logiciel de calcul formel :

| | |
|---|---|
| Entrée : | RésoudreEquationDifférentielle $(y' + 0{,}02y = m)$ |
| Sortie : | $\boxed{\rightarrow}\ y = k * \exp(-0.02 * t) + 50 * m$ |

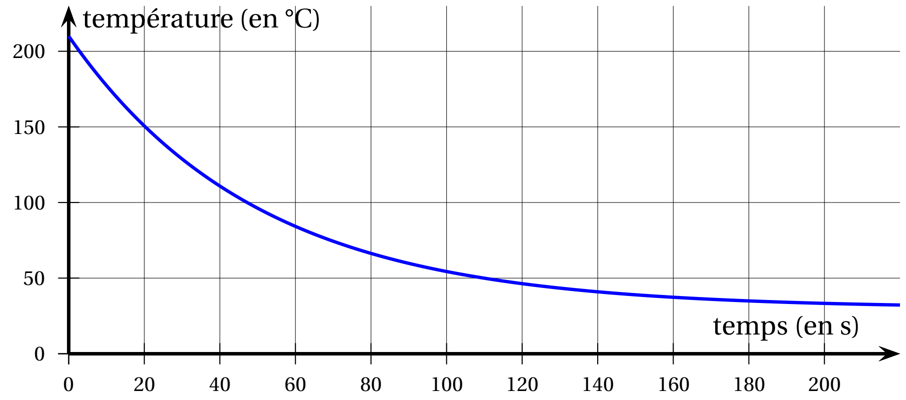
2. La température de l'atelier est de 30 °C. On admet que la température $f(t)$ tend vers 30 °C lorsque $t$ tend vers l'infini.

   Démontrer que $m = 0{,}6$.
3. Déterminer l'expression de la fonction $f$ cherchée en tenant compte de la condition initiale $f(0) = 210$.

### Partie B

On admet ici que la température (exprimée en degré Celsius) du matériau injecté en fonction du temps (exprimé en seconde) est donnée par la fonction dont l'expression et une représentation graphique sont données ci-dessous :

$$f(t) = 180\,\mathrm{e}^{-0,02t} + 30.$$



1. L'objet peut être démoulé lorsque sa température devient inférieure à 50°C.
   - **a.** Par lecture graphique, donner une valeur approchée du nombre $T$ de secondes à attendre avant de démouler l'objet.
   - **b.** Déterminer par le calcul la valeur exacte de ce temps $T$.
2. À l'aide d'une intégrale, calculer la valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes.

---

## EXERCICE 9

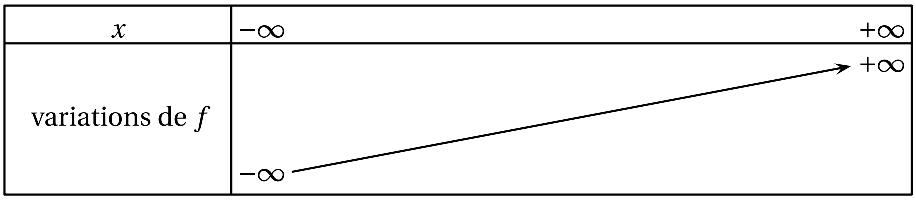
Thèmes : Polynésie 5 septembre 2024

*Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.*
*Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

1. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} + x.$$

**Affirmation A** : La fonction $f$ admet pour tableau de variations le tableau ci- dessous :



**Affirmation B** : L'équation $f(x) = -2$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

2. **Affirmation C** :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

3. On considère la fonction $k$ définie et continue sur $\mathbb{R}$ par

$$k(x) = 1 + 2\,\mathrm{e}^{-x^2+1}.$$

**Affirmation D** : Il existe une primitive de la fonction $k$ décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad 3y' + y = 1.$$

**Affirmation E** : La fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$$

est solution de l'équation différentielle $(E)$ avec $g(0) = 5$.

5. **Affirmation F** : Une intégration par parties permet d'obtenir :

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}.$$

---

## EXERCICE 10 Thèmes : Métropole Antilles-Guyane 11 septembre 2024

*Les deux parties sont indépendantes.*

### Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).

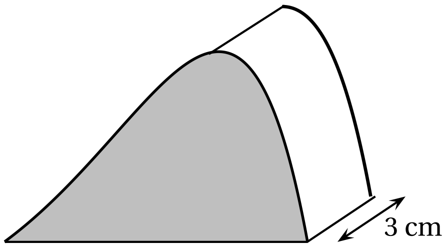


**Figure 1**

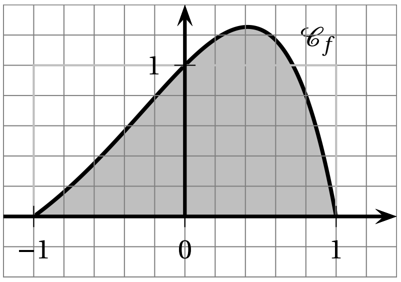


**Figure 2**

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f$ définie sur $[-1\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{x}.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

**1.** **a.** Justifier que pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,1]$ on a $f(x) \geqslant 0$.

**b.** Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x.$$

**2.** Le volume $\mathcal{V}$ de chocolat, en cm³, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathcal{V} = 3 \times S$$

où $S$ est l'aire, en cm², de la surface colorée (**Figure 2**).

En déduire que ce volume $\mathcal{V}$, arrondi à 0,1 cm³ près, est égal à 4,4 cm³.

### Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction $B$ définie sur l'intervalle $[0{,}01\,;\,+\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2[2-3\ln(q)]-3.$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité $q$ en centaines de bonbons.

On admet que la fonction $B$ est dérivable sur $[0{,}01\,;\,+\infty[$. On note $B'$ sa fonction dérivée.

**1.** **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{q\to+\infty} B(q)$.

**b.** Montrer que, pour tout $q \geqslant 0{,}01$, $B'(q) = 8q(1-6\ln(q))$.

**c.** Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de $B$ sur $[0{,}01\,;\,+\infty[$.
Dresser le tableau de variation complet de la fonction $B$.

**d.** Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?

**2.** **a.** Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution $\beta$ sur l'intervalle $[1{,}2\,;\,+\infty[$.
Donner une valeur approchée de $\beta$ à $10^{-3}$ près.

**b.** On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[0{,}01\,;\,1{,}2[$.
On donne $\alpha \approx 0{,}757$.
En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.

## EXERCICE 11

Thèmes : Amérique du Sud 21 novembre 2024

### PARTIE A

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + \frac{1}{4}y = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x},$$

d'inconnue $y$, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel $a$ tel que la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ax\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle $(E)$.
2. On considère l'équation différentielle

   $$(E') : \quad y' + \frac{1}{4}y = 0,$$

   d'inconnue $y$, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E')$.
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle $(E)$.
4. Déterminer la solution $f$ de l'équation différentielle $(E)$ telle que $f(0) = 8$.

### PARTIE B

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (20x+8)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}.$$

On admet que la fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. De plus, on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. **a.** Justifier que, pour tout réel $x$ positif,

   $$f'(x) = (18-5x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}.$$

   **b.** En déduire le tableau de variations de la fonction $f$. On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.
   - **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée $\alpha$, dans l'intervalle $[14\,;\,15]$.
   - **b.** Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction solution_equation ci-contre, écrite en langage Python :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 14 | | | | |
| $b$ | 15 | | | | |
| $b-a$ | 1 | | | | |
| $m$ | 14,5 | | | | ▨ |
| Condition $f(m)>8$ | FAUX | | | | ▨ |

```
from math import exp
def f(x) :
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation() :
    a,b = 14,15
    while b-a > 0.1 :
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 8 :
        |  a = m
        else :
        |  b = m
    return a,b
```

**c.** Quel est l'objectif de la fonction solution_equation dans le contexte de la question ?

---

## Éléments de la correction de l'exercice 1

Amérique du Nord 21 mai 2024

$$I_n=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x,\quad J_n=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

**1.** $I_0=\int_0^{\pi}1\times\sin(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin(x)\,\mathrm{d}x=[-\cos x]_0^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos 0)=1+1=2.$

**2.** **a.** On sait que $0\leqslant x\leqslant\pi\Rightarrow 0\leqslant\sin x\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\leqslant\mathrm{e}^{-nx}$ par produit par $\mathrm{e}^{-nx}>0$ : la fonction à intégrer étant positive et l'intervalle d'intégration étant croissant on sait que l'intégrale de cette fonction positive est positive. Quel que soit $n\in\mathbb{N},\ I_n\geqslant 0$.

**b.** Pour $n\in\mathbb{N},\quad I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x=$
$\int_0^{\pi}\sin x\left[\mathrm{e}^{-(n+1)x}-\mathrm{e}^{-(nx)}\right]\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale, puis
$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{e}^{-(nx)}\left[\mathrm{e}^{-x}-1\right]\mathrm{d}x.$
Soit $u$ la fonction définie sur $[0\,;\,\pi]$ par $u(x)=\mathrm{e}^{-x}-1$.
$u$ est dérivable sur $[0\,;\,\pi]$ et sur cet intervalle $u'(x)=-\mathrm{e}^{-x}<0$. La fonction $u$ est donc décroissante de $\mathrm{e}^{-0}-1=0$ à $\mathrm{e}^{-\pi}-1\approx -0{,}957$.
Comme $\sin x\,\mathrm{e}^{-(nx)}\geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x}-1<0$, la fonction à intégrer dans $I_{n+1}-I_n$ est négative et donc $I_{n+1}-I_n\leqslant 0$.

**c.** On vient de démontrer que $I_{n+1}-I_n\leqslant 0\iff I_{n+1}\leqslant I_n$, c'est-à-dire que la suite $(I_n)$ est décroissante ; étant minorée par zéro elle converge donc vers une limite $\ell\geqslant 0$.

**3.** **a.** On a déjà vu que que $0\leqslant x\leqslant\pi\Rightarrow 0\leqslant\sin x\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\leqslant\mathrm{e}^{-nx}$, donc par intégration sur l'intervalle $[0\,;\,+\pi]$ on obtient
$\int_0^{\pi}0\,\mathrm{d}x\leqslant I_n\leqslant\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-n\pi}\,\mathrm{d}x.$

$$I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

**b.** Une primitive de $\mathrm{e}^{-nx}$ est $\dfrac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}$, donc pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{-n\pi} - \mathrm{e}^{0}\right] = -\frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{-n\pi} - 1\right] = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$.

**c.** On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-n\pi} = 1$ et enfin $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n} = 0$.

D'après le théorème des « gendarmes » la suite $(I_n)$ a pour limite 0.

**4.** **a.**
- IPP1 On pose :

$u(x) = \mathrm{e}^{-nx}$ $\quad v'(x) = \sin x$
$u'(x) = -n\,\mathrm{e}^{-nx}$ $\quad v(x) = -\cos x$

On a donc $\displaystyle I_n = \left[-\mathrm{e}^{-nx}\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} n\,\mathrm{e}^{-nx}\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-n\pi} + 1 - nJ_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n$.

- IPP2 On pose :

$u(x) = \sin x$ $\quad v'(x) = \mathrm{e}^{-nx}$
$u'(x) = \cos x$ $\quad v(x) = \dfrac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}$

On a donc $\displaystyle I_n = \left[\frac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x \frac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{n}J_n$.

**b.** En égalant les deux valeurs de $I_n$ trouvées on obtient :

$1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n = \dfrac{1}{n}J_n \iff 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} = J_n\left(n + \dfrac{1}{n}\right)$

$\iff J_n\left(\dfrac{n^2+1}{n}\right) = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} \iff J_n = \dfrac{n}{n^2+1} \times \left[1 + \mathrm{e}^{-n\pi}\right]$.

En, reportant dans l'expression $I_n = \dfrac{1}{n}J_n$, on obtient finalement :

$$I_n = \frac{1}{n} \times \frac{n}{n^2+1} \times \left[1 + \mathrm{e}^{-n\pi}\right] = \frac{1 + \mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}.$$

**5.** On souhaite obtenir le rang $n$ à partir duquel la suite $(I_n)$ devient inférieure à 0,1. Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1  from math import *
2  def seuil() :
3     n = 0
4     I = 2
5     while I >= 0.1 :
6           n=n+1
7           I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8  return n
```

## ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 2

Amérique du Nord - 22 mai 2024

$$f(x) = a\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit $x_0$ un réel strictement supérieur à 1.

**1.** On a $f(x) = 0 \iff a\ln x = 0 \iff \ln x = 0$ (car $a \neq 0$) et par croissance de la fonction exponentielle $\text{e}^{\ln x} = \text{e}^{0} \iff x = 1$.

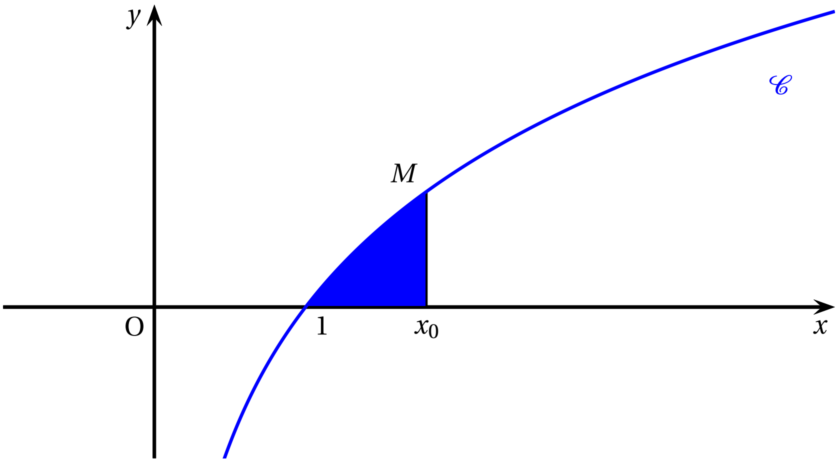
**2.** $F$ est une différence de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, donc sur cet intervalle : $F'(x) = a\left[\ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1\right] = a[\ln(x) + 1 - 1] = a\ln(x) = f(x)$, ce qui montre que $F$ est une primitive de $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

**3.** On a vu que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ donc la surface bleue correspond à des points où $x \geqslant 1$, soit $\ln(x) \geqslant 0 \Rightarrow a\ln(x) \geqslant 0$.

Autrement dit pour $x \geqslant 1$, la fonction $f$ est positive et on sait que sur un intervalle $[1\,;\,x_0]$ avec $x_0 \geqslant 1$, l'aire de la surface limitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$ est égale à l'intégrale :

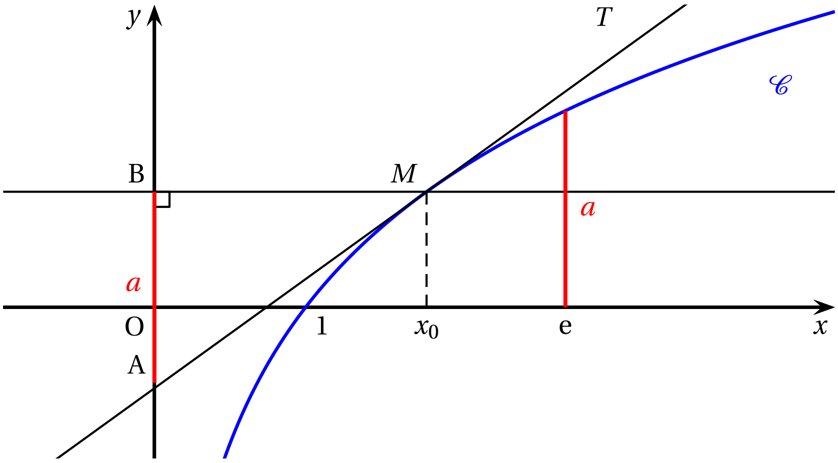
$$\int_1^{x_0} f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_1^{x_0} = F(x_0) - F(1) = a[x_0\ln(x_0) - x_0] - a[1\ln(1) - 1] = .$$

l'aire bleutée est en unités d'aire : $a[x_0\ln(x_0) - x_0] + a = a\,[x_0\ln(x_0) - x_0 + 1]$.



On note $T$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $M$ d'abscisse $x_0$.

On appelle $A$ le point d'intersection de la tangente $T$ avec l'axe des ordonnées et $B$ le projeté orthogonal de $M$ sur l'axe des ordonnées.



**4.** On sait (équation de la tangente au point d'abscisse $x_0$) que :

$M(x\,;\,y) \in T \iff y - f(x_0) = f'(x - x_0)).$

- $f(x_0) = a\ln x_0$ ;
- $f$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle $f'(x) = \dfrac{a}{x}$, donc $f'(x_0) = \dfrac{a}{x_0}$.

On obtient donc :

$M(x\,;\,y) \in T \iff y - a\ln x_0 = \dfrac{a}{x_0} \times (x - x_0) \iff y = a\ln x_0 + \dfrac{ax}{x_0} - a.$

En particulier $T$ coupe l'axe des ordonnées si $x = 0$, d'où $y = a\ln x_0 - a$ (ordonnée de A).

L'ordonnée de B est égale à $f(x_0) = a\ln(x_0)$.

On a $\text{AB} = \left|y_\text{B} - y_\text{A}\right| = |a\ln(x_0) - (a\ln x_0 - a)| = |a| = a$ (car $a > 0$).

*Remarque* : On a $f(\text{e}) = a\ln\text{e} = a \times 1 = a$.

$f(\text{e}) = a$ : on a mis en évidence ceci sur le dessin ; le corollaire est que la tangente à la courbe au point d'abscisse e contient l'origine O !

## Éléments de la correction de l'exercice 3

Centres étrangers 5 juin 2024

**1.** Soit $f(x) = k$ une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ solution de $(E_0)$.

On a donc $f' = f$ soit $0 = k$.

L'unique fonction constante solution de l'équation différentielle $(E_0)$ est donc la fonction nulle.

**2.** Les solutions de l'équation différentielle $(E_0)$ sont les fonctions de la forme $f(x) = C\text{e}^{x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

**3.** Pour tout réel $x$ on a : $h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$.

D'autre part : $h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = \cos(x) - 2\sin(x)$

d'où pour tout réel $x$, $h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$, c'est à dire, $h$ est solution de l'équation différentielle $(E)$.

**4.** Supposons que $f$ soit une solution de $(E)$.

Pour tout réel $x$ on a :

$$\begin{aligned}(f-h)'(x) = f'(x) - h'(x) &\implies (f-h)'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - (h(x) - \cos(x) - 3\sin(x))\\ &\quad\text{car } f \text{ et } h \text{ sont solutions de } (E)\\ &\implies (f-h)'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - h(x) + \cos(x) + 3\sin(x)\\ &\implies (f-h)'(x) = f(x) - h(x) = (f-h)(x)\end{aligned}$$

Donc $f - h$ est solution de $(E_0)$

Réciproquement : supposons que $f - h$ soit solution de $(E_0)$

On a donc $(f-h)'(x) = f(x) - h(x)$ soit $f'(x) - h'(x) = f(x) - h(x)$

D'où : $f'(x) = f(x) - h(x) + h'(x) = f(x) - h(x) + h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$ car $h$ est solution de $(E)$

Donc : $f'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$ c'est à dire $f$ est solution de $(E)$.

*Conclusion :* $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si $f - h$ est solution de $(E_0)$.

5. On a donc $f(x) - h(x) = C\,\mathrm{e}^{x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

   Toutes les solutions de l'équation différentielle $(E)$ sont donc les fonctions $f(x) = C\,\mathrm{e}^{x} + 2\cos(x) + \sin(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$

6. $g$ est solution de l'équation différentielle $(E)$ donc il existe un réel $C$ tel que $g(x) = C\,\mathrm{e}^{x} + 2\cos(x) + \sin(x)$.

   De plus $g(0) = 0$ donc $g(0) = C\,\mathrm{e}^{0} + 2\cos(0) + \sin(0) = 0$.

   D'où $C \times 1 + 2 \times 1 + 0 = 0 \Longleftrightarrow C = -2$

   On a donc : $g(x) = -2\,\mathrm{e}^{x} + 2\cos(x) + \sin(x)$.

7. Calculons : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\,\mathrm{e}^{x} + \sin(x) + 2\cos(x)\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x$

   $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\,\mathrm{e}^{x} + \sin(x) + 2\cos(x)\right) \mathrm{d}x = \Big[-2\,\mathrm{e}^{x} - \cos(x) + 2\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

   $I = -2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-2\,\mathrm{e}^{0} - \cos(0) + 2\sin(0)\right)$

   $I = -2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - 0 + 2 \times 1 - (-2 - 1 + 2 \times 0) = -2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 2 + 3 = -2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 5$

---

## ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 4

Asie 10 juin 2024

### Partie A

1. Par lecture graphique :

| $x$ | 0 | | 1,5 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| variations de $f$ | $-5{,}5$ | ↗ | 2,4 | ↘ | 0,35 |

2. La courbe $\mathscr{C}$ semble traverser la tangente au point A et donc admettre un point d'inflexion au point A.

3. La fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1{,}5[$ puis décroissante sur l'intervalle $]1{,}5 ; 5]$, sa dérivée est donc positive puis négative. La courbe représentant la dérivée $f'$ de $f$ est donc la courbe $\mathscr{C}_2$.

   La fonction $f$ est concave sur $[0 ; 2{,}5[$ puis convexe sur $]2{,}5 ; 5]$, sa dérivée seconde est donc négative puis positive. La courbe représentant la dérivée seconde $f''$ de $f$ est donc la courbe $\mathscr{C}_1$.

4. Si $F$ est une primitive de $f$, on aura donc $f = F'$ et $f' = F''$.

   $f$ est négative sur $[0 ; 0{,}5[$ puis positive, une primitive est donc décroissante sur $[0 ; 0{,}5[$ puis croissante : ce n'est pas le cas (c'est même exactement le contraire) de la fonction représentée par $\mathscr{C}_3$.

   $\mathscr{C}_3$ n'est donc pas la représentation graphique d'une primitive de la fonction $f$.

**Partie B**

**1.** **a.** $f$ est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 4x - 2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x+1}$.

On a donc $u'(x) = 4$ et $v'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x+1}$.

$f' = u'v + v'u$ donc, pour tout réel $x$ positif :

$f'(x) = 4 \times \mathrm{e}^{-x+1} - 1 \times \mathrm{e}^{-x+1} \times (4x-2) = (4-4x+2)\,\mathrm{e}^{-x+1} = (-4x+6)\,\mathrm{e}^{-x+1}$.

**b.** Déterminons le signe de $-4x+6$ : $\quad -4x+6 > 0 \iff 6 > 4x$

$$\iff \frac{3}{2} > x$$

les images pertinentes sont : $\quad f(0) = (4 \times 0 - 2)\,\mathrm{e}^{-0+1} = -2\,\mathrm{e}$

et $\quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(4 \times \frac{3}{2} - 2\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}+1} = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ $\quad$ (la limite en $+\infty$ est admise).

*Remarque :* On a $-2\,\mathrm{e} \approx -5{,}43$, ce qui confirme la lecture graphique de la **partie A**

et $f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2{,}43$, là aussi, conforme.

On a donc le tableau :

| $x$ | $0$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $-4x+6$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| signe de $\mathrm{e}^{-x+1}$ | | $+$ | | $+$ | |
| signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| variations de $f$ | $-2\,\mathrm{e}$ | $\nearrow$ | $4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ | $\searrow$ | $0$ |

**c.** Pour tout réel $x$ positif on a :

$f''(x) = -4 \times \mathrm{e}^{-x+1} - 1 \times \mathrm{e}^{-x+1} \times (-4x+6) = (-4+4x-6)\,\mathrm{e}^{-x+1} = (4x-10)\,\mathrm{e}^{-x+1}$

Déterminons le signe de $4x-10$ : $\quad 4x - 10 > 0 \iff 4x > 10$

$$\iff x > \frac{5}{2}$$

| $x$ | $0$ | | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $4x-10$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| signe de $\mathrm{e}^{-x+1}$ | | $+$ | | $+$ | |
| signe de $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

La fonction $f$ est donc concave sur $\left[0\,;\,\frac{5}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Le point A, d'abscisse $\frac{5}{2}$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de $f$.

**2.** **a.** Soit $F$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x+1}$ avec $a$ et $b$ deux nombres réels.

$F$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.

Pour tout réel $x$ positif on a :

$F'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x+1} - \times \mathrm{e}^{-x+1} \times (ax+b) = (a-ax-b)\,\mathrm{e}^{-x+1} = (-ax-b+a)\,\mathrm{e}^{-x+1}$

$$\begin{aligned} F \text{ est une primitive de } f &\iff F' = f \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (-ax-b+a)\,\mathrm{e}^{-x+1} = (4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (-ax-b+a) = (4x-2) \quad \text{car} \quad \mathrm{e}^{-x+1} > 0 \\ &\iff \begin{cases} -a = 4 \\ a-b = -2 \end{cases} \qquad \text{par identification des coefficients} \\ &\iff \begin{cases} a = -4 \\ b = a+2 = -4+2 = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$F(x) = (-4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

**b.** $I = \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\mathrm{d}x = \left[(-4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}\right]_{\frac{3}{2}}^{8} = (-4\times 8-2)\,\mathrm{e}^{-8+1} - \left(-4\times\frac{3}{2}-2\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}+1} =$ $-34\,\mathrm{e}^{-7} + 8\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

$I \approx 4{,}821$ soit 4,82 à $10^{-2}$ près.

**3.** **a.** La hauteur du point de départ est égale à $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 2{,}426$

soit 2,43 m au centimètre près.

**b.** L'aire, en unité d'aire, est égale à l'intégrale $I$ calculée à la question **3.**

L'unité est le mètre, une unité d'aire est donc égale à 1 $\mathrm{m}^2$.

On veut donc couvrir une surface de : $\dfrac{75}{100} \times 4{,}82\,\mathrm{m}^2$ soit environ $3{,}62\,\mathrm{m}^2$.

De plus : $\dfrac{3{,}62}{0{,}8} \approx 4{,}525$

Il faudra donc 5 bombes de peinture pour réaliser cette œuvre.

---

## ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 5

Métropole 19 juin 2024

**Partie A : étude de la fonction *f*.**

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x, \quad \text{sur } ]0\,;\,+\infty[$$

**1.** **a.**

- Limite en 0 : On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x-2 = -2$ et que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.
- Limite en plus l'infini :

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

**b.** Sur l'intervalle de définition $f$ est une somme de fonctions dérivables et sur cet intervalle :

$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{2x+1}{2x}$.

**c.** On a successivement : $0 < x \Rightarrow 0 < 2x < 2x+1$ et $2x+1 > 2x > 0 \Rightarrow \dfrac{2x+1}{2x} > 1 > 0$ : donc $f'(x) > 1 > 0$ : $f'(x) > 0$ donc $f$ est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ de moins l'infini à plus l'infini.

**d.** $f'$ est elle-même dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle, en dérivant la somme $1+\dfrac{1}{2x}$ on obtient :

$f''(x) = 0+\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{2x^2}$.

Or $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow 2x^2 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2x^2} > 0$ et enfin $f''(x) < 0$.

Conclusion : la fonction $f$ est concave sur $]0\,;\,+\infty[$

**2.** **a.** Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction $f$ est continue car dérivable sur cet intervalle et strictement croissante de moins à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in ]0\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Comme $f(1) = 1-2+0{,}5\times\ln 1 = -1$ et

$f(2) = 2-2+\dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{\ln 2}{2} > 0$, le même théorème appliqué à l'intervalle $[1\,;2]$ montre que $\alpha \in [1\,;\,2]$.

**b.** On a donc :

- $f(x) < 0$ sur $]0\,;\,\alpha[$;
- $f(x) > 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$;
- $f(\alpha) = 0$.

**c.** Le dernier résultat s'écrit :

$\alpha-2+\dfrac{1}{2}\ln\alpha = 0 \iff \dfrac{1}{2}\ln\alpha = 2-\alpha \iff \ln\alpha = 2(2-\alpha)$

**Partie B étude de la fonction *g***

Sur $]0;\,1]$, $\quad g(x) = -\dfrac{7}{8}x^2+x-\dfrac{1}{4}x^2\ln x$.

**1.** $g$ est une somme de produits de fonctions dérivable sur $]0;\,1]$, elle est donc dérivable sur cet intervalle et

$g'(x) = -2\times\dfrac{7}{8}x+1-\dfrac{1}{4}\left(2x\ln x+x^2\times\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{7}{4}x+1-\dfrac{1}{2}x\ln x-x\dfrac{1}{4} = -\dfrac{8}{4}x+1-\dfrac{1}{2}x\ln x = 1-2x-\dfrac{x\ln x}{2}$.

Puisque $x \neq 0$, on peut factoriser $x$ et $g'(x) = x\left(\dfrac{1}{x}-2-\ln x\dfrac{1}{2}\right)$.

Posons $X = \dfrac{1}{x} \iff x = \dfrac{1}{X}$ ; en remarquant que $X = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \ln X = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$, on peut écrire :

$g'(x) = \dfrac{1}{X}\left(X-2+\dfrac{1}{2}\ln X\right)$, soit $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$

**2.** **a.** On a vu dans la partie A que $0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) < 0$, soit en prenant les inverses de ces nombres positifs :

$\dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{x} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.

**b.** D'après le tableau de signes admis comme $0 < x \leqslant 1$ on en déduit par produit que :

- $g'(x) > 0$ sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\alpha}\right[$ ; $g$ est croissante sur cet intervalle

- $g'(x) < 0$ sur $\left]\dfrac{1}{\alpha}\,;\,1\right[$ ; $g$ est décroissante sur cet intervalle
- $g'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ ; $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ est un maximum de $g$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

### Partie C : un calcul d'aire

**1.** **a.** On sait que sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $\ln x \leqslant 0$ et comme $x^2 \geqslant 0$, on conclut que $-\dfrac{1}{4}x^2\ln x \geqslant 0$.

Conclusion : sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $-\dfrac{7}{8}x^2 + x \leqslant -\dfrac{7}{8}x^2 + x - \dfrac{1}{4}x^2\ln x$ ce qui signifie géométriquement que sur cet intervalle l'arc de la parabole est en dessous de la représentation graphique de $g$.

**b.** Ne connaissant pas de primitive évidente de la fonction $x \longmapsto x^2\ln x$, on effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{array}{lcl} u(x) & = & \ln x \\ v'(x) & = & x^2 \end{array} \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{lcl} u'(x) & = & \dfrac{1}{x} \\ v(x) & = & \dfrac{x^3}{3} \end{array}.$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\alpha}\,;\,1\right]$ et leurs dérivées sont continues sur ce même intervalle,

donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} =$
$\displaystyle -\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{3\alpha^3}\ln\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{9\alpha^3}\right) = -\frac{1}{9} - \frac{1}{3\alpha^3}\left(-\ln\alpha - \frac{1}{3}\right),$

soit en remplaçant $\ln\alpha$ par $2(2-\alpha)$,

$\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9} - \frac{1}{3\alpha^3}\left(-4 + 2\alpha - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9} + \frac{4}{3\alpha^3} - \frac{2}{3\alpha^2} + \frac{1}{9\alpha^3} =$
$\displaystyle\frac{-\alpha^3 + 12 - 6\alpha + 1}{9\alpha^3} = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}.$

**2.** L'aire de la partie hachurée est égale la différence des intégrales :

$\displaystyle\mathscr{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(-\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x\right)\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right)\mathrm{d}x$, soit par linéarité de l'intégrale :

$\displaystyle\mathscr{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(-\frac{1}{4}x^2\ln x\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(x^2\ln x\right)\mathrm{d}x,$

soit d'après le calcul précédent :

$\displaystyle\mathscr{A} = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3} \approx 0{,}07.$

---

## ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 6

Métropole 19 juin 2024 J1 (secours)

### Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. **a.** En posant $u(x) = x^2+1$ et avec $u'(x) = 2x$, on obtient :
   $[\ln(u)]' = \dfrac{u'}{u}$ donc $[\ln(x^2+1)]' = \dfrac{2x}{x^2+1}$, et donc :
   pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

   **b.** Pour tout réel $x$, on a $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+1 \geqslant 1$ donc $x^2+1 > 0$.
   Comme $(x-1)^2 \geqslant 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a par quotient $f'(x) \geqslant 0$ : la fonction $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout nombre réel $x > 0$n on a :
   $f(x) = x - \ln\left[x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right] = x - \ln(x^2) - \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.
3. On a :
   - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$, puis par composition
     $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln 1 = 0$.
   - $x - 2\ln(x) = x\left(1 - 2\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.
     On sait (puissances comparées) que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc
     $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x - 2\ln(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

   Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

### Partie B : étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 &=& 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) &=& u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Soit la propriété « $u_n \geqslant 0$ ».
   *Initialisation* On a $u_0 = 7 \geqslant 0$ : la propriété est vraie au rang 0 ;
   *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n \geqslant 0$ : la fonction $f$ étant croissante on a donc $u_n \geqslant 0 \Rightarrow f(u_n) \geqslant f(0)$ ; or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(0) = 0$, donc $u_{n+1} \geqslant 0$.
   *Conclusion* : la propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n+1$ : d'après le principe de récurrence $u_n \geqslant 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
2. De la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right)$ on déduit :
   $u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right)$.
   $u_n^2 \geqslant 0 \Rightarrow u_n^2+1 \geqslant 1 \Rightarrow \ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant \ln(1)0$ par croissance de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}^*$.
   $\ln(1) = 0$ donc $\ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant 0$ et donc $-\ln\left(u_n^2+1\right) \leqslant 0$.
   On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \iff u_{n+1} \leqslant u_n$ : la suite $(u_n)$ est décroissante.
3. La suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par zéro ; d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.
4. La fonction $f$ est continue car dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc la relation de récurrence donne par limite en plus l'infini :
   $\ell = \ell - \ln\left(\ell^2+1\right) \iff \ln\left(\ell^2+1\right) = 0 \iff \ell^2+1 = 1 \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0$

**5.** **a.** On complète le script ci-dessous écrit en langage Python : afin qu'il

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
  n = 0
  u = 7
  while u > h :
    n = n + 1
    u = u – ln(u**2+1)
  return n
```

**b.** La calculatrice donne $u_{96} \approx 0{,}010\,03$ et $u_{97} \approx 0{,}009\,9$

Le programme Python renverra la valeur 97 ; à partir du 98$^{\text{e}}$ les termes seront inférieurs à un centième.

### Partie C : calcul intégral

**1.** $f$ est croissante sur $[0~;~+\infty[$, donc, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0)$.
Or $f(0) = 0$ donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[0~;~+\infty[$.

**2.** Soit l'intégrale : $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$f$ étant positive sur $\mathbb{R}^+$ l'est sur l'intervalle $[2\,;4]$, donc $I$ est égale (en unités d'aire) à l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de $f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

**3.** On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2~;~4]$, on a l'encadrement : $0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25$.

Sur l'intervalle $[2\,;4]$, l'intégration conserve l'ordre donc :

$$\begin{aligned}
0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25 &\Longrightarrow \int_2^4 (0{,}5x-1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 (0{,}25x+0{,}25)\,\mathrm{d}x \\
&\Longrightarrow \left[\frac{x^2}{4} - x\right]_2^4 \leqslant I \leqslant \left[\frac{x^2}{8} + 0{,}25x\right]_2^4 \\
&\Longrightarrow 4 - 4 - (1-2) \leqslant I \leqslant 2 + 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \\
&\Longrightarrow 1 \leqslant I \leqslant 2
\end{aligned}$$

---

## ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 7

Métropole 20 juin 2024

### Partie A : étude d'un modèle discret.

**1.** Ajouter 15 g, soit 15 000 mg, de chlore, dans une piscine de 50 m$^3$, soit 50 000 L, c'est donc faire augmenter la concentration de : $\dfrac{15000}{50000} = \dfrac{15}{50} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.

**2.** *Remarque :* la relation de récurrence peut s'interpréter, en disant que sous l'action du milieu ambiant, 8 % du chlore présent dans la piscine disparaît chaque jour (et donc 92 % du chlore présent une journée est encore présent le jour suivant).

**a.** *Initialisation :* on a $v_0 = 0{,}7$
d'après la relation de récurrence : $v_1 = 0{,}92v_0 + 0{,}3 = 0{,}944$.
On a donc bien : $v_0 \leqslant v_1 \leqslant 4$.
L'inégalité souhaitée est donc vérifiée au rang 0.

*Hérédité :* soit $n$ naturel donné, tel que l'inégalité est vraie au rang $n$, c'est-à-dire que : $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.
Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4 &\Longrightarrow 0{,}92v_n \leqslant 0{,}92v_{n+1} \leqslant 0{,}92 \times 4 \qquad \text{car } 0{,}92 > 0 \\ &\Longrightarrow 0{,}92v_n + 0{,}3 \leqslant 0{,}92v_{n+1} + 0{,}3 \leqslant 3{,}68 + 0{,}3 \\ &\Longrightarrow v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 3{,}98 \\ &\Longrightarrow v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 4 \end{aligned}$$

La véracité de l'inégalité est donc héréditaire.
*Conclusion :* L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il l'est encore au rang $n+1$, donc en vertu du principe de récurrence, pour tout entier $n$ naturel, on a : $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

**b.** De la question précédente, on retient :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_{n+1}$ donc la suite $(v_n)$ est croissante ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant 4$ donc la suite $(v_n)$ est majorée par 4.

D'après le théorème de croissance monotone la suite $(v_n)$ est donc convergente, vers une limite $\ell$ inférieure ou égale à 4.
De plus, la suite $(v_n)$ est définie par récurrence, et la fonction de récurrence : $x \longmapsto 0{,}92x + 0{,}3$ est continue sur $\mathbb{R}$, puisque c'est une fonction affine, donc la suite ne peut converger que vers un point fixe de la fonction de récurrence
$\ell$ est donc une solution de l'équation :

$$\begin{aligned} x = 0{,}92x + 0{,}3 &\iff 0{,}08x = 0{,}3 \\ &\iff x = \frac{0{,}3}{0{,}08} \\ &\iff x = 3{,}75 \end{aligned}$$

L'équation n'a qu'une solution, donc la suite $(v_n)$ converge vers 3,75.

**3.** À long terme, le taux de chlore ne sera pas conforme à la préconisation des piscinistes, car si la limite est 3,75 alors tout intervalle ouvert contenant 3,75 contiendra tous les termes à partir d'un certain rang. Notamment l'intervalle $]3 ; 5[$.

Il existe donc un rang à partir duquel les termes de la suite seront dans l'intervalle $]3 ; 5[$, et donc la concentration en chlore dépassera strictement la limite supérieure de $3\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$ recommandée par les piscinistes.

**4.** C'est un algorithme de seuil classique, on va calculer les termes de la suite, les uns après les autres. Pour s'arrêter dès qu'un terme est strictement supérieur au seuil $s$, il faut continuer tant que (while) les termes ne sont pas strictement supérieurs, donc tant que les termes sont inférieurs ou égaux au seuil $s$.

Le programme complété est donc :

```
def alerte_chlore(s) :
    n = 0
    u = 0.7
    while u <= s :
        n = n + 1
        u = 0.92*u + 0.3
    return n
```

**5.** En saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)`, le programme renvoie 17 (en effet, $v_{16} \approx 2{,}95 \leqslant 3$ et $v_{17} \approx 3{,}01 > 3$).
Dans le contexte de l'exercice, cela veut dire que si Alain applique cette méthode, 17 jours après le 19 juin, le taux de chlore dans sa piscine serait trop élevé, par rapport aux recommandations des piscinistes.

**Partie B : étude d'un modèle continu.**

**1.** Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$, où $a$ et $b$ sont des réels ($a$ non nul), ont pour solutions les équations de la forme $x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où $C$ est une constante réelle.
Ici, avec $a = -0{,}08$ et $b = \dfrac{q}{50}$, cela conduit à :

$$x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-0{,}08x} - \dfrac{\dfrac{q}{50}}{-0{,}08} = C\,\mathrm{e}^{-0{,}08x} + \dfrac{q}{50 \times 0{,}08}.$$

On arrive donc bien à une solution $f$ de la forme $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}08x} + \dfrac{q}{4}$ où $C$ est une constante réelle.

**2.** **a.** Puisque $-0{,}08 < 0$, on a : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} -0{,}08x = -\infty$
donc, par composition : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}08x} = \lim_{y \to -\infty} \mathrm{e}^{y} = 0$
puis, par limite du produit : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} C\,\mathrm{e}^{-0{,}08x} = 0$
enfin, par limite de la somme : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{q}{4}$.

**b.** Si on veut que le taux de chlore se stabilise autour de $2\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$, il faut que la limite de la fonction $f$ soit 2, donc on veut :
$\dfrac{q}{4} = 2 \iff q = 8.$
Pour cet objectif à long terme, Alain devra donc ajouter 8 grammes de chlore par jour dans sa piscine.
À l'instant $t = 0$, on avait donc un taux de $0{,}7\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$, donc $f(0) = 0{,}7$.

$$\begin{aligned} f(0) = 0{,}7 &\iff C\,\mathrm{e}^{-0{,}08\times 0} + \dfrac{8}{4} = 0{,}7 \\ &\iff C + 2 = 0{,}7 \\ &\iff C = -1{,}3 \end{aligned}$$

La fonction $f$ donnant l'évolution du taux de chlore dans la piscine d'Alain est donc : $f : x \longmapsto -1{,}3\,\mathrm{e}^{-0{,}08x} + 2$.

---

## ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 8

Polynésie 19 juin 2024

Soit $(E)$ l'équation différentielle : $y' + 0{,}02y = m$.

**Partie A**

1. On sait que l'équation différentielle $y' + 0{,}02y = 0$ a pour solutions les fonctions $t \longmapsto y = k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

   D'autre part une fonction constante $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ est solution de $(E)$ (avec donc $y' = 0$) si $0 + 0{,}02\alpha = m \iff 0{,}02\alpha = m \iff \alpha = \dfrac{m}{0{,}02} = 50m$.

   Conclusion : toutes les solutions de $(E)$ sont les fonctions définies par

   $$t \longmapsto y = k\,\mathrm{e}^{0{,}02t} + 50m, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

2. On sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}02t} = 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 50m = 50m$.

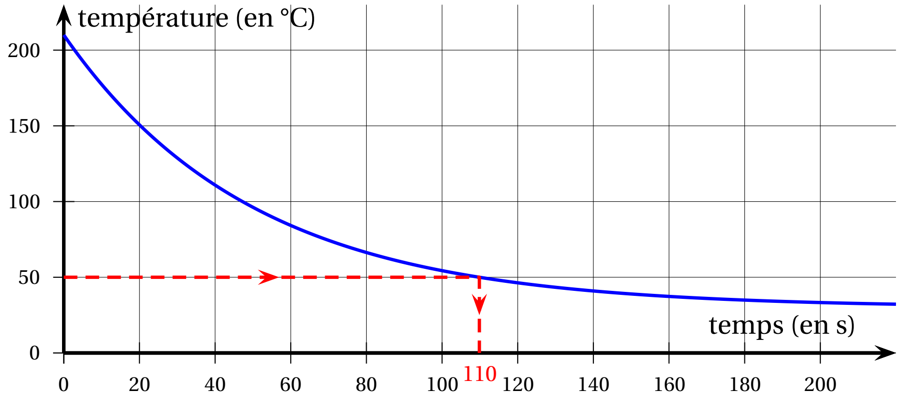
   Or on a $\lim\limits_{t \to +\infty} k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 50m = 30$, donc $m = \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$.
3. Avec $50m = 50 \times 0{,}6 = 5 \times 6 = 30$, les solutions de $(E)$ sont les fonctions $f$ définies par : $t \longmapsto f(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30$

   On a $f(0) = 210 \iff k \times 1 + 30 = 210 \iff k = 180$.

   Finalement : $f(t) = 180\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30$.

**Partie B**

Soit $f$ la fonction définie par $f(t) = 180\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30$.



1. **a.** On lit sur le graphique $T \approx 110$ (s).

   **b.** $f(T) = 50 \iff 180\,\mathrm{e}^{-0{,}02T} + 30 = 50 \iff 180\,\mathrm{e}^{-0{,}02T} = 20$

   $\iff 20 \times 9\,\mathrm{e}^{-0{,}02T} = 20 \times 1 \iff 9\,\mathrm{e}^{-0{,}02T} = 1 \iff \mathrm{e}^{-0{,}02T} = \dfrac{1}{9}$

   $\iff -0{,}02T = \ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$ par croissance de la fonction logarithme népérien) $\iff -0{,}02T = -\ln 9 \iff 0{,}02T = \ln 9$

   $\iff T = \dfrac{\ln 9}{0{,}02}$

   Donc $T = \dfrac{\ln 9}{0{,}02} = 50\ln 9 \approx 109{,}86$.

**2.** La valeur moyenne $\overline{t}$ de la température sur les 100 premières secondes est :

$$\overline{t}=\frac{1}{100}\int_0^{100}\left(180\,\text{e}^{-0,02t}+30\right)\text{d}t=\frac{1}{100}\left[-\frac{180}{0,02}\,\text{e}^{-0,02t}+30t\right]_0^{100}$$

$$=\frac{1}{100}\left[-9000\,\text{e}^{-0,02t}+30t\right]_0^{100}=\frac{1}{100}\left[-9000\,\text{e}^{-2}+9000+3\,000\right]$$

$$=\frac{1}{100}\left[9000\left(1-\text{e}^{-2}\right)+3\,000\right]=90\left(1-\text{e}^{-2}\right)+30\approx 107{,}82$$

soit environ 107,8 (°C).

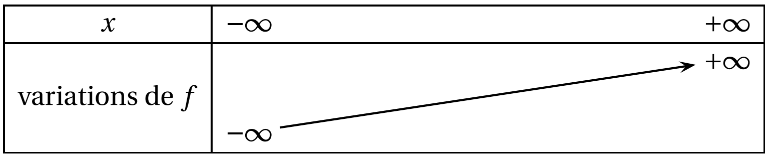
---

## ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 9

Polynésie 5 septembre 2024

**1.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\text{e}^{x}+x$.

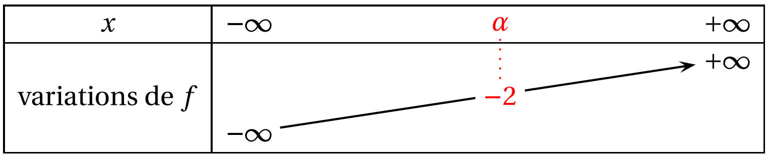
**Affirmation A** : La fonction $f$ admet pour tableau de variations le tableau ci- dessous :



- $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{e}^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{e}^{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
- $f'(x)=\text{e}^{x}+1>0$ sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Affirmation A vraie**

**Affirmation B** : L'équation $f(x)=-2$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.



La fonction $f$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et va de $-\infty$ à $+\infty$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=-2$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

**Affirmation B fausse**

**2.** **Affirmation C** : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)-x^2+2}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$.

Pour $x\neq 0$, on a : $\dfrac{\ln(x)-x^2+2}{3x^2}=\dfrac{x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}\right)}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}\right)$

- $\dfrac{\ln(x)}{x^2}=\dfrac{\ln(x)}{x}\times\dfrac{1}{x}$

  On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ ; donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$.
- On sait aussi que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}\right)=1$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)-x^2+2}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$.

**Affirmation C vraie**

3. On considère la fonction $k$ définie et continue sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=1+2\,\mathrm{e}^{-x^2+1}$.

   **Affirmation D** : Il existe une primitive de la fonction $k$ décroissante sur $\mathbb{R}$.

   Toute primitive $K$ de la fonction $k$ a pour dérivée $k$. Or, pour tout réel $X$, on a $\mathrm{e}^{X}>0$. Donc pour tout réel $x$, on a $\mathrm{e}^{-x^2+1}>0$, donc $1+2\,\mathrm{e}^{-x^2+1}>0$, et donc $k(x)>0$.

   La primitive $K$ a donc une dérivée toujours strictement positive, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   **Affirmation D fausse**

4. On considère l'équation différentielle $(E)$ : $3y'+y=1$.

   **Affirmation E** : La fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}+1$ est solution de l'équation différentielle $(E)$ avec $g(0)=5$.

   - $g(x)=4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}+1$ donc $g(0)=4\,\mathrm{e}^{0}+1=4+1=5$
   - $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=4\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}=-\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$.

     Donc $3g'(x)+g(x)=3\times\left(-\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\right)+\left(4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}+1\right)=-4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}+4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}+1=1$

     Donc la fonction $g$ est solution de l'équation différentielle $(E)$.

   **Affirmation E vraie**

5. **Affirmation F** : Une intégration par parties permet d'obtenir : $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1-2\,\mathrm{e}^{-1}$.

   En prenant : $\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & x \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{-x}\end{array}\right.$, on a : $\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 1 \\ v(x) & = & -\mathrm{e}^{-x}\end{array}\right.$

   Cela donne par intégration par parties :

   $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\left[-x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1-\int_0^1-\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\left[-x\,\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1=-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1}+1=1-2\,\mathrm{e}^{-1}$.

   **Affirmation F vraie**

---

# ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 10

Métropole Antilles-Guyane 11 septembre 2024

### Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).

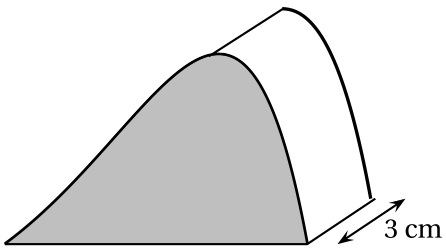


**Figure 1**

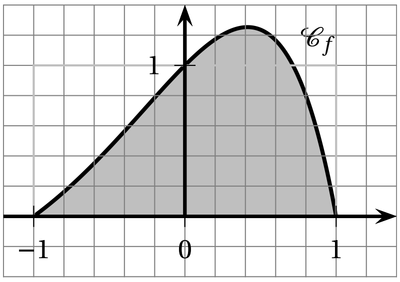


**Figure 2**

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f$ définie sur $[-1\,;\,1]$ par : $f(x) = \left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{x}$.

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. **a.** Pour tout réel $x$, on a $\mathrm{e}^{x} > 0$, et si $x \in [-1\,;\,1]$, on a $1-x^2 \geqslant 0$.
   Donc pour tout $x$ de $[-1\,;\,1]$, on a $f(x) \geqslant 0$.

   **b.** Soit $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   On pose $u(x) = 1-x^2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{x}$. Donc $u'(x) = -2x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x}$.
   Par intégration par parties : $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.
   Donc $I = \left[(1-x^2)\,\mathrm{e}^{x}\right]_{-1}^{1} - \displaystyle\int_{-1}^{1}(-2x)\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 0 + 2\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

2. Le volume $\mathcal{V}$ de chocolat, en cm³, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par : $\mathcal{V} = 3 \times S$ où $S$ est l'aire, en cm², de la surface colorée (**Figure 2**).
   On calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$ par une intégration par parties.
   On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{x}$. Donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x}$.
   $$\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \left[x\,\mathrm{e}^{x}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 1 \times \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \left[x\,\mathrm{e}^{x}\right]_{-1}^{1} - \left[\mathrm{e}^{x}\right]_{-1}^{1} = \left[1\,\mathrm{e}^{1} - (-1)\,\mathrm{e}^{-1}\right] - \left[\mathrm{e}^{1} - \mathrm{e}^{-1}\right]$$
   $$= \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} = 2\,\mathrm{e}^{-1}$$
   Donc $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 4\,\mathrm{e}^{-1}$.
   $\mathcal{V} = 3 \times S = 12\,\mathrm{e}^{-1}$ donc $\mathcal{V} \approx 4{,}4$ cm$^3$.

### Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction $B$ définie sur l'intervalle $[0{,}01\,;\,+\infty[$ par : $B(q) = 8q^2[2-3\ln q]-3$.

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité $q$ en centaines de bonbons.

On admet que la fonction $B$ est dérivable sur $[0{,}01\,;\,+\infty[$. On note $B'$ sa fonction dérivée.

1. **a.**
   - $\lim\limits_{q \to +\infty} \ln q = +\infty$ donc $\lim\limits_{q \to +\infty} 2 - 3\ln q = -\infty$
   - $\lim\limits_{q \to +\infty} q^2 = +\infty$
   - Donc $\lim\limits_{q \to +\infty} 8q^2[2-3\ln(q)] = -\infty$ et donc $\lim\limits_{q \to +\infty} 8q^2[2-3\ln(q)] - 3 = -\infty$

   On a donc démontré que $\lim\limits_{q \to +\infty} B(q) = -\infty$.

   **b.** Pour tout $q \geqslant 0{,}01$ : $B'(q) = 8 \times 2q\left(2 - 3\ln q\right) + 8q^2\left(0 - \dfrac{3}{q}\right) - 0$

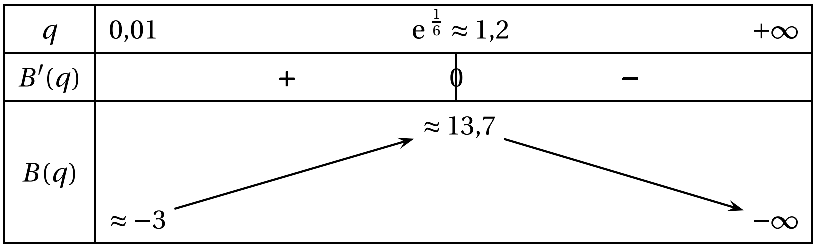
   $$= 8q\left(4 - 6\ln q\right) + 8q\,(-3) = 8q\left(1 - 6\ln q\right)$$

   **c.** $q > 0$ donc $B'(q)$ est du signe de $1 - 6\ln q$.

   $1 - 6\ln q > 0 \iff 1 > 6\ln q \iff \dfrac{1}{6} > \ln q \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{6}} > q$

   $\mathrm{e}^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}2$ : $B\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}\right) \approx 13{,}7$; $B(0{,}01) \approx -3$

   On dresse le tableau de variation complet de la fonction $B$.



   **d.** Le maximum de la fonction $B$ est $B\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}\right) \approx 13{,}7$, donc le bénéfice maximum que peut espérer l'artisan est de 137 €.

2. **a.** Sur l'intervalle $[1{,}2\ ;\ +\infty[$ :
   - La fonction $B$ est dérivable, donc continue, et strictement décroissante.
   - Elle décroît de 13,7 à $-\infty$.

   Donc, d'après le corollaire des valeurs intermédiaires, l'équation $B(q) = 10$ admet une solution unique sur l'intervalle $[1{,}2\ ;\ +\infty[$. On l'appelle $\beta$.

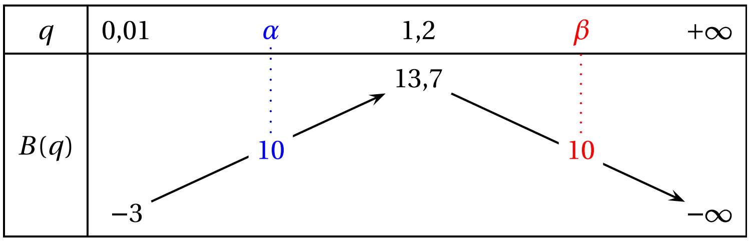
   $\left.\begin{array}{l} B(1) = 13 > 10 \\ B(2 \approx -5{,}5 < 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta \in [1\ ;\ 2]$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} B(1{,}5) \approx 11{,}1 > 10 \\ B(1{,}6 \approx 9{,}1 < 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta \in [1{,}5\ ;\ 1{,}6]$

   $\left.\begin{array}{l} B(1{,}55) \approx 10{,}17 > 10 \\ B(1{,}56 \approx 9{,}97 < 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta \in [1{,}55\ ;\ 1{,}56]$

   $\left.\begin{array}{l} B(1{,}558) \approx 10{,}007 > 10 \\ B(1{,}559 \approx 9{,}986 < 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta \in [1{,}558\ ;\ 1{,}559]$

   Donc $\beta$ a pour valeur approchée 1,558 à $10^{-3}$ près.

   **b.** On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[0{,}01\ ;\ 1{,}2[$. On donne $\alpha \approx 0{,}757$, et on complète le tableau de variation de $B$.



   Pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros, le nombre minimal de bonbons au chocolat à vendre correspond à $\alpha$ centaines, soit environ 76, et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre correspond à $\beta$ centaines, soit environ 156.

## ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 11

Amérique du Sud 21 novembre 2024

### PARTIE A

On considère l'équation différentielle $(E)$ : $\quad y' + \dfrac{1}{4}y = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$,
d'inconnue $y$, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

**1.** Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ax\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

La fonction linéaire $u$ définie par $u(x) = -\dfrac{1}{4}x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $u'(x) = -\dfrac{1}{4}$.

La fonction composée $g(u(x)) = ax\,\mathrm{e}^{u(x)}$ est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle, $g'(u) = a\,\mathrm{e}^{u(x)} + axu' \times \mathrm{e}^{u(x)} = a\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + ax \times \left(-\dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\left(a - \dfrac{ax}{4}\right)$.

Or $g'(x) + \dfrac{1}{4}g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\left(a - \dfrac{ax}{4}\right) + \dfrac{1}{4} \times ax\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\left(a - \dfrac{ax}{4} + \dfrac{ax}{4}\right) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

Donc $g$ est solution de l'équation différentielle sur $[0\,;\,+\infty[$, si sur cet intervalle :
$a\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \iff a = 20$, car quel que soit $x$ réel, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \neq 0$.

La fonction $g : x \longmapsto 20x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ est une solution particulière de l'équation $(E)$.

**2.** On considère l'équation différentielle $(E')$ : $\quad y' + \dfrac{1}{4}y = 0$,
d'inconnue $y$, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

L'équation $(E')$ peut s'écrire $y' = -\dfrac{1}{4}y$ et on sait que les solutions de cette équation $(E')$ sont les fonctions $f$ définies par :
$f(x) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

**3.** Les solutions $f$ de l'équation $(E)$ sont telles que pour $x \in [0\,;\,+\infty[$,
$f'(x) + \dfrac{1}{4}f(x) = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ ou d'après la question 1. :
$f'(x) + \dfrac{1}{4}f(x) = g'(x) + \dfrac{1}{4}g(x) \iff f'(x) - g'(x) = \dfrac{1}{4}[f(x) - g(x)]$ soit par linéarité de la dérivation :
$(f-g)'(x) + \dfrac{1}{4}[(f-g](x) = 0$ : ceci signifie que la fonction $f - g$ est solution de $(E')$ c'est-à)dire que
$f(x) - g(x) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \iff f(x) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + g(x)$ ou enfin $f(x) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + 20x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \iff$
$f(x) = (20x + K)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Les solutions de $(E)$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ sont donc les fonctions $f$ définies par :
$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}(20x + K)$, avec $K \in \mathbb{R}$.

**4.** On a $f(0) = 8 \iff (20 \times 0 + K)\,\mathrm{e}^{0} = 8 \iff K = 8$, donc :
$f(x) = (20x + 8)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = 4(5x + 2)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

### PARTIE B

On considère la fonction $f$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (20x + 8)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

**1.** **a.** La fonction $f$ est la fonction trouvée à la fin de la partie A : elle est donc dérivable et vérifie l'équation $(E)$, soit

$f'(x)+\frac{1}{4}f(x)=20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ donc

$f'(x)=20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}-\frac{1}{4}\times 4(5x+2)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}(20-5x-2)=(18-5x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

**b.** Comme quel que soit $x$, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $18-5x$ :

- $18-5x>0 \iff \frac{18}{5}>x$ : sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{18}{5}\right]$, $f'(x)>0$ : la fonction $f$ est croissante;
- $18-5x<0 \iff \frac{18}{5}<x$ : sur l'intervalle $\left[\frac{18}{5}\,;\,+\infty\right]$, $f'(x)<0$ : la fonction $f$ est décroissante;

$f'\left(\frac{18}{5}\right)=0$, donc $f\left(\frac{18}{5}\right)$ est le maximum de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

On a $f\left(\frac{18}{5}\right)=(72+8)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times\frac{18}{5}}=80\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{10}}\approx 32{,}53$.

On a vu à la partie A que $f(0)=8$, et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

D'où le tableau de variations :

| $x$ | $0$ | | $\frac{18}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $8$ | ↗ | $80\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{10}}$ | ↘ | $0$ |

**2.** Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x)=8$.

**a.** On a $f(14)=288\,\mathrm{e}^{-3{,}5}\approx 8{,}7$ et $f(15)=300\,\mathrm{e}^{-3.75}\approx 7{,}2$.

Sur l'intervalle $[14\,;\,15]$, la fonction $f$ est continue car dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, donc sur $[14\,;15]$ et elle est strictement décroissante; comme $8\in[f(15)\,;\,f(14)]$, il existe d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires un réel unique $\alpha$ telle que $f(\alpha)=8$.

**b.** On complète le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction `solution_equation` écrite en langage Python

| $a$ | 14 | 14 | 14,25 | 14,375 | 14,4375 |
|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 15 | 14,5 | 14,5 | 14,5 | 14,5 |
| $b-a$ | 1 | 0,5 | 0,25 | 0,125 | 0,0625 |
| $m$ | 14,5 | 14,25 | 14,375 | 14,4375 | |
| Condition $f(m)>8$ | FAUX | VRAI | VRAI | VRAI | |

**c.** L'objectif de la fonction `solution_equation` est de déterminer, par dichotomie, un encadrement d'amplitude 0,1 de la solution de l'équation $f(x)=8$ dans l'intervalle $[14\,;15]$.