

ANNALES DU BAC MATHÉMATIQUES 2024

Géométrie dans l'espace

Exercices extraits du site de l'APMEP

PAR VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

SUJETS ET CORRIGÉS
47 PAGES

LYCÉE INTERNATIONAL FRANÇAIS SAINT EXUPÉRY
RÉP. DU CONGO

SOMMAIRE

• Exercice 1 (Amérique du Nord 21 mai 2024)	page 3
Solution de l'exercice 1	page 18
• Exercice 2 (Amérique du Nord 22 mai 2024)	page 4
Solution de l'exercice 2	page 19
• Exercice 3 (Centres étrangers 5 juin 2024)	page 4
Solution de l'exercice 3	page 20
• Exercice 4 (Centres étrangers 6 juin 2024)	page 5
Solution de l'exercice 4	page 22
• Exercice 5 (Asie 10 juin 2024)	page 6
Solution de l'exercice 5	page 24
• Exercice 6 (Asie 11 juin 2024)	page 7
Solution de l'exercice 6	page 26
• Exercice 7 (Métropole 19 juin 2024)	page 8
Solution de l'exercice 7	page 29
• Exercice 8 (Métropole 19 juin 2024 J1 (secours))	page 9
Solution de l'exercice 8	page 31
• Exercice 9 (Métropole 20 juin 2024)	page 10
Solution de l'exercice 9	page 33
• Exercice 10 (Métropole 20 juin 2024 J2 (dévoilé))	page 11
Solution de l'exercice 10	page 35
• Exercice 11 (Polynésie 19 juin 2024)	page 12
Solution de l'exercice 11	page 36
• Exercice 12 (Polynésie 21 juin 2024)	page 13
Solution de l'exercice 12	page 38
• Exercice 13 (Polynésie 5 septembre 2024)	page 14
Solution de l'exercice 13	page 39
• Exercice 14 (Métropole Antilles-Guyane 11 septembre 2024)	page 15
Solution de l'exercice 14	page 41
• Exercice 15 (Amérique du Sud 21 novembre 2024)	page 16
Solution de l'exercice 15	page 44
• Exercice 16 (Amérique du Sud 22 novembre 2024)	page 17
Solution de l'exercice 16	page 46

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Les quatre questions sont indépendantes.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les points A(1 ; 0 ; 3) et B(4 ; 1 ; 0).

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

a. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 \\ z = -3 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

b. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

c. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

d. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 \\ z = 3 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On considère la droite (d) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 6t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

2. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite (d) ?

a. M(7 ; 6 ; 6)

b. N(3 ; 6 ; 4)

c. P(4 ; 6 ; -2)

d. R(-3 ; -9 ; 7)

3. On considère la droite (d') de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = -1 - 2k \\ z = 1 + k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Les droites (d) et (d') sont :

a. sécantes

b. non coplanaires

c. parallèles

d. confondues

4. On considère le plan (P) passant par le point I(2 ; 1 ; 0) et perpendiculaire à la droite (d).

Une équation du plan (P) est :

a. $2x + 3y - z - 7 = 0$

b. $-x + y - 4z + 1 = 0$

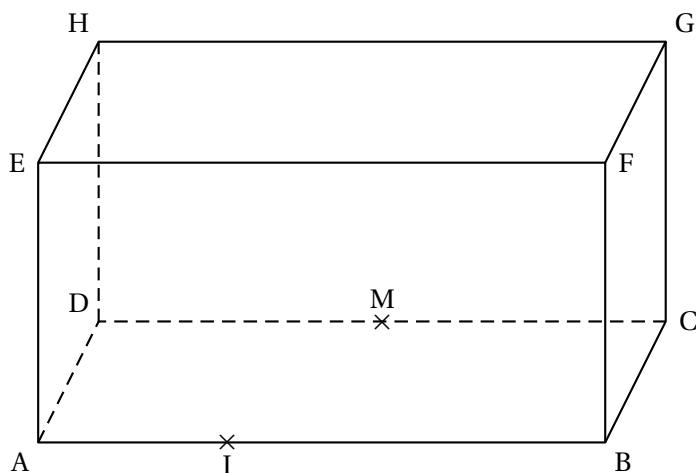
c. $4x + 6y - 2z + 9 = 0$

d. $2x + y + 1 = 0$

EXERCICE 2

Thèmes : Amérique du Nord - 22 mai 2024

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que $AB = 3$ et $AD = AE = 1$ représenté ci-dessous.



On considère le point I du segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment $[CD]$.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est :

$$2x + 6y + 3z - 9 = 0.$$

c. Le plan $\mathcal{P}$ dont une équation cartésienne est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF)? Justifier la réponse.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).

4. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).

Déterminer les coordonnées du point N.

5. Le point R de coordonnées $\left(3; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF)? Justifier la réponse.

EXERCICE 3

Thèmes : Centres étrangers 5 juin 2024

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(-2; 0; 2)$, $B(-1; 3; 0)$, $C(1; -1; 2)$ et $D(0; 0; 3)$.
- la droite $\mathcal{D}_1$ dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$
- la droite $\mathcal{D}_2$ dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = -1 - 5s \\ z = 2 - 6s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

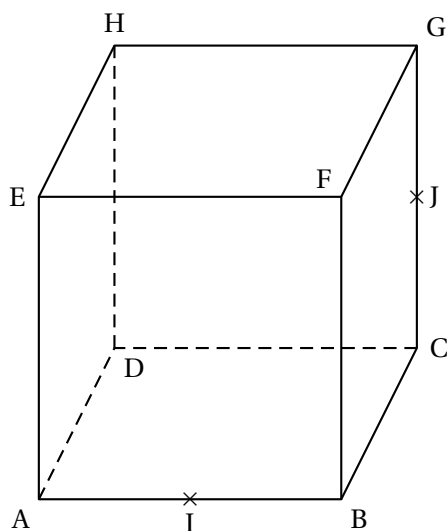
1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2.
 - a. Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).
 - b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
$$x + 3y + 5z - 8 = 0.$$
 - c. En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
3.
 - a. Justifier que la droite $\mathcal{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.
On admet que la droite $\mathcal{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de C.
 - b. Démontrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
4.
 - a. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).
 - b. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
Arrondir le résultat au centième.

EXERCICE 4

Thèmes : Centres étrangers 6 juin 2024

Le cube ABCDEFGH a pour arête 1 cm.

Le point I est le milieu du segment [AB] et le point J est le milieu du segment [CG].



On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

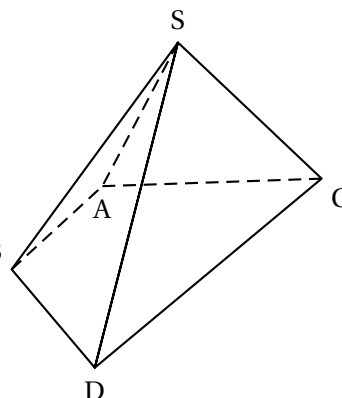
1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est normal au plan (FHI).
3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (FHI) est $-2x - 2y + z + 1 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EJ).
5.
 - a. On note K le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI). Calculer ses coordonnées.
 - b. Montrer que le volume de la pyramide EFHI est $\frac{1}{6} \text{ cm}^3$.
On pourra utiliser le point L, milieu du segment [EF]. On admet que ce point est le projeté orthogonal du point I sur le plan (EFH).
 - c. Dédurre des deux questions précédentes l'aire du triangle FHI.

EXERCICE 5

Thèmes : Asie 10 juin 2024

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points : $A(3; -1; 1)$; $B(4; -1; 0)$; $C(0; 3; 2)$; $D(4; 3; -2)$ et $S(2; 1; 4)$.

Dans cet exercice on souhaite montrer que SABDC est une pyramide à base ABDC trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.



1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2.
 - a. Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
 - b. Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].
On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.
3.
 - a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
 - c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).
 - d. On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
 Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$, puis montrer que SI = 2 cm.
4.
 - a. Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées H(3 ; 3 ; -1) et montrer que HB = $3\sqrt{2}$ cm.
 - b. Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.
 On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule

$$\mathcal{A} = \frac{b + B}{2} \times h$$

où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.

5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.
 On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

EXERCICE 6

Thèmes : Asie 11 juin 2024

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation :

$$(P) : 2x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

On considère les trois points A, B et C de coordonnées :

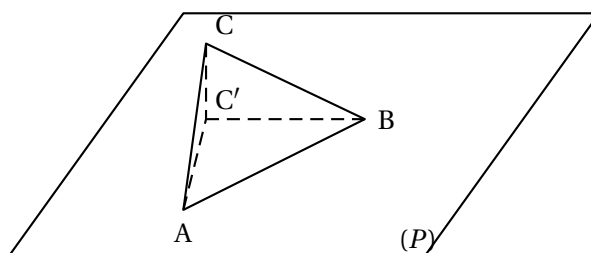
$$A(1; 0; 1), B(2; -1; 1) \text{ et } C(-4; -6; 5).$$

Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan (P).
2. Montrer que le point C'(0 ; -2 ; -1) est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions

$$\begin{cases} H \in (AB) \\ (AB) \text{ et } (HC) \text{ sont orthogonales.} \end{cases}$$
 Déterminer les coordonnées du point H.



Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HC}$ sont : $\overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\|\overrightarrow{HC}\|$.
2. Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S.

Partie C

On admet que $HC' = \sqrt{\frac{17}{2}}$.

1. Soit $\alpha = \widehat{CHC'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.
2.
 - a. Montrer que les droites (C'H) et (AB) sont perpendiculaires.
 - b. Calculer S' l'aire du triangle ABC', on donnera la valeur exacte.
 - c. Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.

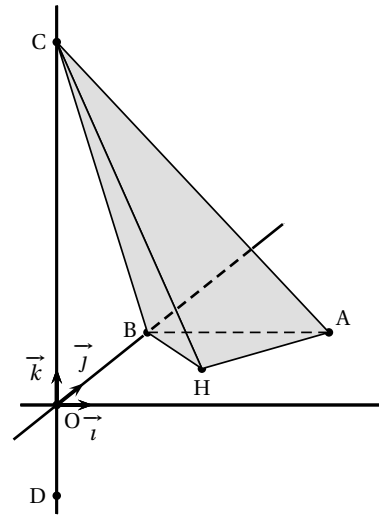
EXERCICE 7

Thèmes : Métropole 19 juin 2024

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(5; 5; 0)$, $B(0; 5; 0)$, $C(0; 0; 10)$ et $D(0; 0; -\frac{5}{2})$.

1. a. Montrer que $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).
b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x - y = 0$.



2. On considère la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$
 - a. On admet que la droite $\mathcal{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0)$.
 - b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).
3. a. Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.
b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.
4. a. Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C.
b. En déduire le volume du tétraèdre ABCH.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).

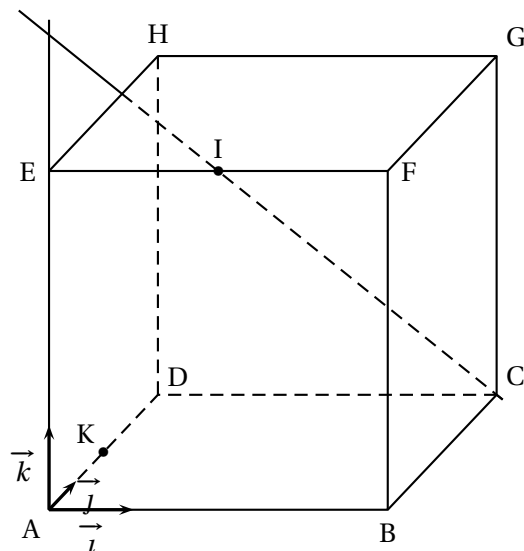
EXERCICE 8

Thèmes : Métropole 19 juin 2024 J1 (secours)

On considère un repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace dans lequel on place les points

$$B(4; 0; 0), \quad D(0; 4; 0), \quad E(0; 0; 4)$$

et les points C, F, G et H de sorte que le solide ABCDEFGH soit un cube.



1. Donner les coordonnées des points C, F, G et H.
2. On considère le point I milieu de l'arête [EF].
Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est donnée par :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de $\mathcal{P}$ avec (IC).

- a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donnée par :

$$x + 2y - 2z - 4 = 0.$$

- b. Justifier que J a pour coordonnées $\left(\frac{28}{9}; \frac{20}{9}; \frac{16}{9}\right)$.

Que représente J par rapport à C?

- c. Vérifier que le point K(0; 2; 0) appartient au plan $\mathcal{P}$.
- d. Justifier que (BK) est l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (ABC).

4. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{B \times h}{3}$, où B est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.

- a. Déterminer le volume de la pyramide CBKG.
- b. En déduire que l'aire du triangle BKG est égale à 12.
- c. Justifier que la droite (BG) est incluse dans $\mathcal{P}$.
- d. On note I' un point de l'arête [EF], et P' le plan orthogonal à la droite (I' C) passant par G.
Peut-on affirmer que la droite (BG) est incluse dans P'?

EXERCICE 9

Thèmes : Métropole 20 juin 2024

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$$A(2; 0; 0), \quad B(0; 4; 3), \quad C(4; 4; 1), \quad D(0; 0; 4) \quad \text{et} \quad H(-1; 1; 2).$$

Affirmation 1 : les points A, C et D définissent un plan $\mathcal{P}$ d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$.

Affirmation 2 : les points A, B, C et D sont coplanaires.

Affirmation 3 : les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x - y + 2z - 2 = 0$.

Affirmation 4 : le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

EXERCICE 10

Thèmes : Métropole 20 juin 2024 J2 (dévoilé)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(0; 4; -1), \quad B(6; 1; 5) \quad \text{et} \quad C(6; -2; -1).$$

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 1 : Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 3 : Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point C et orthogonal à la droite (AB) est

$$2x + 2y - z - 9 = 0.$$

On considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ dont on donne ci-dessous une représentation paramétrique :

$$\mathcal{D} \quad \begin{cases} x = 3+t \\ y = 1+t \\ z = 2+t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}; \quad \mathcal{D}' \quad \begin{cases} x = 2t' \\ y = 4-t' \\ z = -1+2t' \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

EXERCICE 11

Thèmes : Polynésie 19 juin 2024

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

Les quatre affirmations se placent dans la situation suivante :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(2; 1; -1), \quad B(-1; 2; 1) \text{ et } C(5; 0; -3).$$

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x + 5y - 2z + 3 = 0.$$

On note $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t + 3 \\ y = t + 2 \\ z = 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 1 :

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAC).

Affirmation 2 :

Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont sécantes au point C.

Affirmation 3 :

La droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

Affirmation 4 :

Le plan médiateur du segment [BC], noté Q , a pour équation cartésienne :

$$3x - y - 2z - 7 = 0.$$

On rappelle que le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

EXERCICE 12

Thèmes : Polynésie 21 juin 2024

Une commune décide de remplacer le traditionnel feu d'artifice du 14 juillet par un spectacle de drones lumineux.

Pour le pilotage des drones, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont l'unité est la centaine de mètres.

La position de chaque drone est modélisée par un point et chaque drone est envoyé d'un point de départ D de coordonnées $(2; 5; 1)$.

On souhaite former avec des drones des figures en les positionnant dans un même plan $\mathcal{P}$.

Trois drones sont positionnés aux points A $(-1; -1; 17)$, B $(4; -2; 4)$ et C $(1; -3; 7)$.

1. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Dans la suite, on note $\mathcal{P}$ le plan (ABC) et on considère le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. a. Justifier que $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).
b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $2x - 3y + z - 18 = 0$.
3. Le pilote des drones décide d'envoyer un quatrième drone en prenant comme trajectoire la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par

$$d : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t + 5 \\ z = 4t + 1 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

- a. Déterminer un vecteur directeur de la droite d .
b. Afin que ce nouveau drone soit également placé dans le plan $\mathcal{P}$, déterminer par le calcul les coordonnées du point E, intersection de la droite d avec le plan $\mathcal{P}$.
4. Le pilote des drones décide d'envoyer un cinquième drone le long de la droite Δ qui passe par le point D et qui est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$. Ce cinquième drone est placé lui aussi dans le plan $\mathcal{P}$, soit à l'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathcal{P}$. On admet que le point F $(6; -1; 3)$ correspond à cet emplacement.
Démontrer que la distance entre le point de départ D et le plan $\mathcal{P}$ vaut $2\sqrt{14}$ centaines de mètres.

5. L'organisatrice du spectacle demande au pilote d'envoyer un nouveau drone dans le plan (peu importe sa position dans le plan), toujours à partir du point D. Sachant qu'il reste 40 secondes avant le début du spectacle et que le drone vole en trajectoire rectiligne à $18,6 \text{ m.s}^{-1}$, le nouveau drone peut-il arriver à temps?

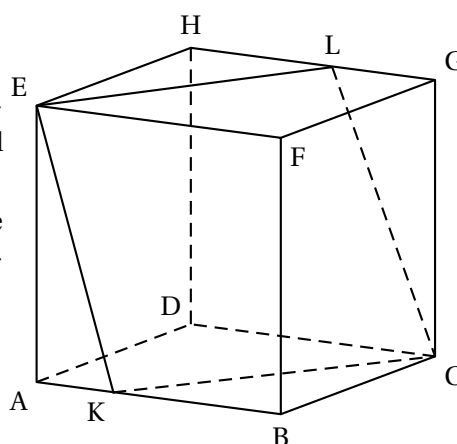
EXERCICE 13

Thèmes : Polynésie 5 septembre 2024

On considère un cube $ABCDEFGH$ et l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, on considère les points K et L de coordonnées :

$$K(m; 0; 0) \quad \text{et} \quad L(1-m; 1; 1).$$



- Donner les coordonnées des points E et C dans ce repère.
- Dans cette question, $m = 0$. Ainsi, le point $L(1; 1; 1)$ est confondu avec le point G, le point $K(0; 0; 0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA) .

a. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan (GEA) .

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (GEA) .

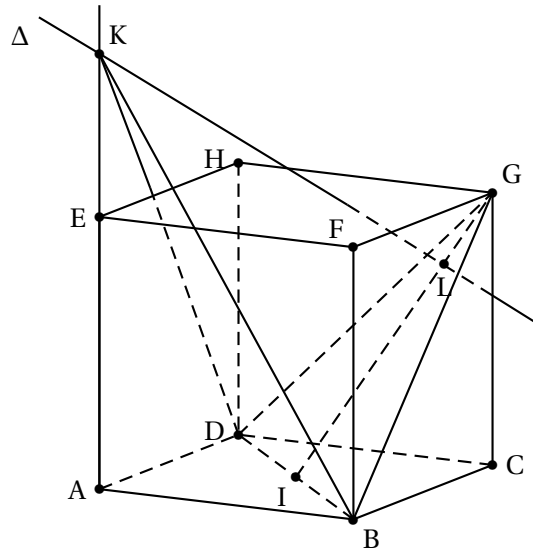
On s'intéresse désormais à la nature de $CKEL$ en fonction du paramètre m .

- Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle $[0; 1]$.
 - Démontrer que $CKEL$ est un parallélogramme.
 - Justifier que $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = m(m-1)$.
 - Démontrer que $CKEL$ est un rectangle si, et seulement si, $m = 0$ ou $m = 1$.
- Dans cette question, $m = \frac{1}{2}$. Ainsi, L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$.
 - Démontrer que le parallélogramme $CKEL$ est alors un losange.
 - À l'aide de la question 3. b., déterminer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{CKE}$.

EXERCICE 14

Thèmes : Métropole Antilles-Guyane 11 septembre 2024

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\vec{IL} = \frac{3}{4} \vec{IG}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1. **a.** Préciser les coordonnées des points D, B, I et G.
Aucune justification n'est attendue.
- b.** Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8}; \frac{7}{8}; \frac{3}{4}\right)$.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.
3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.
 - a.** Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = \frac{7}{8} + t \\ y = \frac{7}{8} + t \\ z = \frac{3}{4} - t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

- b.** Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0; 0; \frac{13}{8}\right)$.
- c.** Que représente le point L pour le point K? Justifier la réponse.
4. **a.** Calculer la distance KL.

- b. On admet que le triangle DBG est équilatéral.

Montrer que son aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- c. En déduire le volume du tétraèdre KDBG.

On rappelle que :

- le volume d'une pyramide est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base ;
- un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0 ; 0 ; a)$.

- a. Exprimer le volume $\mathcal{V}_a$ de la pyramide ABCDK_a en fonction de a .

- b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= & t' \\ y &= & t' \\ z &= & -t' + a \end{cases} \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).

Montrer que les coordonnées du point L_a sont $\left(\frac{a+1}{3} ; \frac{a+1}{3} ; \frac{2a-1}{3}\right)$.

- c. Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre GDBK_a et la pyramide ABCDK_a sont de même volume.

EXERCICE 15

Thèmes : Amérique du Sud 21 novembre 2024

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.

Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires de l'espace, (d_1) et (d_2) est la longueur du segment [EF], où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et (d_2) .

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (d_1) la droite passant par A(1 ; 2 ; -1) de vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et (d_2) la droite

dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x &= & 0 \\ y &= & 1 + t \\ z &= & 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (d_1) .
2. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

3. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}_1$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $-2x + y + 5z + 5 = 0$.

4. a. Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.

- b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathcal{P}$.

Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -1\right)$.

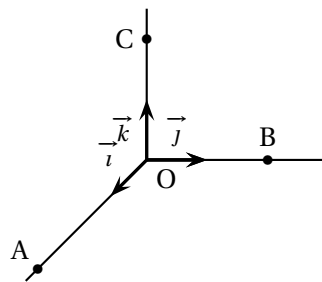
5. a. Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2) .
b. Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2) .

EXERCICE 16

Thèmes : Amérique du Sud 22 novembre 2024

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les trois points A(3; 0; 0), B(0; 2; 0) et C(0; 0; 2).



L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :

« Le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre OABC »,

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

- Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
- Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x + 3y + 3z - 6 = 0$.
- Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$.
- On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC).
Déterminer les coordonnées du point H.

5. En déduire que la distance du point O au plan (ABC) est égale à $\frac{3\sqrt{22}}{11}$.

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. Démontrer que le volume du tétraèdre OABC est égal à 2.
 2. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à $\sqrt{22}$.
 3. Démontrer que pour le tétraèdre OABC, « le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre ».
- On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 1

Amérique du Nord 21 mai 2024

1. On considère les points A(1 ; 0 ; 3) et B(4 ; 1 ; 0).

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}. M(x ; y ; z) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\begin{cases} x-1 = 3t \\ y-0 = 1t \\ z-3 = -3t, \end{cases} t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1+3t \\ y = t \\ z = 3-3t \end{cases} t \in \mathbb{R} \text{ Réponse c.}$$

On considère la droite (d) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3+4t \\ y = 6t \\ z = 4-2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

2. Réponse d.

3. • Les deux droites ont pour vecteurs directeurs respectifs : $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$: ces

vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.

- Les deux droites sont sécantes s'il existe deux réels t et k tels que :

$$\begin{cases} 3+4t = -2+3k \\ 6t = -1-2k \\ 4-2t = 1+k \end{cases} \iff \begin{cases} 4t = 3k-5 \\ 6t = -2k-1 \\ -2t = k-3 \end{cases}$$

Par différence de la ligne 1 et de la ligne 2, on obtient $-2t = 5k-4 = k-3$ (ligne

3) soit $4k = 1 \iff k = \frac{1}{4}$, puis comme $-2t = k-3 = \frac{1}{4}-3 = -\frac{11}{4}$, d'où $t = \frac{11}{8}$,

mais la première ligne donne $4t = 3k-5 = \frac{3}{4}-5 = -\frac{17}{4}$, d'où $t = \frac{17}{8}$: ceci n'est pas possible : les deux droites ne sont pas sécantes.

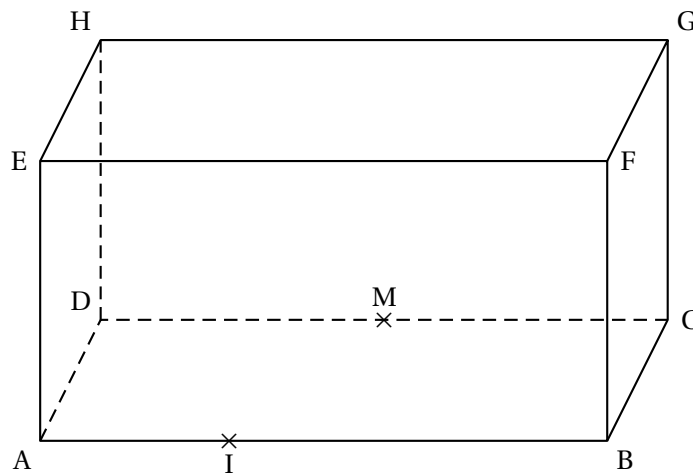
- Les deux droites ne sont pas confondues : il reste la réponse b.

4. Le vecteur $\vec{n}$ vecteur directeur de (d) est un vecteur normal au plan (P) . On a donc $M(x; y; z) \in (P) \iff \overrightarrow{IM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 4(x-2) + 6(y-1) - 2(z-0) = 0 \iff 4x - 8 + 6y - 6 - 2z = 0 \iff 4x + 6y - 2z - 14 = 0 \iff 2x + 3y - z - 7 = 0$: réponse **a**.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 2

Amérique du Nord - 22 mai 2024

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que $AB = 3$ et $AD = AE = 1$ représenté ci-dessous.



1. $F(3; 0; 1)$, $H(0; 1; 1)$, $M(1,5; 1; 0)$.

2. a. Soit $\overrightarrow{HF} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MF} \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires.

$$\text{On a } \vec{n} \cdot \overrightarrow{HF} = 6 - 6 + 0 = 0$$

$$\text{On a } \vec{n} \cdot \overrightarrow{MF} = 3 - 6 + 3 = 0.$$

Conclusion : le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMF), il est donc normal à ce plan.

- b. On sait qu'alors :

$$X(x; y; z) \in (\text{MHF}) \iff 2x + 6y + 3z + d = 0. \text{ Ainsi par exemple :}$$

$$H(x; y; z) \in (\text{MHF}) \iff 0 + 6 + 3 + d = 0 \iff d = -9, \text{ donc finalement :}$$

$$X(x; y; z) \in (\text{MHF}) \iff 2x + 6y + 3z - 9 = 0.$$

- c. Le plan $\mathcal{P}$ a par exemple pour vecteur normal $\vec{p} \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas

colinéaire au vecteur $\vec{n}$, (on a bien $2 \times \frac{5}{2} = 5, 6 \times \frac{5}{2} = 15$, mais $3 \times \frac{5}{2} \neq -3$) donc les deux plans ne sont pas parallèles.

3. On a $D(0; 1; 0)$ et $G(3; 1; 1)$, d'où $\overrightarrow{DG} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On sait que :

$$X(x; y; z) \in (DG) \iff \overrightarrow{DX} = t\overrightarrow{DG}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x-0 = 3t \\ y-1 = 0 \\ z-0 = 1t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Si la droite coupe le plan en un point N, les coordonnées de ce point vérifient les équations de la droite et celle du plan soit le système :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 2x + 6y + 3z - 9 = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$$6t + 6 + 3t - 9 = 0 \iff 9t - 3 = 0 \iff 3t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{3}.$$

Les coordonnées de N sont donc $(3 \times \frac{1}{3}; 1; \frac{1}{3})$, soit $N(1; 1; \frac{1}{3})$.

5. • On vérifie d'abord que R appartient au plan (HMF) :

$$R\left(3; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \in (HMF) \iff 6 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 9 = 0 \iff 6 + 3 - 9 = 0 \text{ ce qui est vrai.}$$

- On vérifie maintenant que le vecteur $\overrightarrow{GR}$ est bien un vecteur normal au plan (HMF) :

$$\text{On a } \overrightarrow{GR} \begin{pmatrix} 3-3 \\ \frac{1}{4}-1 \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ Or ce vecteur n'est manifestement pas colinéaire au vec-}$$

teur connu $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$: pour que $\vec{n}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{GR}$ il faudrait que sa

première coordonnée soit égale à 0, ce qui n'est pas le cas.

Conclusion : le point R n'est pas le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF).

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 3

Centres étrangers 5 juin 2024

1. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 - (-2) \\ 3 - 0 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ -1 - 0 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{3}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés

$$2. \quad \begin{aligned} \text{a.} \quad \vec{n} \cdot \vec{AB} &= 1 \times 1 + 3 \times 3 + 5 \times -2 = 1 + 9 - 10 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} &= 1 \times 3 + 3 \times -1 + 5 \times 0 = 3 - 3 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC), c'est donc un vecteur normal du plan (ABC).

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc de la forme :

$$x + 3y + 5z + d = 0 \text{ avec } d \in \mathbb{R}$$

De plus, le point A appartient au plan (ABC) donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan. On a donc :

$$-2 + 3 \times 0 + 5 \times 2 + d = 0 \iff -2 + 10 + d = 0 \iff d = -8$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $x + 3y + 5z - 8 = 0$.

$$\text{c.} \quad x_D + 3y_D + 5z_D - 8 = 0 + 3 \times 0 + 5 \times 3 - 8 = 15 - 8 = 7 \neq 0$$

Donc le point D n'appartient pas au plan (ABC) d'où les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

$$3. \quad \text{a.} \quad \text{Une équation paramétrique de } \mathcal{D}_1 \text{ est : } \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\text{D'une part : pour } t = 0, \text{ on a } \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \times 0 = 0 \\ z = 3 + 5 \times 0 = 3 \end{cases}.$$

On reconnaît les coordonnées du point D, donc D appartient à la droite $\mathcal{D}_1$.

D'autre part : un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est donc le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ c'est à dire

le vecteur $\vec{n}$ qui est orthogonal au plan(ABC).

Donc la droite $\mathcal{D}_1$ est orthogonal au plan (ABC).

Donc la droite $\mathcal{D}_1$ est bien la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.

b. Pour déterminer les points éventuels d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ré-

$$\text{solvons le système (S) : } \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3t = -1 - 5s \\ 3 + 5t = 2 - 6s \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3 \times (1 + 3s) = -1 - 5s \\ 3 + 5 \times (1 + 3s) = 2 - 6s \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3 + 9s = -1 - 5s \\ 3 + 5 + 15s = 2 - 6s \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 + 3s = 1 + 3 \times \frac{-2}{7} = \frac{1}{7} \\ s = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7} \\ s = -\frac{6}{21} = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

Le système admet une unique solution donc les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes.

Remplaçons t par $\frac{1}{7}$ dans l'équation paramétrique de $\mathcal{D}_1$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = 3 \times \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \\ z = 3 + 5 \times \frac{1}{7} = \frac{26}{7} \end{cases}$$

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont donc sécantes et les coordonnées de leur point d'intersection sont $\left(\frac{1}{7}; \frac{3}{7}; \frac{26}{7}\right)$.

4. a. Soit H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

H est donc l'intersection du plan (ABC) et de la hauteur issue de D dans le tétraèdre ABCD c'est à dire la droite $\mathcal{D}_1$.

Les coordonnées de H vérifient donc l'équation cartésienne du plan (ABC) et l'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.

$$t + 3 \times (3t) + 5 \times (3 + 5t) - 8 = 0 \iff t + 9t + 15 + 25t - 8 = 0 \iff 35t = -7 \iff t = -\frac{7}{35} = -\frac{1}{5}$$

Remplaçons t par $-\frac{1}{5}$ dans l'équation paramétrique de $\mathcal{D}_1$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = 3 \times \frac{-1}{5} = -\frac{3}{5} \\ z = 3 + 5 \times \frac{-1}{5} = \frac{10}{5} = 2 \end{cases}$$

Le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) est le point H de coordonnées $H\left(-\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}; 2\right)$.

- b. La distance du point D au plan (ABC) est égale à la longueur DH car H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

$$DH^2 = \left(-\frac{1}{5} - 0\right)^2 + \left(-\frac{3}{5} - 0\right)^2 + (2 - 3)^2 = \frac{1}{25} + \frac{9}{25} + 1 = \frac{35}{25}$$

$$DH = \sqrt{\frac{35}{25}} = \sqrt{\frac{7}{5}} = \sqrt{\frac{14}{10}} = \sqrt{1,4} \text{ ou } \frac{\sqrt{35}}{5} \approx 1,183 \text{ soit } 1,18 \text{ au centième près.}$$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 4

Centres étrangers 6 juin 2024

1. On a : $I\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ et $J\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

2. On en déduit :

$$\overrightarrow{EJ} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{FH} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{et} \quad \overrightarrow{FI} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 \\ 2-0 \\ 0-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

donc :

$$\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FH} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 - \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

$$\vec{EJ} \cdot \vec{FI} = -\frac{1}{2} \times 1 + 1 \times 0 - \frac{1}{2} \times (-1) = 0$$

Le vecteur $\vec{EJ}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FHI) donc $\vec{EJ}$ est normal au plan (FHI).

3. Le vecteur $\vec{EJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est normal au plan (FHI) donc le vecteur $\vec{n} = -2\vec{EJ} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal au plan (FHI).

Une équation cartésienne du plan (FHI) est donc de la forme : $-2x - 2y + z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus, le point F appartient au plan (FHI) donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan. On a donc :

$$\begin{aligned} F \in (FHI) &\iff -2 \times x_F - 2 \times y_F + z_F + d = 0 \\ &\iff -2 \times 1 - 2 \times 0 + 1 + d = 0 \\ &\iff -2 + 1 + d = 0 \\ &\iff d = 1 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan (FHI) est donc $-2x - 2y + z + 1 = 0$.

4. Le vecteur $\vec{EJ}$ est un vecteur directeur de la droite (EJ) et E est un point de la droite (EJ). Une représentation paramétrique de la droite (EJ) est donc :

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \times t \\ y = 0 + 1 \times t \\ z = 1 - \frac{1}{2} \times t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{c'est à dire :} \quad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - \frac{1}{2} t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

5. a. Soit K est le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI).

K est donc l'intersection du plan (FHI) et de la droite orthogonale au plan (FHI) passant par E, c'est à dire la droite (EJ).

Pour cela, on va considérer le point M_t de paramètre t sur la droite (EJ).

$$\begin{aligned} M_t \in (FHI) &\iff -2x_{M_t} - 2y_{M_t} + z_{M_t} + 1 = 0 \\ &\iff -2 \times t - 2 \times t + \left(1 - \frac{1}{2}t\right) + 1 = 0 \\ &\iff -2t - 2t + 1 - \frac{1}{2}t + 1 = 0 \\ &\iff -\frac{9}{2}t = -2 \\ &\iff t = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Le seul point de la droite étant aussi sur le plan est donc K, c'est le point de paramètre $\frac{4}{9}$ dans l'équation paramétrique de (EJ).

Ses coordonnées vérifient :

$$x_K = \frac{4}{9}, \quad y_K = \frac{4}{9} \quad \text{et} \quad z_K = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

Le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI) est le point K de coordonnées $K\left(\frac{4}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right)$.

- b. Le volume V d'une pyramide est donné par $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur correspondante.

Prenons le triangle EFH comme base, la hauteur issue de I est donc la droite (IL) et la distance de I au plan EFH est donc égale à la longueur IL.

EFH est un triangle rectangle en E et son aire est égale à $\frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$

L a pour coordonnées $L\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ donc

$$LI^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + (0 - 0)^2 + (1 - 0)^2 = 1 \text{ donc } LI = 1.$$

$$\text{On a donc } V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

- c. Calculons maintenant le volume en prenant le triangle FHI comme base. La hauteur sera donc la longueur EK.

$$EK^2 = \left(\frac{4}{9} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{9} - 0\right)^2 + \left(\frac{7}{9} - 1\right)^2 = \frac{16}{81} + \frac{16}{81} + \frac{4}{81} = \frac{36}{81}$$

$$\text{donc } EK = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

On a donc :

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{FHI} \times \frac{2}{3} \iff \frac{1}{6} \times 3 \times \frac{3}{2} = \mathcal{A}_{FHI}$$

$$\iff \frac{1}{6} \times 3 \times \frac{3}{2} = \mathcal{A}_{FHI}$$

$$\iff \mathcal{A}_{FHI} = \frac{3}{4}$$

L'aire du triangle FHI est $\frac{3}{4}$ (cm²).

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 5

Asie 10 juin 2024

1. On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4-3 \\ -1-(-1) \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0-3 \\ 3-(-1) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

On a $x_{\overrightarrow{AC}} = -3x_{\overrightarrow{AB}}$, mais $y_{\overrightarrow{AC}} \neq -3y_{\overrightarrow{AB}}$, les vecteurs sont donc non colinéaires, et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. a. On sait que A, B et C ne sont pas alignés, et donc qu'ils définissent un plan. Pour montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires, il suffit de montrer que D est un point du plan (ABC), ce qui équivaut à prouver qu'un vecteur reliant un point du plan (ABC) au point D est coplanaire à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

Pas tout à fait au hasard (car on a regardé l'énoncé de la question suivante), on va choisir d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{CD}$ en fonction d'une base de (ABC) constituée des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dont on a déjà déterminé les coordonnées précédemment.

$$\text{On a : } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4-0 \\ 3-3 \\ -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On remarque que l'on a : } \overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AC}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ peut donc être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc c'est un vecteur du plan (ABC), et puisque C est dans le plan (ABC), on en déduit que D est également dans (ABC).

Finalement, puisque D est dans (ABC), les quatre points A, B, C et D sont bien coplanaires.

- b. À la question précédente, on a établi $\overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ étant colinéaires, les segments [AB] et [CD] sont portés par des droites parallèles (strictement, car C n'est pas aligné avec A et B).

ABCD est donc une figure plane (les quatre points étant coplanaires), c'est donc un quadrilatère, non croisé (puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens, cela signifie que ABDC est non croisé, ABCD serait un quadrilatère croisé), dont les côtés [AB] et [DC] sont parallèles : le quadrilatère ABDC est donc bien un trapèze, de bases [AB] et [DC].

3. a. Comme on est dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé, on va utiliser les coordonnées des vecteurs pour calculer le produit scalaire :

$$- \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times (-1) = 2 + 0 - 2 = 0 : \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont donc orthogonaux ;}$$

$$- \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-3) + 1 \times 4 + 2 \times 1 = -6 + 4 + 2 = 0 : \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont aussi orthogonaux ;}$$

$\vec{n}$ étant orthogonal à une base (deux vecteurs non colinéaires) du plan (ABC), on en déduit que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

- b. $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ étant normal à (ABC), on en déduit que (ABC) admet

une équation de la forme : $2x + y + 2z + d = 0$, où d est un réel donné.

$$\text{De plus, } A \in (ABC) \iff 2x_A + y_A + 2z_A + d = 0$$

$$\iff 2 \times 3 + (-1) + 2 \times 1 + d = 0$$

$$\iff 6 - 1 + 2 + d = 0$$

$$\iff d = -7$$

Finalement, une équation de (ABC) est : $2x + y + 2z - 7 = 0$.

- c. Si Δ est orthogonale à (ABC), cela signifie que $\vec{n}$, qui est normal à (ABC) doit diriger Δ . Et si la droite passe par S, de coordonnées (2 ; 1 ; 4), on en déduit qu'une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = x_S + x_{\vec{n}} t \\ y = y_S + y_{\vec{n}} t \\ z = z_S + z_{\vec{n}} t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{ce qui donne ici :} \quad \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- d. On nomme M_t le point de paramètre t sur la droite Δ .

$$M_t \in (ABC) \iff 2x_{M_t} + y_{M_t} + 2z_{M_t} - 7 = 0$$

$$\iff 2(2 + 2t) + (1 + t) + 2(4 + 2t) - 7 = 0$$

$$\iff 4 + 4t + 1 + t + 8 + 4t - 7 = 0$$

$$\iff 9t + 6 = 0$$

$$\iff t = \frac{-2}{3}$$

Il existe donc un unique point de Δ qui est sur le plan (ABC), c'est le point de paramètre $t = \frac{-2}{3}$ dans la représentation paramétrique. Ce point est donc le

point I (ou bien $M_{\frac{-2}{3}}$), et a bien pour coordonnées : $\left(2 + 2 \times \frac{-2}{3}; 1 + \frac{-2}{3}; 4 + 2 \times \frac{-2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a donc :

$$\begin{aligned} SI &= \sqrt{(x_I - x_S)^2 + (y_I - y_S)^2 + (z_I - z_S)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 4\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

On arrive bien à $SI = 2$ unités graphique, et comme $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est d'unité graphique 1 cm, on a bien $SI = 2$ cm.

4. a. Avec les coordonnées données pour H, on a $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

On a donc : $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} = 4 \times (-1) + 0 \times 4 + (-4) \times (-1) = -4 + 0 + 4 = 0$, donc les vecteurs sont orthogonaux, et les droites (BH) et (CD) qu'ils dirigent sont orthogonales.

Par ailleurs : $\overrightarrow{CH} = \frac{3}{4} \overrightarrow{CD}$, les points C, H et D sont alignés, donc H est sur la droite (CD).

H est donc le point de la droite (CD) tel que (BH) est orthogonale à (CD), donc c'est bien le projeté orthogonal de B sur (CD).

$$\text{On a } BH = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

La distance BH est bien égale à $3\sqrt{2}$ cm.

- b. On a donc besoin de connaître les longueurs des deux bases du trapèze :

$$\text{— } AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \text{ cm};$$

$$\text{— Comme on a } \overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB}, \text{ on a notamment, } CD = |4| \times AB = 4\sqrt{2} \text{ cm.}$$

$$\text{L'aire du trapèze ABDC est donc : } \mathcal{A}_{ABDC} = \frac{\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = 15 \text{ cm}^2$$

5. Finalement, le volume de la pyramide est : $\mathcal{V}_{ABDCS} = \frac{1}{3} \times 15 \times 2 = 10 \text{ cm}^3$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 6

Asie 11 juin 2024

Partie A

1. Vérifions si les coordonnées des points vérifient ou non l'équation de (P) :

$$\text{— } 2x_A + 2y_A - 3z_A + 1 = 2 \times 1 + 2 \times 0 - 3 \times 1 + 1 = 2 + 0 - 3 + 1 = 0 : \text{ A est dans le plan (P);}$$

- $2x_B + 2y_B - 3z_B + 1 = 2 \times 2 + 2 \times (-1) - 3 \times 1 + 1 = 4 - 2 - 3 + 1 = 0$: B est dans le plan (P);
- $2x_C + 2y_C - 3z_C + 1 = 2 \times (-4) + 2 \times (-6) - 3 \times 5 + 1 = -8 - 12 - 15 + 1 = -34 \neq 0$: C n'est pas dans le plan (P).

2. On a : $\overrightarrow{CC'} = \begin{pmatrix} 0 - (-4) \\ -2 - (-6) \\ -1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, d'après l'équation que l'on a du plan (P), $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

est un vecteur normal au plan (P).

Comme on a manifestement $\overrightarrow{CC'} = 2\vec{n}$, ces vecteurs sont colinéaires, et donc la droite (CC') est orthogonale au plan (P).

De plus : $2x_{C'} + 2y_{C'} - 3z_{C'} + 1 = 2 \times 0 + 2 \times (-2) - 3 \times (-1) + 1 = 0 - 4 + 3 + 1 = 0$: $C' \in (P)$.

Finalement, C' est un point du plan (P) tel que (CC') est orthogonale à (P) : cela confirme que C' est le projeté orthogonal de C sur (P).

3. La droite (AB) passe par A(1 ; 0 ; 1) et est dirigée par $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc une représentation paramétrique de (AB) est :

$$\begin{cases} x = x_A + x_{\overrightarrow{AB}} t \\ y = y_A + y_{\overrightarrow{AB}} t \\ z = z_A + z_{\overrightarrow{AB}} t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}, \quad \text{soit ici : } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$.

4. Si H est un point de (AB), cela signifie qu'il existe un réel t_0 tel que H est le point de paramètre t_0 sur (AB).

On a : (AB) et (CH) seront orthogonales (et donc nécessairement perpendiculaires, car elles ont H en commun) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont orthogonaux.

On a les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} (1+t_0) - (-4) \\ (-t_0) - (-6) \\ 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+t_0 \\ 6-t_0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Comme

le repère est orthonormé, on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 1 \times (5+t_0) + (-1) \times (6-t_0) + 0 \times (-4) = 5+t_0-6+t_0 = 2t_0-1$

On a donc : (AB) et (CH) sont orthogonales $\iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$

$$\iff 2t_0 - 1 = 0$$

$$\iff t_0 = \frac{1}{2}$$

L'unique pour H de la droite (AB) pour lequel (AB) et (CH) sont orthogonales est donc le point de paramètre $t_0 = \frac{1}{2} = 0,5$ dans la représentation que nous avons donnée à la question précédente. Ses coordonnées sont donc : H(1,5 ; -0,5 ; 1).

Remarques : H est le milieu de [AB].

Si vous avez une représentation paramétrique différente de celle présentée dans ce corrigé, vous aurez aussi une valeur différente pour t_0 .

Par exemple, si vous avez choisi B comme point de référence et $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur pour construire votre représentation paramétrique, vous arriverez à $t_0 = -0,5$, mais dans votre représentation paramétrique, cela vous conduira aux mêmes coordonnées pour le point H.

Partie B

Les coordonnées admises pour le vecteur $\overrightarrow{HC}$ sont cohérentes avec les coordonnées du point H à la question précédente.

1. On est dans un repère orthonormé, donc :

$$\|\overrightarrow{HC}\| = \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{121}{4} + 16} = \sqrt{\frac{153}{2}} = \sqrt{76,5}.$$

La valeur exacte de $\|\overrightarrow{HC}\|$ est donc : $\sqrt{\frac{153}{2}} = \sqrt{76,5}$.

2. Le point H, en tant que point de (AB) tel que (CH) est orthogonale à (AB), est donc le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Pour calculer la surface du triangle, on va donc utiliser la formule : $\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.

Ici, le plus simple sera donc de choisir [AB] comme base, de longueur AB et donc la hauteur correspondante est CH = $\|\overrightarrow{CH}\|$.

On a déjà calculé CH à la question précédente, donc :

$$AB = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0} = \sqrt{2}.$$

$$\text{L'aire de ABC est donc : } S = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{153}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{153}}{2}.$$

Partie C

1. — On a établi au début de l'exercice que A et B appartiennent à (P), donc toute la droite (AB) est incluse dans (P), et donc notamment H appartient à (P) aussi.

— H et C' sont donc deux points de (P), et on sait que (CC') est orthogonale à (P). (CC') étant orthogonale à (P), elle est orthogonale à toute droite de (P), dont la droite (C'H), ces droites sont donc perpendiculaires, car elles se coupent évidemment en C'.

Le triangle CHC' est donc un triangle rectangle en C'.

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est donné par le quotient de la longueur du côté adjacent à l'angle (ici C'H) par la longueur de l'hypoténuse du triangle (ici CH).

$$\text{Ici, on a donc : } \cos(\alpha) = \frac{C'H}{CH} = \frac{\sqrt{\frac{17}{2}}}{\sqrt{\frac{153}{2}}} = \sqrt{\frac{17}{153}} = \sqrt{\frac{17 \times 1}{17 \times 9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

2. a. *Méthode 1* : le plus rapide, ici, serait de calculer le produit scalaire des vecteurs directeurs des deux droites, et de prouver qu'il est nul.

Mais comme on a fait quelque chose de similaire dans ce corrigé, on va explorer une voie différente :

Méthode 2 :

- On sait que (CH) est orthogonale à (AB), d'après la définition du point H à la question A 4.;
- on sait que (CC') est orthogonale à (AB), car (CC') étant orthogonale à (P), elle est orthogonale à toute droite incluse dans (P), notamment (AB) ;
- on sait que les droites (CH) et (CC') sont sécantes (en C), car les points C' et H sont les intersections de ces deux droites avec (P), et sont séparés par une distance non nulle.

Ainsi, on vient de démontrer que C, C' et H définissent un plan, et que deux droites sécantes du plan (CC'H) sont orthogonales à (AB), donc que (AB) est orthogonale au plan (CC'H) et donc à toutes les droites de ce plan là, notamment à la droite (C'H).

Remarque : le plan $(CC'H)$ est ce que l'on appelle le **plan médiateur** du segment $[AB]$: le plan qui passe par le milieu (H) du segment et lui est perpendiculaire.

- b. On applique à nouveau la formule de calcul de l'aire d'un triangle.

Ici, on va prendre $[AB]$ comme base et donc, d'après la question précédente, $[C'H]$ est la hauteur correspondante.

$$\text{On a donc : } S' = \frac{AB \times C'H}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{17}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{c. On a donc : } \cos(\alpha) = \frac{C'H}{CH} = \frac{AB \times C'H}{AB \times CH} = \frac{\frac{AB \times C'H}{2}}{\frac{AB \times CH}{2}} = \frac{S'}{S}.$$

Voilà une relation possible.

On peut aussi écrire : $S' = \cos(\alpha)S$ par exemple.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 7

Métropole 19 juin 2024

1. a. On a $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{25}{2} \end{pmatrix}$.

Or ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et :

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{CA} = 5 - 5 + 0 = 0 \text{ et}$$

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD) : il est donc normal à ce plan.

- b. On sait qu'alors :

$$M(x; y; z) \in (CAD) \iff 1x - 1y + 0z + d = 0 \iff x - y + d = 0, \text{ avec } d \in \mathbb{R}.$$

Ceci est vrai pour exemple pour C :

$$C(0; 0; 10) \in (CAD) \iff 0 - 1y + 0 + d = 0 \text{ avec } d \in \mathbb{R}, \text{ soit } d = 0.$$

$$\text{Donc } M(x; y; z) \in (CAD) \iff x - y = 0.$$

2. a. Si la droite (D) est sécante au plan (CAD) en un point H les coordonnées de ce point vérifient les équations paramétriques de (D) et celle du plan soit :

$$H(x; y; z) \in D \cap (CAD) \iff \begin{cases} x &= & +\frac{5}{2}t \\ y &= & 5 - \frac{5}{2}t \\ z &= & 0t \\ x - y &= & 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \frac{5}{2}t - \left(5 - \frac{5}{2}t\right) =$$

$$0 \iff 5t - 5 = 0 \iff t = 1.$$

$$\text{Donc } H\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0\right).$$

$$\text{b. On a } M(x; y; z) \in D \iff \begin{cases} x = 0 + \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 + 0t \end{cases}$$

On reconnaît dans les coefficients de t les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, soit

$\frac{5}{2}\vec{n}_1$ et $(0; 5; 0)$ sont les coordonnées de B.

Donc D est la droite contenant B et de vecteur directeur $\vec{n}_1$.

Or on a vu que le vecteur $\vec{n}_1$ est normal au plan (CAD), donc la droite D est perpendiculaire à (CAD) au point H.

3. a. On a vu que $(BH) = D$ donc a pour vecteur directeur $\vec{n}_1$.

$$\vec{HA} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}_1 \cdot \vec{HA} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} + 0 = 0.$$

Les vecteurs $\vec{BH}$ et $\vec{HA}$ sont orthogonaux donc les droites (BH) et (HA) sont perpendiculaires, le triangle ABH est rectangle en H.

$$\text{b. On a } \|\vec{BH}\|^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + 0 = \frac{50}{4}, \text{ d'où } \|\vec{BH}\| = BH = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ et}$$

$$\|\vec{HA}\|^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + 0 = \frac{50}{4}, \text{ d'où } \|\vec{HA}\| = HA = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Donc } \mathcal{A}(ABH) = \frac{BH \times HA}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{25 \times 2}{8} = \frac{25}{4}.$$

4. a. Les points A, B et H ont une cote nulle : ils appartiennent donc au plan définis par les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et C a une abscisse et une ordonnée nulles, donc appartient à l'axe $(O, \vec{k})$ qui est perpendiculaire au plan (ABH), donc (CO) est la hauteur contenant C du tétraèdre ABCH.

- b. De façon évidente $CO = 10$, donc :

$$\mathcal{V}(ABCH) = \frac{\mathcal{A}(ABH) \times CO}{3} = \frac{\frac{25}{4} \times 10}{3} = \frac{125}{6}.$$

5. On a $\vec{BA} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$, d'où $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0 + 0 + 0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux

donc les droites (BA) et (BC) sont perpendiculaires, le triangle (ABC) est rectangle en B.

On a $BA^2 = 5^2$, donc $BA = 5$ et $BC^2 = 5^2 + 10^2 = 25 + 100 = 125$, donc $BC = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

L'aire du triangle (ABC) est égale à :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{2}.$$

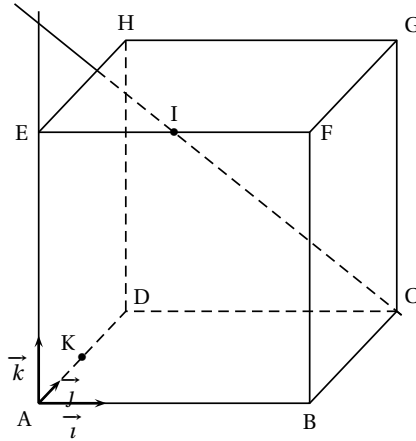
On a $\mathcal{V}(ABCH) = \frac{\mathcal{A}(ABC) \times d}{3}$, d étant la distance du point H au plan (ABC).

$$\text{On a donc : } \frac{125}{6} = \frac{\frac{25\sqrt{5}}{2} \times d}{3} \iff d = \frac{125}{6} \times \frac{3 \times 2}{25\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 8

Métropole 19 juin 2024 J1 (secours)

On considère un repère ortho-normé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace dans lequel on place les points $B(4; 0; 0)$, $D(0; 4; 0)$, $E(0; 0; 4)$, et les points C , F , G et H de sorte que le solide $ABCDEFGH$ soit un cube.



1. De $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$, on déduit que $C(4; 4; 0)$;
 De $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AE} = 4\vec{i} + 4\vec{k}$, on déduit que $F(4; 0; 4)$;
 De $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$, on déduit que $G(4; 4; 4)$;
 De $\vec{AH} = \vec{AD} + \vec{AE} = 4\vec{j} + 4\vec{k}$, on déduit que $H(0; 4; 4)$.
 2. Le point I , milieu de $[EF]$, a pour coordonnées $\left(\frac{0+4}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{4+4}{2}\right) = (2; 0; 4)$.

On sait que $M(x; y; z) \in (IC) \iff \vec{IM} = t\vec{IC}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Avec $\vec{IC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, on a donc :

$$M(x; y; z) \in (IC) \iff \begin{cases} x-2 = 2t \\ y-0 = 4t \\ z-4 = -4t, \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4t \\ z = 4-4t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G , et par J l'intersection de $\mathcal{P}$ avec (IC) .

- a. Le vecteur $\vec{IC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. On sait qu'alors :

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff 2x + 4y - 4z + d = 0, \text{ avec } d \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ainsi } G(4; 4; 4) \in \mathcal{P} \iff 2 \times 4 + 4 \times 4 - 4 \times 4 + d = 0 \iff d = -8.$$

$$\text{On a donc } M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff 2x + 4y - 4z - 8 = 0 \iff x + 2y - 2z - 4 = 0.$$

- b. J étant commun à (IC) et $\mathcal{P}$, ses coordonnées $(x; y; z)$ vérifient les équations paramétriques de (IC) et l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, soit le système :

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4t \\ z = 4-4t \\ x+2y-2z-4 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant x , y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$$2+2t+2 \times 4t - 2 \times (4-4t) - 4 = 0 \iff 2+2t+8t-8+8t-4=0$$

$$\iff 18t - 10 = 0 \iff 9t - 5 = 0 \iff t = \frac{5}{9}.$$

En utilisant la représentation paramétrique de (IC), on obtient :

$$x = 2 + 2 \times \frac{5}{9} = \frac{18+10}{9} = \frac{28}{9}; y = 4 \times \frac{5}{9} = \frac{20}{9} \text{ et } z = 4 - 4 \times \frac{5}{9} = \frac{36-20}{9} = \frac{16}{9}.$$

Donc C est la perpendiculaire (IC) au plan $\mathcal{P}$ qui coupe ce plan en J : J est donc le projeté orthogonal de C sur le plan, $\mathcal{P}$.

c. $K(0; 2; 0) \in \mathcal{P} \iff 0 + 2 \times 2 - 2 \times 0 - 4 = 0$: cette égalité est vraie

d. On vient de voir que K est un point de $\mathcal{P}$ et K est un point du plan de la base (ABCD) du cube.

D'autre part $B(4; 0; 0) \in \mathcal{P} \iff 4 + 2 \times 0 - 2 \times 0 - 4 = 0$, qui est vraie donc B est un point de $\mathcal{P}$ et bien sur de (ABC).

Conclusion : les deux points B et K sont communs aux deux plans, donc l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (ABC) est la droite (BK).

4. a. On prend comme base le triangle CBG de la face de droite BCGF : son aire est la moitié de celle du carré de côté 4, soit $\frac{4^2}{2} = 8$.

La hauteur de la pyramide est alors [DC] avec $DC = 4$.

$$\text{On a donc : } V_{\text{CBKG}} = \frac{8 \times 4}{3} = \frac{32}{3}.$$

b. En prenant pour la même pyramide la base BKG, la hauteur est [CJ].

$$\text{Comme } \overrightarrow{\text{CJ}} = \begin{pmatrix} 4 - \frac{28}{9} \\ 4 - \frac{20}{9} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$\text{CJ}^2 = \|\overrightarrow{\text{CJ}}\|^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{64 + 256 + 256}{81} = \frac{576}{81} = \frac{9 \times 64}{9 \times 9} = \frac{64}{9} = \left(\frac{8}{3}\right)^2. \text{ Donc } \text{CJ} = \frac{8}{3}.$$

Le volume de la pyramide est égal à :

$$\frac{32}{3} = \frac{\text{aire}(\text{BKG}) \times \frac{8}{3}}{3} \iff \text{aire}(\text{BKG}) = 32 \times \frac{3}{8} = 4 \times 3 = 12.$$

c. On a déjà vu que B est un point de $\mathcal{P}$ et G aussi par définition, donc la droite (BG) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

d. On note I' un point de l'arête [EF], et $\mathcal{P}'$ le plan orthogonal à la droite (I'C) passant par G.

Le point I' a pour coordonnées (x; y; z) telles que $\overrightarrow{\text{EI}'} = k \overrightarrow{\text{EF}}$ avec $k \in [0; 1]$.

$$\text{Donc } \begin{cases} x-0 = (4-0)k \\ y-0 = (0-0)k \\ z-4 = (4-4)k \end{cases} \text{ et donc } \text{I}' \begin{pmatrix} 4k \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \text{ on a donc } \overrightarrow{\text{I}'\text{C}} = \begin{pmatrix} 4-4k \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{\text{BG}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{\text{I}'\text{C}} \cdot \overrightarrow{\text{BG}} = (4-4k) \times 0 + 4 \times 4 + (-4) \times 4 = 0 \text{ donc } \overrightarrow{\text{I}'\text{C}} \perp \overrightarrow{\text{BG}}.$$

G appartient au plan $\mathcal{P}'$ qui est le plan orthogonal à (I'C); comme $\overrightarrow{\text{I}'\text{C}} \perp \overrightarrow{\text{BG}}$, on peut dire que B appartient aussi à $\mathcal{P}'$. Donc la droite (BG) est incluse dans $\mathcal{P}'$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 9

Métropole 20 juin 2024

Affirmation 1 : Vraie

Ici, il y a deux éléments à justifier : d'une part A, C et D définissent un plan et d'autre part, ce plan a bien l'équation annoncée.

• On a : $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4-2 \\ 4-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Avec $x_{\overrightarrow{AD}} = -x_{\overrightarrow{AC}}$ mais $y_{\overrightarrow{AD}} \neq -y_{\overrightarrow{AC}}$, il est évident que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, donc que les points A, C et D ne sont pas alignés, et donc :

A, C et D définissent un plan ;

• le plan d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$, de coordonnées $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 \times 2 - 5 \times 4 + 4 \times 1 = 16 - 20 + 4 = 0$

et $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AD} = 8 \times (-2) - 5 \times 0 + 4 \times 4 = -16 - 0 + 16 = 0$

$\overrightarrow{n_1}$ est donc bien orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ACD), donc $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal au plan (ACD).

Le plan dont on a l'équation partage un vecteur normal avec (ACD) : ces deux plans sont parallèles.

Comme, de plus, $8x_A - 5y_A + 4z_A - 16 = 8 \times 2 - 5 \times 0 + 4 \times 0 - 16 = 16 - 16 = 0$

on en déduit que les coordonnées de A vérifient l'équation donnée, et donc que A est dans le plan dont on a l'équation, ce plan est donc confondu avec (ACD).

Finalement, on a bien confirmé que les points A, C et D définissent un plan $\mathcal{P}$ d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$.

Remarque : pour le deuxième point de cette question, on pouvait aussi vérifier que A, C et D avaient des coordonnées vérifiant l'équation donnée, cela revenait au même.

Affirmation 2 : Fausse

Puisque l'on sait que A, C et D définissent le plan $\mathcal{P}$ d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$, alors on a : les points A, B, C et D sont coplanaires $\iff B \in \mathcal{P}$

$$\iff 8x_B - 5y_B + 4z_B - 16 = 0$$

$$\iff 8 \times 0 - 5 \times 4 + 4 \times 3 - 16 = 0$$

$$\iff 0 - 20 + 12 - 16 = 0$$

$$\iff -24 = 0$$

Comme $-24 \neq 0$, on en déduit que B n'appartient pas à $\mathcal{P}$, et donc que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Affirmation 3 : Vraie

les droites (AC) et (BH) sont dirigées par $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ respectivement. Comme

ces vecteurs sont visiblement non colinéaires, les droites sont soit sécantes, soit non coplanaires.

Pour chercher un éventuel point d'intersection, on a donné des représentations paramétriques des deux droites :

$$(AC) \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = 4s \\ z = s \end{cases} \quad \text{où } s \in \mathbb{R} \quad (BH) \begin{cases} x = -t \\ y = 4 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Si on considère M_s le point de paramètre s sur la droite (AC) et N_t le point de paramètre t sur (BH), alors :

$$\begin{aligned} M_s = N_t &\iff \begin{cases} 2 + 2s = -t \\ 4s = 4 - 3t \\ s = 3 - t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2 + 2(3 - t) = -t \\ 4(3 - t) = 4 - 3t \\ s = 3 - t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2 + 6 - 2t = -t \\ 12 - 4t = 4 - 3t \\ s = 3 - t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 8 = -t + 2t \\ 12 - 4 = -3t + 4t \\ s = 3 - t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t = 8 \\ t = 8 \\ s = 3 - 8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t = 8 \\ t = 8 \\ s = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système a une unique solution, donc les deux droites ont un unique point commun, c'est M_{-5} , qui est confondu avec N_8 , autrement dit, le point de coordonnées : $(-8; -20; -5)$.

Les droites sont bien sécantes.

Affirmation 4 : Vraie

Il y a deux éléments à vérifier ici pour répondre positivement : le point H est-il un point du plan (ABC), et le vecteur $\overrightarrow{DH}$ est-il normal au plan ?

— On a : $x_H - y_H + 2z_H - 2 = -1 - 1 + 2 \times 2 - 2 = -2 + 4 - 2 = 0$

Les coordonnées de H vérifient l'équation donnée pour (ABC), donc H est bien un point du plan (ABC);

— On a : $\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. D'après l'équation donnée pour (ABC), un vecteur normal

à (ABC) est : $\overrightarrow{n_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Comme on a : $\overrightarrow{n_2} = -\overrightarrow{DH}$, on en déduit que les vecteurs sont colinéaires, donc que $\overrightarrow{DH}$ est normal au plan (ABC).

En conclusion, H est un point de (ABC) tel que (DH) est orthogonale à (ABC) : H est bien le projeté orthogonal de D sur (ABC).

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 10

Métropole 20 juin 2024 J2 (dévoilé)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

$$A(0; 4; -1), \quad B(6; 1; 5) \quad \text{et} \quad C(6; -2; -1).$$

Affirmation 1 : Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$$\text{On a } \vec{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or } \vec{n} \cdot \vec{AB} = 12 - 6 - 6 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \vec{AC} = 12 - 12 + 0 = 0.$$

Or il est admis que les points A, B et C ne sont pas alignés, donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : c'est un vecteur normal à ce plan : affirmation **Vraie**. **Affirmation 2 :**

On sait que :

$$M(x; y; z) \in (AB) \iff \vec{AM} = u \vec{AB}.$$

$$\text{Avec } \vec{AM} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-4 \\ z-(-1) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{ vecteur qui est colinéaire à } \frac{1}{3} \vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } M(x; y; z) \in (AB) \iff \begin{cases} x-0 &= 2u \\ y-4 &= -u \\ z-(-1) &= 2u \end{cases} \text{ où } u \in \mathbb{R}. \iff \begin{cases} x &= 2u \\ y &= 4-u \\ z &= -1+2u \end{cases} \text{ où } u \in \mathbb{R}.$$

On pose $u = t + 1$ et on obtient un autre système paramétrique :

$$M(x; y; z) \in (AB) \iff \begin{cases} x &= 2t+2 \\ y &= 3-t \\ z &= 2t+1 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

L'affirmation est **Vraie**.

Affirmation 3 : Puisque $\mathcal{P}$ est orthogonal à la droite (AB), le vecteur $\vec{AB}$ ou plus simplement le vecteur $\frac{1}{3} \vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

$$\text{On sait qu'alors } M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff 2x - y + 2z + d = 0 \text{ avec } d \in \mathbb{R}.$$

Comme $C(6; -2; -1) \in \mathcal{P} \iff 12 + 2 - 2 + d = 0 \iff 12 + d = 0 \iff d = -12$, on obtient finalement :

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff 2x - y + 2z - 12 = 0 : \text{l'affirmation est } \textbf{Fausse}.$$

$$\mathcal{D} \quad \begin{cases} x &= 3+t \\ y &= 1+t \\ z &= 2+t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}; \quad \mathcal{D}' \quad \begin{cases} x &= 2t' \\ y &= 4-t' \\ z &= -1+2t' \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

La droite $\mathcal{D}$ contient le point D(3; 1; 2) et a pour vecteur directeur $\vec{d} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la droite

$\mathcal{D}'$ contient le point E(0; 4; -1) et a pour vecteur directeur $\vec{d}' \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{d}'$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

Si elles ont point commun les coordonnées de celui-ci vérifient les deux systèmes d'où le nouveau système :

$$\begin{cases} 3+t = 2t' \\ 1+t = 4-t' \\ 2+t = -1+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2t'-3 \\ t = 3-t' \\ t = -3+2t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t'-3 = 3-t' \\ 3-t' = -3+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} 3t' = 6 \\ 6 = 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} t' = 2 \\ 2 = t' \end{cases}$$

et comme $t = 3 - t' = 3 - 2 = 1$. Le système a une solution.

Conclusion : les droites sont sécantes au point de coordonnées (4; 2; 3); elles sont coplanaires : l'affirmation 4 est **Fausse**

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 11

Polynésie 19 juin 2024

A(2; 1; -1), B(-1; 2; 1) et C(5; 0; -3).

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $x + 5y - 2z + 3 = 0$.

On note $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -t+3 \\ y = t+2 \\ z = 2t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Affirmation 1 :

On a $\vec{OA} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{OC} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points O, A

et C ne sont pas alignés et définissent bien un plan.

D'autre part : $\vec{n} \cdot \vec{OA} = 2 + 0 - 2 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{OC} = 5 + 0 - 6 = -1$; conclusion le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\vec{OA}$ du plan (OAC) mais n'est pas orthogonal au vecteur $\vec{OC}$ de ce même plan; il n'est donc pas normal au plan (OAC) : l'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 :

On cherche la représentation paramétrique de (AB). On a :

$M(x; y; z) \in (AB) \iff \vec{AM} = u\vec{AB}$, avec $u \in \mathbb{R}$. Comme $\vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ on obtient :

$$M(x; y; z) \in (AB) \iff \begin{cases} x-2 = -3u \\ y-1 = 1u \\ z+1 = 2u \end{cases}, u \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 2-3u \\ y = 1+u \\ z = -1+2u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Donc } M(x; y; z) \in (AB) \cap \mathcal{D} \iff \begin{cases} 2-3u &= 3-t \\ 1+u &= 2+t \\ -1+2u &= 1+2t \end{cases}$$

La deuxième équation donne $u = t + 1$ et en remplaçant u par $t + 1$ dans les deux autres on obtient le système :

$$\begin{cases} u &= t+1 \\ 2-3(t+1) &= 3-t \\ -1+2(1+t) &= 1+2t \end{cases} \iff \begin{cases} u &= t+1 \\ 2-3t-3 &= 3-t \\ -1+2+2t &= 1+2t \end{cases} \iff \begin{cases} u &= t+1 \\ -4 &= 2t \\ 1 &= 1 \end{cases} :$$

d'où $t = -2$ et $u = t + 1 = -2 + 1 = -1$.

En remplaçant t ou u dans l'une des équations paramétriques de (AB) ou (D) on obtient le point commun de coordonnées (5; 0; -3), donc le point C.

Conclusion : l'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3 :

Si un point $M(x; y; z)$ est commun à la droite $\mathcal{D}$ et au plan $\mathcal{P}$ ses coordonnées vérifient l'équation paramétrique de $\mathcal{D}$ et l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, donc le système :

$$\begin{cases} x &= -t+3 \\ y &= t+2 \\ z &= 2t+1 \\ x+5y-2z+3 &= 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

D'où en remplaçant dans l'équation du plan x, y et z par leurs valeurs en fonction de t :

$-t+3+5(t+2)-2(2t+1)+3=0 \iff -t+3+5t+10-4t-2+3=0 \iff 0t=-14$
cette équation n'a pas de solution : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont parallèles (strictement) ; l'affirmation 3 est vraie

Affirmation 4 :

• Le milieu H de $[BC]$ a pour coordonnées $H\left(\frac{-1+5}{2}; \frac{2+0}{2}; \frac{1-3}{2}\right)$, soit $H(2; 1; -1)$.
 $3x_H - y_H - 2z_H - 7 = 3 \times 2 - 1 - 2 \times (-1) - 7 = 0$ donc $H \in Q$.

• Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5-(-1) \\ 0-2 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Le plan Q a pour vecteur normal le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BC} = 2\vec{v}$ donc le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est normal au plan Q .

L'affirmation 4 est vraie.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 12

Polynésie 21 juin 2024

1. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C sont distincts et non alignés : ils définissent le plan $\mathcal{P} = (ABC)$.

Dans la suite, on considère le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. a. On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 10 + 3 - 13 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 6 - 10 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est normal à ce plan

b. On sait qu'alors :

$$M(x; y; z) \in (ABC) \iff 2x - 3y + 1z + d = 0, d \in \mathbb{R}.$$

Par exemple $A(-1; -1; 17) \in (ABC) \iff -2 + 3 + 17 + d = 0 \iff d = -18$,
donc

$$M(x; y; z) \in (ABC) \iff 2x - 3y + z - 18 = 0.$$

3.

$$d : \begin{cases} x = 3t+2 \\ y = t+5 \\ z = 4t+1 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

a. On sait que les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{d}$ de d sont les coefficients de t , soit $\vec{d} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. Les coordonnées de E commun à d et au plan (ABC) vérifient les équations paramétriques de d et l'équation cartésienne de (ABC) soit le système

$$\begin{cases} x = 3t+2 \\ y = t+5 \\ z = 4t+1 \\ 2x-3y+1z-18 = 0 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$$2(3t+2) - 3(t+5) + 4t+1 - 18 = 0 \iff 6t+4-3t-15+4t+1-18=0 \iff 7t-28=0 \iff 7t=28 \iff t=4.$$

D'où les coordonnées de E en remplaçant t par dans les équations de d :
E(14; 9; 17)

4. La droite Δ contient D et a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan (ABC) soit le vecteur $\vec{n}$.

Une équation de Δ est donc $\begin{cases} x = 2t+2 \\ y = -3t+5 \\ z = t+1 \\ 2x-3y+1z-18 = 0 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$

En résolvant le système obtenu en rajoutant l'équation de $\mathcal{P}$ permet d'obtenir $t = 2$, d'où F(6; -1; 3).

Puisque la droite (DF) est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$, la distance DF est la (plus courte) distance du point au plan $\mathcal{P}$.

Or $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, d'où $\|\overrightarrow{DF}\|^2 = DF^2 = 4^2 + (-6)^2 + 2^2 = 16 + 36 + 4 = 56 = 4 \times 14$.

On a donc $DF = \sqrt{4 \times 14} = \sqrt{4} \times \sqrt{14} = 2\sqrt{14}$ (en centaines de mètres).

5. La plus petite distance du point de lancer au plan (ABC) est égale à $2\sqrt{14}$ centaines de mètres : il faut donc calculer le temps mis à la vitesse de $18,6 \text{ m.s}^{-1}$ par un drone pour effectuer ce parcours de D à F.

On sait que $v = \frac{d}{t}$, ou $t = \frac{d}{v} = \frac{DF}{v} = \frac{2\sqrt{14} \times 100}{18,6} \approx 40,23$ (secondes).

Conclusion : le drone n'arrivera pas à temps.

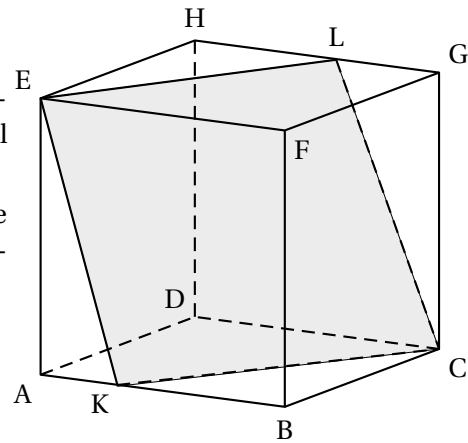
ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 13

Polynésie 5 septembre 2024

On considère un cube ABCDEFGH et l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, on considère les points K et L de coordonnées :

$$K(m; 0; 0) \quad \text{et} \quad L(1-m; 1; 1).$$



1. Le point E a pour coordonnées $(0; 0; 1)$.

Comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, le point C a pour coordonnées $(1; 1; 0)$.

2. Dans cette question, $m = 0$. Ainsi, le point L $(1; 1; 1)$ est confondu avec le point G, le point K $(0; 0; 0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).

- a. • $ABCD$ est un carré donc ses diagonales sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AC}$.
 • Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est normal au plan (ABD) donc $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal à tout vecteur du plan (ABD), donc $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{DB}$.
 • Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GEA) donc le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est normal au plan (GEA).

- b. On déduit de la question précédente que le plan (GEA) a une équation de la forme $1 \times x + (-1) \times y + 0 \times z + d = 0$, soit $x - y + d = 0$.

Le plan (GEA) passe par le point A de coordonnées $(0; 0; 0)$ donc $0 - 0 + d = 0$ et donc $d = 0$.

Le plan (GEA) a donc pour équation $x - y = 0$.

On s'intéresse désormais à la nature de CKEL en fonction du paramètre m .

3. Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle $[0; 1]$.

- a. • $K \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0-m \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 • $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $L \begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-m-1 \\ 1-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{CL}$ donc CKEL est un parallélogramme.

- b. $K \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-m \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = x_{\overrightarrow{KC}} \times x_{\overrightarrow{KE}} + y_{\overrightarrow{KC}} \times y_{\overrightarrow{KE}} + z_{\overrightarrow{KC}} \times z_{\overrightarrow{KE}} = (1-m) \times (-m) + 1 \times 0 + 0 \times (-1) = m(m-1)$$

- c. CKEL est un rectangle si, et seulement si, CKEL possède un angle droit
 si, et seulement si, $\overrightarrow{KC} \perp \overrightarrow{KE}$
 si, et seulement si, $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = 0$
 si, et seulement si, $m(m-1) = 0$
 si, et seulement si, $m = 0$ ou $m = 1$

4. Dans cette question, $m = \frac{1}{2}$.

Ainsi, L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$.

- a.
- K $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et L $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - E $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 - $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ donc $\overrightarrow{KL} \perp \overrightarrow{EC}$

Le parallélogramme CKEL a ses diagonales perpendiculaires donc c'est un losange.

- b.
- $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = m(m-1)$; or $m = \frac{1}{2}$ donc $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$

- $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = KC \times KE \times \cos(\widehat{CKE})$

- $\overrightarrow{KC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } KC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2 = \frac{5}{4} \text{ donc } KC = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

- $\overrightarrow{KE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } KE^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2 = \frac{5}{4} \text{ donc } KE = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{On a donc : } -\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos(\widehat{CKE})$$

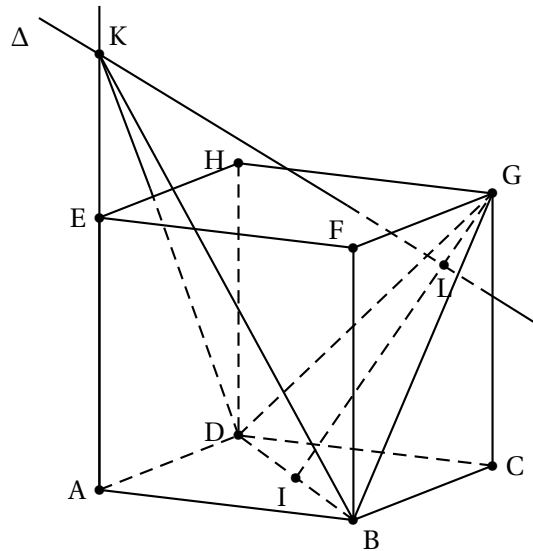
$$\text{Donc } -\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \times \cos(\widehat{CKE}) \text{ et donc } \cos(\widehat{CKE}) = -\frac{1}{5}$$

On en déduit avec la calculatrice que $\widehat{CKE} \approx 101,5^\circ$, soit $\widehat{CKE} \approx 102^\circ$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 14

Métropole Antilles-Guyane 11 septembre 2024

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\overrightarrow{IL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IG}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a. D (0; 1; 0), B (1; 0; 0), I $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$ et G (1; 1; 1)

b. • $\overrightarrow{IL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_L - x_I \\ y_L - y_I \\ z_L - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_L - \frac{1}{2} \\ y_L - \frac{1}{2} \\ z_L - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_L - \frac{1}{2} \\ y_L - \frac{1}{2} \\ z_L \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{IG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_G - x_I \\ y_G - y_I \\ z_G - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{IL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IG} \iff \begin{cases} x_L - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\ y_L - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\ z_L = \frac{3}{4} \times 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_L = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \\ y_L = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \\ z_L = \frac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x_L = \frac{7}{8} \\ y_L = \frac{7}{8} \\ z_L = \frac{3}{4} \end{cases}$$

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$.

- $x_B + y_B - z_B - 1 = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$ donc $B \in \mathcal{P}$.
- $x_D + y_D - z_D - 1 = 0 + 1 - 0 - 1 = 0$ donc $D \in \mathcal{P}$.
- $x_G + y_G - z_G - 1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$ donc $G \in \mathcal{P}$.

Donc le plan (BDG) a pour équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$.

3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

- a. (BDG) a pour équation $x + y - z - 1 = 0$, donc il a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite Δ est perpendiculaire au plan (BDG) donc elle a le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur directeur. Donc la droite Δ est l'ensemble des points M (x; y; z) tels que $\overrightarrow{LM} = t\vec{n}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{LM} = t\vec{n} \iff \begin{cases} x - \frac{7}{8} = t \times 1 \\ y - \frac{7}{8} = t \times 1 \\ z - \frac{3}{4} = t \times (-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{7}{8} + t \\ y = \frac{7}{8} + t \\ z = \frac{3}{4} - t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

b. Soit K le point de coordonnées $\left(0; 0; \frac{13}{8}\right)$.

- On regarde si les coordonnées de K vérifient la représentation paramétrique de Δ , autrement dit on cherche s'il existe un réel t tel que;
$$\begin{cases} 0 = \frac{7}{8} + t \\ 0 = \frac{7}{8} + t \\ \frac{13}{8} = \frac{3}{4} - t \end{cases}$$

Le réel $t = -\frac{7}{8}$ convient donc $K \in \Delta$.

- $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{13}{8} \end{pmatrix}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires donc $K \in (AE)$.

Les deux droites Δ et (AE) sont donc sécantes en K.

- c.
- $\overrightarrow{IL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IG}$ donc $L \in (IG)$ donc $L \in (BDG)$.
 - La droite Δ est perpendiculaire au plan (BDG) en L.
 - $K \in \Delta$

Donc le point L est le projeté orthogonal du point K sur le plan (BDG) .

4. a. K a pour coordonnées $\left(0; 0; \frac{13}{8}\right)$ et L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8}; \frac{7}{8}; \frac{3}{4}\right)$. Donc

$$KL^2 = \left(\frac{7}{8} - 0\right)^2 + \left(\frac{7}{8} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{13}{8}\right)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(-\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64} + \frac{49}{64} + \frac{49}{64} = \frac{147}{64}$$

$$\text{donc } KL = \frac{\sqrt{147}}{8} = \frac{7\sqrt{3}}{8}$$

- b. On admet que le triangle DBG est équilatéral, donc chaque angle mesure $\frac{\pi}{3}$.
Le point I est le milieu de $[BD]$ donc I est aussi le pied de la hauteur issue de G dans le triangle DBG.

Dans le triangle GIB rectangle en I, on a : $\sin(\widehat{IBG}) = \frac{IG}{BG}$.

BG est la diagonale du carré BCGF de côté 1, donc $BG = \sqrt{2}$. De même $BD = \sqrt{2}$.

On a donc $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{IG}{BG}$, donc $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{IG}{\sqrt{2}}$ et donc $IG = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

L'aire du triangle BDG vaut : $\frac{BD \times IG}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- c. Le tétraèdre KDBG a pour base le triangle BDG et pour hauteur KL, donc son volume vaut : $\frac{1}{3} \times \text{aire}(BDG) \times KL = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{7\sqrt{3}}{8} = \frac{7}{16}$

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0; 0; a)$.

- a. On exprime le volume $\mathcal{V}_a$ de la pyramide ABCDK_a en fonction de a .

- La base de la pyramide est le carré ABCD d'aire 1.
- Le point K_a a pour coordonnées $(0; 0; a)$ donc il appartient à la droite (AE) et donc AK_a est la hauteur de la pyramide ABCDK_a.
- De façon évidente, $AK_a = a$.

Donc $\mathcal{V}_a = \frac{1}{3} \times a \times 1 = \frac{a}{3}$.

- b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = -t' + a \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$.

On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).

Les coordonnées de L_a vérifient le système $\begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = -t' + a \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$

On a donc $t' + t' - (-t' + a) - 1 = 0$ soit $3t' = a + 1$ donc $t' = \frac{a+1}{3}$.

$x = t' = \frac{a+1}{3}$; $y = t' = \frac{a+1}{3}$ et $z = -t' + a = -\frac{a+1}{3} + a = \frac{-a-1+3a}{3} = \frac{2a-1}{3}$

Donc les coordonnées du point L_a sont $\left(\frac{a+1}{3}; \frac{a+1}{3}; \frac{2a-1}{3}\right)$.

- c. On cherche le volume du tétraèdre GDBK_a.

- $K_a L_a^2 = \left(\frac{a+1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{a+1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2a-1}{3} - a\right)^2$
 $= \left(\frac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-a-1}{3}\right)^2 = 3 \times \frac{(a+1)^2}{9} = \frac{(a+1)^2}{3}$

Donc $K_a L_a = \frac{a+1}{\sqrt{3}}$.

- Le volume du tétraèdre GDBK_a est :

$$\frac{1}{3} \times K_a L_a \times \text{aire(GBD)} = \frac{1}{3} \times \frac{a+1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a+1}{6}$$

Le tétraèdre GDBK_a et la pyramide ABCDK_a sont de même volume si et seulement si $\frac{a+1}{6} = \frac{a}{3}$, soit $\frac{a+1}{6} = \frac{2a}{3}$, soit $a+1 = 2a$, et donc si $a = 1$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 15

Amérique du Sud 21 novembre 2024

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.

Soit (d_1) la droite passant par A(1 ; 2 ; -1) de vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et (d_2) la droite

dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

1. On a $M(x; y; z) \in (d_1) \iff$ il existe $t' \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{AM} = t' \overrightarrow{u_1} \iff$

$$\begin{cases} x-1 &= 1t' \\ y-2 &= 2t' \\ z-(-1) &= 0t' \end{cases} t' \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x &= 1+t' \\ y &= 2+2t' \\ z &= -1 \end{cases} t' \in \mathbb{R}.$$

2. On démontre que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

• (d_2) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas colinéaire

à $\overrightarrow{u_1}$: les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

• (d_1) et (d_2) sont sécantes s'il existe t et t' deux réels tels que :

$$\begin{cases} 0 &= 1+t' \\ 1+t &= 1+t' \\ 2+t &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 &= t' \\ t &= t' \\ t &= -3 \end{cases} : \text{ce système n'a pas de solution.}$$

Conclusion : les deux droites ne sont ni parallèles ni sécantes, elles sont donc non coplanaires.

3. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On va justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $-2x + y + 5z + 5 = 0$.

Si un point $M(x; y; z)$ appartient au plan défini par le point A et les deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}$, on sait que il existe α et β tels que : $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{u_1} + \beta \overrightarrow{w}$,

$$\text{soit avec les coordonnées : } \begin{cases} x-1 &= 1\alpha+2\beta \\ y-2 &= 2\alpha-1\beta \\ z+1 &= 0\alpha+1\beta \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \alpha+2\beta+1 \\ y &= 2\alpha-\beta+2 \\ z &= \beta-1 \end{cases}$$

Or quels que soient α et β :

$$-2(\alpha+2\beta+1) + 1(2\alpha-\beta+2) + 5(\beta-1) + 5 = -2\alpha-4\beta-2+2\alpha-\beta+2+5\beta-5+5 = 0.$$

Donc une équation cartésienne du plan est $-2x + 1y + 5z + 5 = 0$.

4. a. On a vu que (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires donc (d_1) ne peut appartenir au plan précédent et (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles donc la droite (d_2) est sécante au plan $\mathcal{P}$.

b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathcal{P}$.

Si F est commun à (d_2) et au plan $\mathcal{P}$ ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 1+t \\ z &= 2+t \\ -2x+y+5z+5 &= 0 \end{cases}, \text{ d'où en remplaçant dans la dernière équation :}$$

$$-2 \times 0 + 1 + t + 5(2+t) + 5 = 0 \iff 1+t+10+5t+5=0 \iff 6t+16=0 \iff t = -\frac{8}{3}, \text{ d'où en remplaçant dans } x, y, \text{ et } z, \text{ on obtient } F \left(0; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3} \right).$$

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -1 \right)$.

5. a. Des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ on déduit que :

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{u_1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + 0 = 0 \text{ et } \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0.$$

Conclusion : $\overrightarrow{EF}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs des deux droites (d_1) et (d_2) , $E \in (d_1)$ et $F \in (d_2)$ donc EF est bien la distance entre les droites (d_1) et (d_2) .

b. On a $EF^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9}$.

Conclusion : $EF = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 16

Amérique du Sud 22 novembre 2024

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les trois points $A(3; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ et $C(0; 0; 2)$.

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

1. Soit le vecteur $\vec{n}(2; 3; 3)$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3; 2; 0)$.
 $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = -3 \times 2 + 2 \times 3 + 0 \times 3 = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$
- Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-3; 0; 2)$.
 $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = -3 \times 2 + 0 \times 3 + 2 \times 3 = 0$ donc $\overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires, donc il est normal au plan (ABC).

2. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x-3; y; z)$.

$$\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 2(x-3) + 3y + 3z = 0 \iff 2x + 3y + 3z - 6 = 0$$

Le plan (ABC) a donc pour équation cartésienne :

$$M(x; y; z) \in ABC \iff 2x + 3y + 3z - 6 = 0.$$

3. La droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{n}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{OM} = t \cdot \vec{n}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $(x; y; z)$. Or $\overrightarrow{OM} = t \cdot \vec{n} \iff \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases}$

La droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$ a donc pour représentation

paramétrique : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

4. On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC).

$$\text{Les coordonnées de H vérifient le système } \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 3t \\ 2x + 3y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

On a donc : $2(2t) + 3(3t) + 3(3t) - 6 = 0$, donc $22t = 6$ donc $t = \frac{3}{11}$.

Les coordonnées de H sont donc : $\left(\frac{6}{11}; \frac{9}{11}; \frac{9}{11}\right)$.

5. La distance du point O au plan (ABC) est OH.

$$OH^2 = \left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2 = \frac{36 + 81 + 81}{11^2} = \frac{198}{11^2} \text{ donc } OH = \frac{\sqrt{198}}{11} = \frac{3\sqrt{22}}{11}.$$

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. En prenant pour base le triangle OAB et pour hauteur OC, le volume du tétraèdre OABC vaut $\frac{OC \times \text{aire}(OAB)}{3}$.

$$OC = 2 \text{ et } \text{aire}(OAB) = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$$

Le volume du tétraèdre OABC est donc égal à $\frac{2 \times 3}{3} = 2$.

2. En prenant pour base le triangle ABC et pour hauteur OH, le volume du tétraèdre OABC vaut $\frac{OH \times \text{aire}(ABC)}{3}$.

$$\text{Ce volume vaut } 2 \text{ et } OH = \frac{3\sqrt{22}}{11}, \text{ donc } 2 = \frac{\frac{3\sqrt{22}}{11} \times \text{aire}(ABC)}{3}.$$

$$\text{On en déduit que : } \text{aire}(ABC) = \frac{6}{OH} = \frac{6}{\frac{3\sqrt{22}}{11}} = \frac{6 \times 11}{3\sqrt{22}} = \frac{22}{\sqrt{22}} = \sqrt{22}.$$

3. Soit la propriété : pour le tétraèdre OABC, « le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre ».

- $\text{aire}(OAB) = 3$ donc $(\text{aire}(OAB))^2 = 9$
- $\text{aire}(OAC) = \frac{OA \times OC}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$ donc $(\text{aire}(OAC))^2 = 9$
- $\text{aire}(OBC) = \frac{OB \times OC}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$ donc $(\text{aire}(OBC))^2 = 4$

$$\text{Donc } (\text{aire}(OAB))^2 + (\text{aire}(OAC))^2 + (\text{aire}(OBC))^2 = 9 + 9 + 4 = 22.$$

Comme $\text{aire}(OABC) = \sqrt{22}$, on a :

$$(\text{aire}(OABC))^2 = 22 = (\text{aire}(OAB))^2 + (\text{aire}(OAC))^2 + (\text{aire}(OBC))^2.$$

La propriété est vérifiée.