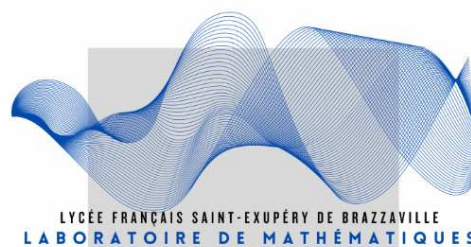




LYCÉE FRANÇAIS

Saint
Exupéry

CONGO BRAZZAVILLE



LYCÉE FRANÇAIS SAINT-EXUPÉRY DE BRAZZAVILLE
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES

BAC PAR THEME

FONCTIONS

19 EXERCICES DE BAC 2022
AVEC DES ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION

EXTRAITS DE FICHIERS LATEX DU SITE DE
L'APMEP

LYCEE FRANCAIS SAINT EXUPERY

BRAZZAVILLE - REP. DU CONGO

PAR VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

54 PAGES

SOMMAIRE

• Exercice 1 (Métropole 11 mai 2022 : fonction exponentielle, suites)	page 3
Solution de l'exercice 1	page 25
• Exercice 2 (Métropole 12 mai 2022 : fonctions numériques, fonction exponentielle)	page 4
Solution de l'exercice 2	page 26
• Exercice 3 (Centres Etrangers 11 mai 2022 : fonction logarithme)	page 6
Solution de l'exercice 3	page 29
• Exercice 4 (Centres Etrangers 11 mai 2022 : fonction exponentielle et suite)	page 7
Solution de l'exercice 4	page 31
• Exercice 5 (Centres Etrangers 12 mai 2022 : fonction exponentielle et suite)	page 7
Solution de l'exercice 4	page 31
• Exercice 6 (Centres Etrangers 12 mai 2022 : fonction logarithme et suite)	page 10
Solution de l'exercice 6	page 33
• Exercice 7 (Asie 17 mai 2022 : Étude de fonctions. Fonction logarithme)	page 11
Solution de l'exercice 7	page 35
• Exercice 8 (Asie 18 mai 2022 : Étude de fonctions. Fonction logarithme)	page 13
Solution de l'exercice 8	page 37
• Exercice 9 (Centres Etrangers G1 18 mai 2022 : Suites, fonctions, fonction exponentielle)	page 14
Solution de l'exercice 9	page 39
• Exercice 10 (Centres Etrangers G1 19 mai 2022 : fonctions, Fonction exponentielle, fonction logarithme, suites)	page 15
Solution de l'exercice 10	page 41
• Exercice 11 (Amérique du nord 18 mai 2022 : fonction exponentielle)	page 16
Solution de l'exercice 11	page 42
• Exercice 12 (Amérique du nord 19 mai 2022 : fonctions, fonction exponentielle) ..	page 17
Solution de l'exercice 12	page 43
• Exercice 13 (Polynésie 30 août 2022 : fonction logarithme)	page 18
Solution de l'exercice 13	page 44
• Exercice 14 (Métropole 8 septembre : fonctions logarithmes et exponentielles, suites)	page 19
Solution de l'exercice 14	page 46
• Exercice 15 (Métropole 9 septembre : fonctions logarithmes, suites)	page 20
Solution de l'exercice 15	page 48
• Exercice 16 (Amérique du Sud 26 septembre 2022 : fonctions, fonction logarithme) ..	page 21
Solution de l'exercice 16	page 49
• Exercice 17 (Amérique du Sud 27 septembre 2022 : fonctions, fonction logarithme) ..	page 22
Solution de l'exercice 17	page 51
• Exercice 18 (Nouvelle-Calédonie 26 octobre 2022 : fonctions, fonction logarithme ; convexité)	page 23
Solution de l'exercice 18	page 52
• Exercice 19 (Nouvelle-Calédonie 27 octobre 2022 : fonctions, fonction logarithme) ..	page 24
Solution de l'exercice 19	page 53

EXERCICE 1

Thèmes : fonction exponentielle, suites Métropole Antilles-Guyane 11 mai 2022

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie. L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes**Partie A : Étude du premier protocole**

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.

On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par

$$f(t) = 3te^{-0,5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1.
 - a. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0; 10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t + 1)e^{-0,5t+1}$.
 - b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.
 - c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ?
Quelle est alors cette quantité maximale ?
2.
 - a. Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 2]$ notée α , dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2; 10]$, notée β , et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.
 - b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n -ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1 , de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
3.
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \leq u_{n+1} < 6$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
 - c. Déterminer la valeur de ℓ . Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 6 - u_n$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.
 - b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .

- c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.
Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

EXERCICE 2

Thèmes : fonctions numériques, fonction exponentielle 2022

Partie A : études de deux fonctions

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 0,06(-x^2 + 13,7x) \quad \text{et} \quad g(x) = (-0,15x + 2,2)e^{0,2x} - 2,2.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables et on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

1. On donne le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

x	0	6,85	$+\infty$
$f(x)$	0	$f(6,85)$	$-\infty$

- Justifier la limite de f en $+\infty$.
 - Justifier les variations de la fonction f .
 - Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- 2.
- Déterminer la limite de g en $+\infty$.
 - Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$ on a : $g'(x) = (-0,03x + 0,29)e^{0,2x}$.
 - Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0 ; +\infty[$. Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g .
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

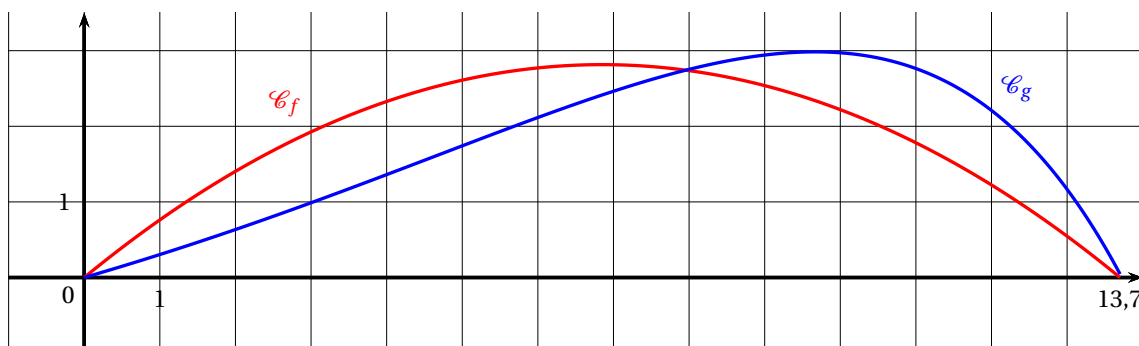
Partie B : trajectoires d'une balle de golf

Pour frapper la balle, un joueur de golf utilise un instrument appelé « club » de golf.

On souhaite exploiter les fonctions f et g étudiées en Partie A pour modéliser de deux façons différentes la trajectoire d'une balle de golf. On suppose que le terrain est parfaitement plat.

On admettra ici que 13,7 est la valeur qui annule la fonction f et une approximation de la valeur qui annule la fonction g .

On donne ci-dessous les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle $[0 ; 13,7]$.



Pour x représentant la distance horizontale parcourue par la balle en dizaine de yards après la frappe, (avec $0 < x < 13,7$), $f(x)$ (ou $g(x)$ selon le modèle) représente la hauteur correspondante de la balle par rapport au sol, en dizaine de yards (1 yard correspond à environ 0,914 mètre).

On appelle « angle de décollage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathcal{C}_f$ ou $\mathcal{C}_g$ selon le modèle) en son point d'abscisse 0. Une mesure de l'angle de décollage de la balle est un nombre réel d tel que $\tan(d)$ est égal au coefficient directeur de cette tangente.

De même, on appelle « angle d'atterrissage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathcal{C}_f$ ou $\mathcal{C}_g$ selon le modèle) en son point d'abscisse 13,7. Une mesure de l'angle d'atterrissage de la balle est un nombre réel a tel que $\tan(a)$ est égal à l'opposé du coefficient directeur de cette tangente.

Tous les angles sont mesurés en degré.

Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe $\mathcal{C}_f$	Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe $\mathcal{C}_g$.

- Première modélisation :** on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $f(x)$ la hauteur correspondante de la balle.

Selon ce modèle :

- Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire?
- Vérifier que $f'(0) = 0,822$.
- Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).
- Quelle propriété graphique de la courbe $\mathcal{C}_f$ permet de justifier que les angles de décollage et d'atterrissage de la balle sont égaux?

- Seconde modélisation :** on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $g(x)$ la hauteur correspondante de la balle.

Selon ce modèle :

- Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire?
On précise que $g'(0) = 0,29$ et $g'(13,7) \approx -1,87$.
- Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).
- Justifier que 62 est une valeur approchée, arrondie à l'unité près, d'une mesure en degré de l'angle d'atterrissage de la balle.

Tableau : extrait d'une feuille de calcul donnant une mesure en degré d'un angle quand on connaît sa tangente :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	$\tan(\theta)$	0,815	0,816	0,817	0,818	0,819	0,82	0,821	0,822	0,823	0,824	0,825	0,826
2	θ en degrés	39,18	39,21	39,25	39,28	39,32	39,35	39,39	39,42	39,45	39,49	39,52	39,56
3													
4	$\tan(\theta)$	0,285	0,286	0,287	0,288	0,289	0,29	0,291	0,292	0,293	0,294	0,295	0,296
5	θ en degrés	15,91	15,96	16,01	16,07	16,12	16,17	16,23	16,28	16,33	16,38	16,44	16,49

Partie C : interrogation des modèles

À partir d'un grand nombre d'observations des performances de joueurs professionnels, on a obtenu les résultats moyens suivants :

Angle de décollage en degré	Hauteur maximale en yard	Angle d'atterrissage en degré	Distance horizontale en yard au point de chute
24	32	52	137

Quel modèle, parmi les deux étudiés précédemment, semble le plus adapté pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel? La réponse sera justifiée.

EXERCICE 3

Thèmes : Fonction logarithme Centres Etrangers 11 mai 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Les six questions sont indépendantes.

Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2022$

- a. n'admet aucune solution. b. admet exactement une solution.
c. admet exactement deux solutions. d. admet une infinité de solutions.

2. Soit la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par :

$$g(x) = x \ln(x) - x^2$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- a. La fonction g est convexe sur $]0; +\infty[$. b. La fonction g est concave sur $]0; +\infty[$.
c. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet exactement un point d'inflexion sur $]0; +\infty[$. d. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet exactement deux points d'inflexion sur $]0; +\infty[$.

3. On considère la fonction f définie sur $] -1 ; 1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

Une primitive de la fonction f est la fonction g définie sur l'intervalle $] -1 ; 1[$ par :

a. $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$

b. $g(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$

c. $g(x) = \frac{x^2}{2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)}$

d. $g(x) = \frac{x^2}{2} \ln(1-x^2)$

4. La fonction $x \mapsto \ln(-x^2 - x + 6)$ est définie sur

a. $] -3 ; 2[$

b. $] -\infty ; 6]$

c. $]0 ; +\infty[$

d. $]2 ; +\infty[$

5. On considère la fonction f définie sur $]0,5 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \ln(2x-1)$$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a. $y = 4x - 7$

b. $y = 2x - 4$

c. $y = -3(x-1) + 4$

d. $y = 2x - 1$

6. L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x+3) < 2 \ln(x+1)$ est :

a. $S =]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$

b. $S =]1 ; +\infty[$

c. $S = \emptyset$

d. $S =]-1 ; 1[$

EXERCICE 4

Thèmes : Fonction exponentielle et suite Centres Etrangers 11 mai 2022

Partie A :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = e^x - x$$

1. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.
3. En déduire que :
si a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$ alors $h(a) - h(b) < 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'écart entre T et $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0.

Cet écart est défini comme la différence des ordonnées des points de T et $\mathcal{C}_f$ de même abscisse.

On s'intéresse aux points d'abscisse $\frac{1}{n}$, avec n entier naturel non nul.

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n ,

$$u_{n+1} - u_n = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)$$

où h est la fonction définie à la partie A.

- b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

4. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées à 10^{-9} des premiers termes de la suite (u_n) .

n	u_n
1	0,718281828
2	0,148721271
3	0,062279092
4	0,034025417
5	0,021402758
6	0,014693746
7	0,010707852
8	0,008148453
9	0,006407958
10	0,005170918

Donner la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle l'écart entre T et $\mathcal{C}_f$ semble être inférieur à 10^{-2} .

EXERCICE 5

Thèmes : fonction exponentielle Centres Etrangers 12 mai 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Aucune justification n'est demandée.

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

a. $f'(x) = e^{-x}$

b. $f'(x) = xe^{-x}$

d. $f'(x) = (1+x)e^{-x}$

A graph of a cubic function is shown on a Cartesian coordinate system. The x-axis is labeled with values -3, -2, -1, 0, and 1. The y-axis is labeled with values -3, -2, -1, 0, 1, 2, and 3. The curve is a continuous red line that passes through the points $(-3, 0)$, $(-2, 3)$, $(-1, 0)$, $(0, -3)$, and $(1, 0)$. The curve has a local maximum at $(-2, 3)$ and a local minimum at $(0, -3)$.

a. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-1 ; 1]$

b. La fonction f est concave sur l'intervalle $[-2 ; 0]$

d. La fonction f' admet un maximum en $x = -1$

$$f(x) = x^3 e^{-x^2}$$

a. $F(x) = -\frac{1}{6}(x^3 + 1)e^{-x^2}$

b. $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 e^{-x^2}$

c. $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2}$

d. $F(x) = x^2(3 - 2x^2)e^{-x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

a. -1

b. 1

c. $+\infty$

d. n'existe pas

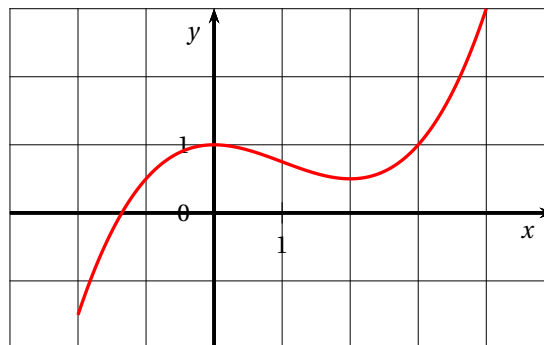
La seule primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f telle que $F(0) = 1$ est la fonction :

a. $x \mapsto 2e^{2x+1} - 2e + 1$
c. $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x+1} - \frac{1}{2}e + 1$

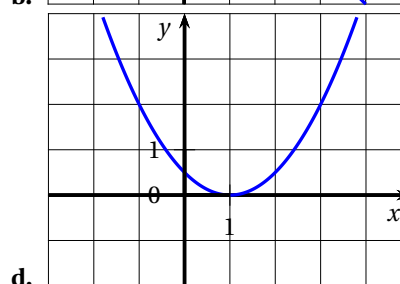
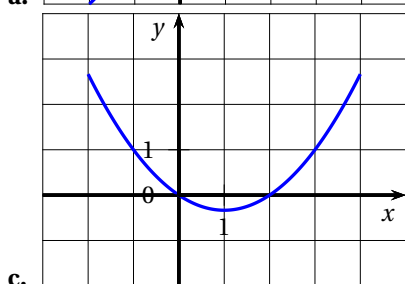
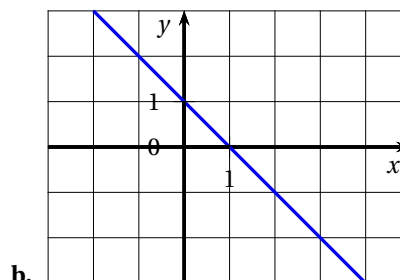
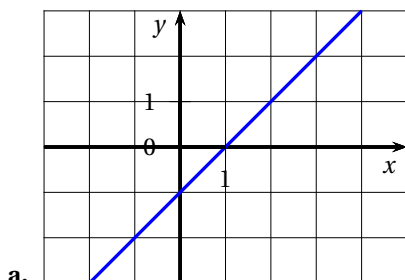
b. $x \mapsto 2e^{2x+1} - e$
d. $x \mapsto e^{x^2+x}$

6.

Dans un repère, on a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-2; 4]$



Parmi les courbes suivantes, laquelle représente la fonction f'' , dérivée seconde de f ?



EXERCICE 6

Thèmes : fonction logarithme et suite Centres Etrangers 12 mai 2022

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x) + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. a. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

- b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0; +\infty[$ et les limites.
 - c. Justifier que pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) \in]0; 1[$.
- 3.
- a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
 - b. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
 - c. En déduire que pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) \geq x$$

4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0; 1[$ et pour tout entier naturel n :

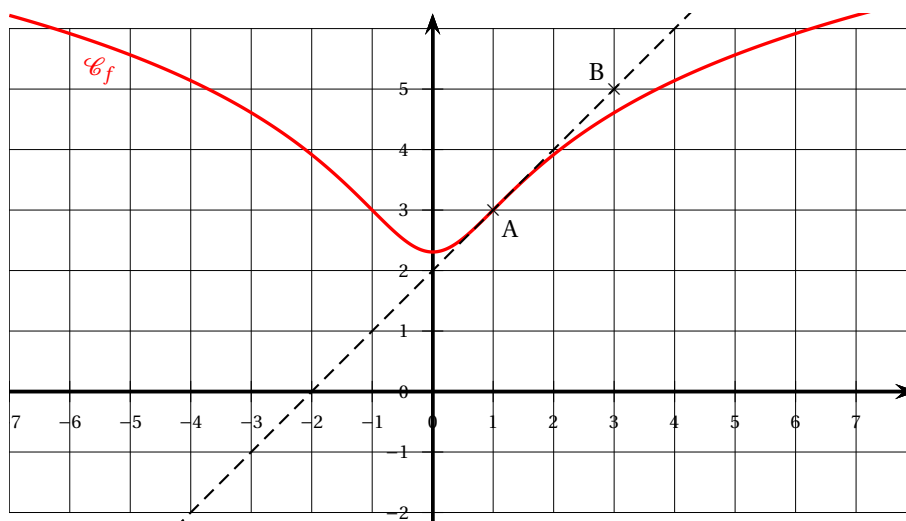
$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 1$.
- b. Dédire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n) .
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

EXERCICE 7

Thèmes : Étude de fonctions. Fonction logarithme Asie 17 mai 2022

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A(1 ; 3) et B(3 ; 5).
On donne ci-dessous $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
 - a. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
 - b. Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2).$$

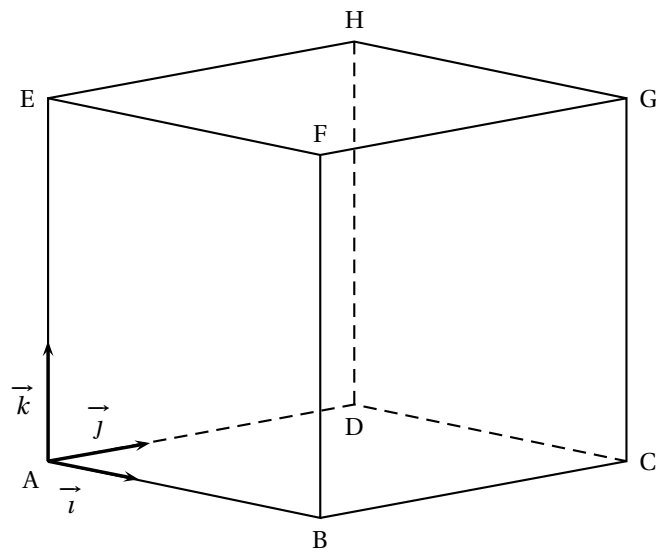
1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. À l'aide du tableau des variations de f , donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x , on a : $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

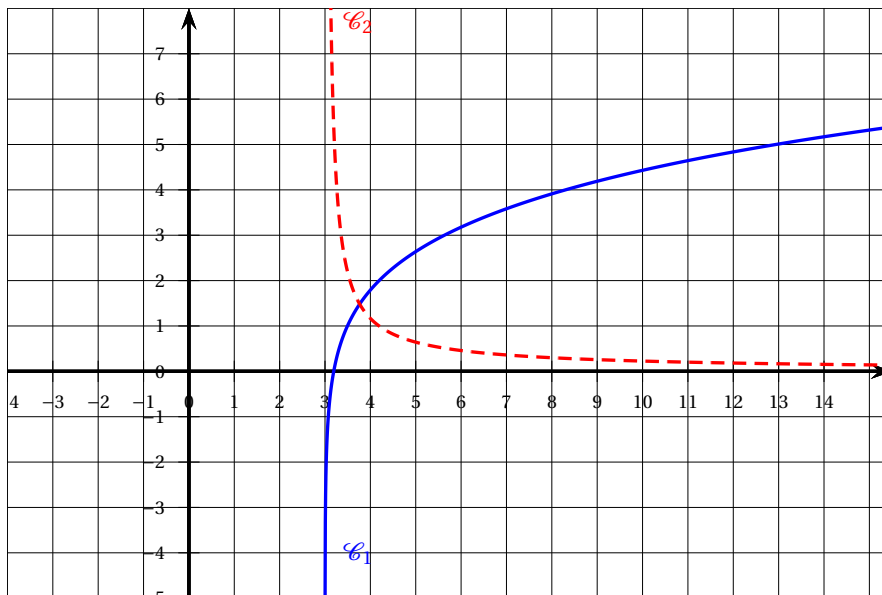
ANNEXE à rendre avec la copie



EXERCICE 8

Thèmes : Étude des fonctions. Fonction logarithme **Asie 18 mai 2022**

Partie A



Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f' , toutes deux définies sur $]3; +\infty[$.

1. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente. Justifier.
2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.
3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f .

Partie B

1. Justifier que la quantité $\ln(x^2 - x - 6)$ est bien définie pour les valeurs x de l'intervalle $]3; +\infty[$, que l'on nommera I dans la suite.
2. On admet que la fonction f de la Partie A est définie par $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ sur I .
Calculer les limites de la fonction f aux deux bornes de l'intervalle I .
En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I .
3.
 - a. Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à I .
 - b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur I .
Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de I .
4.
 - a. Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5; 6[$.
 - b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.
5.
 - a. Justifier que $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.
 - b. Étudier la convexité de la fonction f sur I .

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 1 + x - e^{0,5x-2}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée.

1.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
 - b. Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0,5x \left(2 - \frac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2} \right)$.
En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
2.
 - a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x .
 - b. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est l'intervalle $]4 + 2\ln(2) ; +\infty[$.
3. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On fera figurer la valeur exacte de l'image de $4 + 2\ln(2)$ par f .
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1 ; 0]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie à la partie A.

1.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

- b. En déduire que la suite (u_n) converge. On notera ℓ la limite.
2.
 - a. On rappelle que f vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.
Démontrer que $\ell = 4$.
 - b.

On considère la fonction `valeur` écrite ci-contre dans le langage Python :

```
def valeur (a) :  
    u = 0  
    n = 0  
    while u ≤ a :  
        u = 1 + u - exp(0.5*u - 2)  
        n = n+1  
    return n
```

L'instruction `valeur(3.99)` renvoie la valeur 12.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 10 Thèmes : Fonctions, Fonction exponentielle, Fonction logarithme; Suites Centres
Etrangers G1 19 mai 2022

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $]0; 1]$ par :

$$f(x) = e^{-x} + \ln(x).$$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. On admet que f est dérivable sur $]0; 1]$. On note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0; 1]$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - xe^{-x}}{x}$$

3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]0; 1]$, on a $xe^{-x} < 1$.
En déduire le tableau de variation de f sur $]0; 1]$.
4. Démontrer qu'il existe un unique réel ℓ appartenant à $]0; 1]$ tel que $f(\ell) = 0$.

Partie B

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{10} \\ b_0 = 1 \end{cases} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} = e^{-b_n} \\ b_{n+1} = e^{-a_n} \end{cases}$$

- a. Calculer a_1 et b_1 . On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.
- b. On considère ci-dessous la fonction `termes`, écrite en langage Python.

```
def termes (n) :  
    a=1/10  
    b=1  
    for k in range(0,n) :  
        c = ...  
        b = ...  
        a = c  
    return(a,b)
```

Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction `termes` calcule les termes des suites (a_n) et (b_n) .

2. On rappelle que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$$

- b. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
3. On note A la limite de (a_n) et B la limite de (b_n) .
On admet que A et B appartiennent à l'intervalle $]0; 1]$, et que $A = e^{-B}$ et $B = e^{-A}$.
 - a. Démontrer que $f(A) = 0$.
 - b. Déterminer $A - B$.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. **Affirmation 1** : Pour tout réel x : $1 - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{2}{1 + e^{-x}}$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

Affirmation 2 : L'équation $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

Affirmation 3 : L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en un seul point.

4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x (1 - x^2)$.

Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.

5. **Affirmation 5** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + x} = 0$.

6. **Affirmation 6** : Pour tout réel x , $1 + e^{2x} \geq 2e^x$.

EXERCICE 12

Thèmes : fonctions, fonction exponentielle Amérique du nord 19 mai 2022

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

- Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.
- Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3 ; 4]$ une unique solution qui sera notée α .
- Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
- Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

Partie B

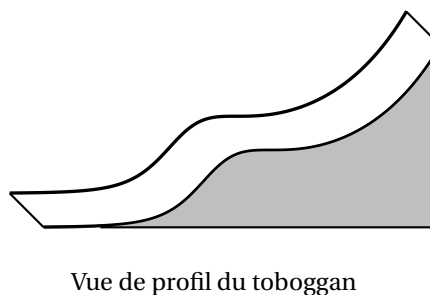
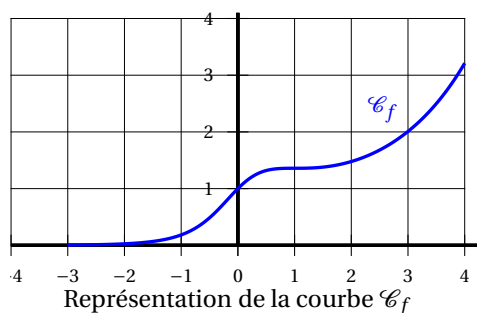
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.
 - Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



- a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.
- b. On admet que la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f , a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant l'expression précédente de f'' , répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

EXERCICE 13

Thèmes : fonction logarithme Polynésie 30 août 2022

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2 \ln x}{x}.$$

1. On note g' la dérivée de g . Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}.$$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$:

x	0	1	e	$+\infty$
Variations de g			$\frac{2}{e}$	
	$-\infty$	0	0	

Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau :

- a. la valeur $\frac{2}{e}$;
 - b. les variations de la fonction g sur son ensemble de définition;
 - c. les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
3. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = [\ln(x)]^2.$$

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

1. Démontrer que sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g .
2. À l'aide de la partie 1, étudier :
 - a. la convexité de la fonction f ;
 - b. les variations de la fonction f .
3. a. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e .
 b. En déduire que, pour tout réel x dans $]0; e]$:

$$[\ln(x)]^2 \geq \frac{2}{e}x - 1.$$

EXERCICE 14 Thèmes : fonctions logarithmes et exponentielles, suites Métropole 8 septembre 2022

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Donner la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Montrer que, pour tout nombre réel $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.
 - b. Justifier le tableau de signes suivant, donnant le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
			-

- c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .
3. Soit k un nombre réel positif ou nul.
- Montrer que, si $0 \leq k \leq \frac{1}{e}$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1; e]$.
 - Si $k > \frac{1}{e}$, l'équation $f(x) = k$ admet-elle des solutions sur l'intervalle $[1; +\infty[$? Justifier.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{\frac{x}{4}}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = e^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g(u_n)$.

- Justifier que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \leq u_{n+1} \leq e$.
- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que f est solution de l'équation :

$$e^{\frac{x}{4}} = x.$$

- En déduire que ℓ est solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$, où f est la fonction étudiée dans la partie A.
- Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite ℓ de la suite (u_n) .

EXERCICE 15

Thèmes : fonction logarithme, suites Métropole 9 septembre 2022

Les parties B et C sont indépendantes

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x - x \ln x,$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

- Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
- Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
- On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = -\ln x$.
 - En déduire les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,5 \\ u_{n+1} &= u_n - u_n \ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0,5 ; 1]$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
2.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
 - b. On note ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x \ln x.$$

1. Pour tout nombre réel k , montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = e^{k-1}$.
2. Vérifier que, pour tout nombre réel k , on a : $x_k = y_k$.

EXERCICE 16

Thèmes : fonctions, fonction logarithme Amérique du Sud 26 septembre 2022

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x^2 [1 - 2 \ln(x)].$$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. Justifier que $g(e)$ est strictement négatif.
2. Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
3.
 - a. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $g'(x) = -4x \ln(x)$.
 - b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
 - d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
4. Dédire de ce qui précède le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

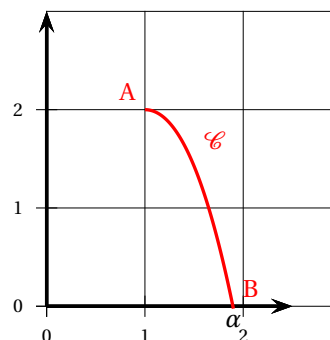
PARTIE B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1; \alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x) + 1]$.
Justifier que la fonction g est concave sur l'intervalle $[1; \alpha]$.

2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 1 et α .

a. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

b. En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1; \alpha]$,
$$g(x) \geq \frac{-2}{\alpha-1}x + \frac{2\alpha}{\alpha-1}.$$



EXERCICE 17

Thèmes : fonctions, fonction logarithme Amérique du Sud 27 septembre 2022

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 2(x-1) - x \ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g . On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

- Calculer $g(1)$ et $g(e)$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +0} g(x)$ en justifiant votre démarche.
- Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
En déduire le tableau des variations de g sur $]0; +\infty[$.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0; +\infty[$:
1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[e; +\infty[$.
On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
- En déduire le tableau de signes de g sur $]0; +\infty[$.

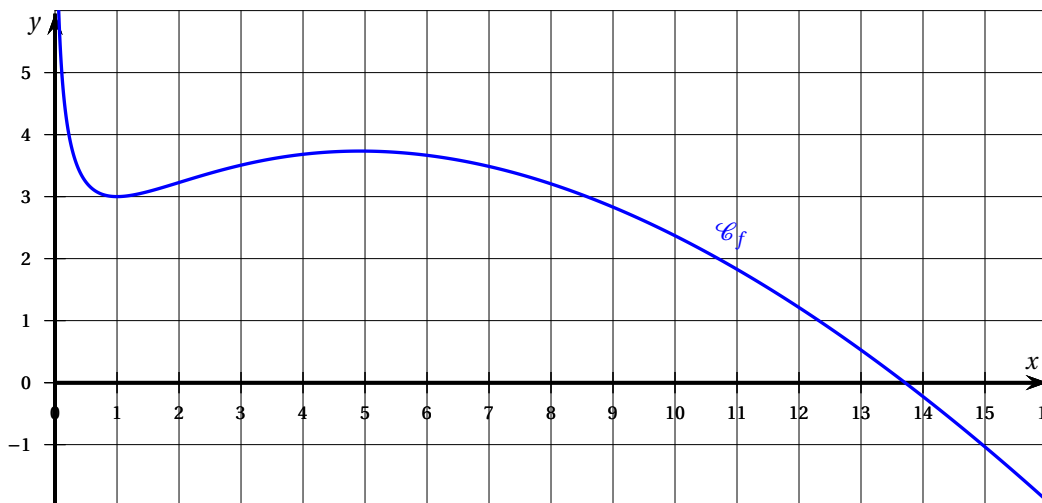
PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$, par

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f .

La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous. On admet que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.
2.
 - a. Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
 - b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$.
3. On admet que, pour tout $x > 0$, la dérivée seconde de f , notée f'' , est définie par $f''(x) = \frac{2-x}{x^2}$.
Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

EXERCICE 18 Thèmes : fonctions, fonction logarithme; convexité Nouvelle-Calédonie 26 octobre 2022

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1.
 - a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
Interpréter graphiquement ce résultat.
 - b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2.
 - a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
En déduire le tableau de variations de f .
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4; 5]$.
4. On admet que, pour tout x de $]0; +\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}.$$

- a. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
- b. On note A le point de coordonnées $(\sqrt{2}; f(\sqrt{2}))$.
Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$. Soit M le point de coordonnées $(t; f(t))$.
En utilisant la question 4. a, indiquer, selon la valeur de t , les positions relatives du segment $[AM]$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.

EXERCICE 19

Thèmes : fonctions, fonction logarithme Nouvelle-Calédonie 27 octobre 2022

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.

On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1.
 - a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.
 - b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x=e$.
 - c. Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - d. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T .
2.
 - a. Calculer la limite de la fonction f en 0.
 - b. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4.
 - a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0; +\infty[$.
On note α cette solution.
 - b. Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4,3; 4,4[$.
 - c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
5. On considère la fonction seuil suivante écrite dans le langage Python :
On rappelle que la fonction `log` du module `math` (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien $\ln$.

```
def seuil(pas) :
    x=4.3
    while x*log (x) - x - 2 < 0:
        x=x+pas
    return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 1

Métropole Antilles-Guyane 11 mai 2022

Partie A

1. a. La fonction f est continue et dérivable sur $[0 ; 10]$. En utilisant les règles de dérivation d'un produit, on obtient :

$$f'(t) = 3e^{-0,5t+1} + 3t \times -0,5e^{-0,5t+1} = e^{-0,5t+1} (+ - 3(0,5t + 1)) = (-1,5t + 3)e^{-0,5t+1}$$

$$\text{Donc } \forall t \in [0 ; 10], f'(t) = 3(-0,5t + 1)e^{-0,5t+1}$$

- b. $\forall t \in [0 ; 10], e^{-0,5t+1} > 0$ donc $f'(t)$ a le même signe que $-0,5t + 1$.
 $-0,5t + 1 \geq 0 \iff x \leq 2$.

$$\text{Dans le tableau : } f(0) = 0, f(2) = 6e^0 = 6 \text{ et } f(10) = 30e^{-5+1} = 30e^{-4}.$$

D'où le tableau de variation de f :

x	0	2	10	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	6	$30e^{-4}$	

- c. Le maximum de la fonction f est atteint pour $t = 2$, et $f(2) = 6$. La dose maximale de 6 mg sera atteinte au bout de 2 heures.
2. a. Sur l'intervalle $[0 ; 2]$, la fonction f est continue et strictement croissante à valeurs dans $[0 ; 6]$. Or $5 \in [0 ; 6]$, donc d'après le corollaire du TVI (théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[0 ; 2]$.
À la calculatrice, $\alpha \approx 1,02$.
- b. D'après le tableau de variations, $f(t) \geq 5 \iff t \in [\alpha ; \beta]$. De plus $\beta - \alpha = 2,44$ (heures).
Donc le traitement sera efficace pendant 2,44 heures soit environ 146 minutes.

Partie A

1. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 %, donc il en reste 70 %. Puis on en injecte à nouveau 1,8 mg. Sachant que $u_0 = 2$, alors $u_1 = 0,7 \times 2 + 1,8 = 3,2$. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang sera de 3,2 mg.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. u_n désigne la quantité de médicament dans le sang au bout de n heures. Une heure plus tard, il ne restera que 70 % de la quantité précédente (70 % de u_n), puis on en ajoute 1,8 mg par injection.

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 1,8.$$

3. a. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} < 6$.

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$. Donc $u_0 \leq u_1 < 6$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : on suppose que si $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \leq u_{n+1} < 6$.

Montrons que $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$.

$$u_n \leq u_{n+1} < 6 \iff 0,7 \times u_n \leq 0,7 \times u_{n+1} < 0,7 \times 6 \iff 0,7u_n \leq 0,7u_{n+1} < 4,2$$

$$\text{donc } 0,7u_n + 1,8 \leq 0,7u_{n+1} + 1,8 < 4,2 + 1,8 \iff 0,7u_n + 1,8 \leq 0,7u_{n+1} + 1,8 < 6.$$

Donc $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n , elle l'est aussi au rang $n + 1$.

D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} < 6$.

b. Nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} < 6$. Cela signifie que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée ℓ .

c. La suite (u_n) converge vers ℓ donc ℓ est l'unique solution de l'équation $\ell = 0,7\ell + 1,8$ (théorème du point fixe).

$$\ell = 0,7\ell + 1,8 \iff 0,3\ell = 1,8 \iff \ell = 6. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$$

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -u_n + 6$.

$$\begin{aligned} \text{a. } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= -u_{n+1} + 6 = -(0,7 \times u_n + 1,8) + 6 = -0,7u_n + 4,2 = 0,7 \left(-u_n + \frac{4,2}{0,7} \right) \\ &= 0,7(-u_n + 6) = 0,7v_n. \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 0,7v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = -u_0 + 6 = 4$.

$$\text{b. } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0,7^n.$$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -u_n + 6$ donc $u_n = -v_n + 6 = 6 - 4 \times 0,7^n$.

$$\text{c. } u_n \geq 5,5 \iff 6 - 4 \times 0,7^n \geq 5,5 \iff -4 \times 0,7^n \geq -0,5 \iff 0,7^n \leq \frac{-0,5}{-4}$$

$$\iff \ln(0,7^n) \leq \ln\left(\frac{1}{8}\right) \iff n \times \ln(0,7) \leq -\ln(8) \iff n \geq -\frac{\ln(8)}{\ln(0,7)} \text{ car } \ln(0,7) < 0$$

$$\text{Donc } n \geq -\frac{2\ln(2)}{\ln(0,7)}. \text{ À la calculatrice : } -\frac{2\ln(2)}{\ln(0,7)} \approx 5,83 \text{ donc } n \geq 6.$$

Cela signifie que $u_6 \geq 5,5$. Il faudra donc au total 7 injections (de l'injection initiale u_0 à la 7^e qui correspond à u_6).

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 2

Métropole Antilles-Guyane 12 mai 2022

Partie A : études de deux fonctions

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 0,06(-x^2 + 13,7x) \quad \text{et} \quad g(x) = (-0,15x + 2,2)e^{0,2x} - 2,2.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables et on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

1. On donne le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

x	0	6,85	$+\infty$
$f(x)$	0	$f(6,85)$	$-\infty$

- a. Justifier la limite de f en $+\infty$.

$$\text{On a } f(x) = 0,06x^2 \left(-1 + \frac{13,7}{x} \right)$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{13,7}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{13,7}{x} = -1$ et par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

- b. Justifier les variations de la fonction f .

La fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = -0,12x + 0,06 \times 13,7 = 0,822 - 0,12x.$$

$$\text{On a } 0,822 - 0,12x > 0 \iff 0,822 > 0,12x \iff \frac{0,822}{0,12} > x \iff x < 6,85.$$

$$\text{De même } f'(x) < 0 \iff x > 6,85.$$

La fonction f est donc croissante sur $[0 ; 6,85]$ et décroissante sur $[6,85 ; +\infty[$.

- c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \iff 0,06(-x^2 + 13,7x) = 0 \iff -x^2 + 13,7x = 0 \iff x(13,7 - x) = 0 \iff$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 13,7 = x \end{cases}.$$

On a donc $S = \{0 ; 13,7\}$.

2. a. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2,2 - 1,5x) = -\infty; \text{ d'autre part } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty.$$

Par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty$.

- b. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$ on a : $g'(x) = (-0,03x + 0,29)e^{0,2x}$.

g est un produit de fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$, et sur cet intervalle :

$$g'(x) = -0,15e^{0,2x} + 0,2(-0,15x + 2,2)e^{0,2x} = e^{0,2x}(-0,15 - 0,03x + 0,44) = (-0,03x + 0,29)e^{0,2x}.$$

- c. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0 ; +\infty[$.

On a donc $g'(x) > 0 \iff (-0,03x + 0,29)e^{0,2x} > 0 \iff -0,03x + 0,29 > 0$ car $e^{0,2x} > 0$ quel que soit le réel x , puis

$$0,29 > 0,03x \iff x < \frac{0,29}{0,03} \iff x < \frac{29}{3}.$$

$$\text{On obtient de la même façon que } g'(x) < 0 \iff x > \frac{29}{3}.$$

La fonction g est donc croissante sur $\left[0 ; \frac{29}{3}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{29}{3} ; +\infty\right[$.

Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g .

g a donc un maximum $g\left(\frac{29}{3}\right) = (-0,15 \times \frac{29}{3} + 2,2)e^{0,2 \times \frac{29}{3}} - 2,2 \approx 2,984$ soit 2,98 au centième près.

- d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

La fonction g croît à partir de $g(0) = 2,2e^0 - 2,2 = 2,2 - 2,2 = 0$ jusqu'à environ 2,98 et décroît ensuite jusqu'en moins l'infini.

Sur l'intervalle $\left[\frac{29}{3} ; +\infty\right[$ la fonction g est strictement décroissante, continue car dérivable sur cet intervalle; comme $0 \in]-\infty ; 2,98[$ il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$.

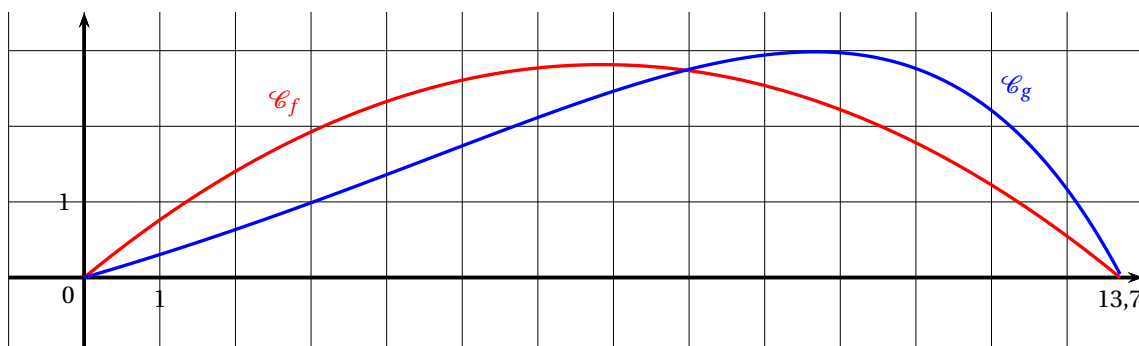
Partie B : trajectoires d'une balle de golf

Pour frapper la balle, un joueur de golf utilise un instrument appelé « club » de golf.

On souhaite exploiter les fonctions f et g étudiées en Partie A pour modéliser de deux façons différentes la trajectoire d'une balle de golf. On suppose que le terrain est parfaitement plat.

On admettra ici que 13,7 est la valeur qui annule la fonction f et une approximation de la valeur qui annule la fonction g .

On donne ci-dessous les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle $[0 ; 13,7]$.

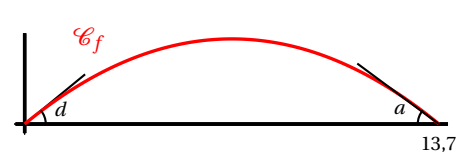
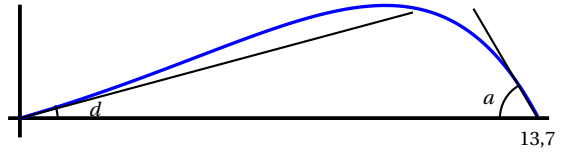


Pour x représentant la distance horizontale parcourue par la balle en dizaine de yards après la frappe, (avec $0 < x < 13,7$), $f(x)$ (ou $g(x)$ selon le modèle) représente la hauteur correspondante de la balle par rapport au sol, en dizaine de yards (1 yard correspond à environ 0,914 mètre).

On appelle « angle de décollage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathcal{C}_f$ ou $\mathcal{C}_g$ selon le modèle) en son point d'abscisse 0. Une mesure de l'angle de décollage de la balle est un nombre réel d tel que $\tan(d)$ est égal au coefficient directeur de cette tangente.

De même, on appelle « angle d'atterrissage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathcal{C}_f$ ou $\mathcal{C}_g$ selon le modèle) en son point d'abscisse 13,7. Une mesure de l'angle d'atterrissage de la balle est un nombre réel a tel que $\tan(a)$ est égal à l'opposé du coefficient directeur de cette tangente.

Tous les angles sont mesurés en degré.

Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe $\mathcal{C}_f$	Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe $\mathcal{C}_g$.
	

- Première modélisation :** on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $f(x)$ la hauteur correspondante de la balle.

Selon ce modèle :

- Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire?
On a vu que le maximum de f sur $[0 ; +\infty[$ est $f(6,85) = 0,06(-6,85^2 + 13,7 \times 6,85) = 2,81535 \approx 2,815$, soit en yards : 28,15.
- Vérifier que $f'(0) = 0,822$.
De $f'(x) = 0,06(-2x + 13,7)$ on déduit que $f'(0) = 0,06 \times 13,7 = 0,822$. Ce nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, donc $f'(0) = \tan d = 0,822$.
- Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième.
(On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).
D'après le tableau donné (colonne I), on a donc $d \approx 39,42$.
- Quelle propriété graphique de la courbe $\mathcal{C}_f$ permet de justifier que les angles de décollage et d'atterrissage de la balle sont égaux?
La courbe est une partie de parabole et celle-ci est symétrique autour de la droite d'équation $x = 6,85$: donc les angles de décollage et d'atterrissage sont égaux.

- Seconde modélisation :** on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $g(x)$ la hauteur correspondante de la balle.

Selon ce modèle :

- a. Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire?

On a vu que le maximum de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est $g\left(\frac{29}{3}\right) \approx 2,98$.

La hauteur maximale de la balle est donc 29,8 (yards).

On précise que $g'(0) = 0,29$ et $g'(13,7) \approx -1,87$.

- b. Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième.
(On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).

Comme $g'(0) = 0,29$ comme dans le premier cas c'est aussi le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0, donc $\tan d \approx 0,29$ et d'après le tableau $d \approx 16,2^\circ$.

- c. Justifier que 62 est une valeur approchée, arrondie à l'unité près, d'une mesure en degré de l'angle d'atterrissage de la balle.

Par contre à l'atterrissage $g'(13,7) \approx -1,87$ donc $\tan a \approx 1,87$ d'où $a \approx 62^\circ$.

Tableau : extrait d'une feuille de calcul donnant une mesure en degré d'un angle quand on connaît sa tangente :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	$\tan(\theta)$	0,815	0,816	0,817	0,818	0,819	0,82	0,821	0,822	0,823	0,824	0,825	0,826
2	θ en degrés	39,18	39,21	39,25	39,28	39,32	39,35	39,39	39,42	39,45	39,49	39,52	39,56
3													
4	$\tan(\theta)$	0,285	0,286	0,287	0,288	0,289	0,29	0,291	0,292	0,293	0,294	0,295	0,296
5	θ en degrés	15,91	15,96	16,01	16,07	16,12	16,17	16,23	16,28	16,33	16,38	16,44	16,49

Partie C : interrogation des modèles

À partir d'un grand nombre d'observations des performances de joueurs professionnels, on a obtenu les résultats moyens suivants :

Angle de décollage en degré	Hauteur maximale en yard	Angle d'atterrissage en degré	Distance horizontale en yard au point de chute
24	32	52	137

Quel modèle, parmi les deux étudiés précédemment, semble le plus adapté pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel? La réponse sera justifiée.

Au vu des observations sur les professionnels on remarque que :

- Le seul résultat confirmé est la distance horizontale 137 en yard;
- L'angle décollage est surestimé avec la première modélisation et sous-estimé avec la seconde;
- la hauteur maximale est sous-estimé dans les deux cas;
- l'angle d'atterrissage est sous-estimé dans le premier cas et surestimé dans le second.

Conclusion : aucun des deux modèles n'est satisfaisant!

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 3

Centres Etrangers 11 mai 2022

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Les six questions sont indépendantes.

Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2022$

- a. n'admet aucune solution. b. admet exactement une solution.
c. admet exactement deux solutions. d. admet une infinité de solutions.

On a : $f(x) = 2022 \iff \ln(1 + x^2) = 2022 \iff e^{\ln(1+x^2)} = e^{2022} \iff 1 + x^2 = e^{2022} \iff x^2 = e^{2022} - 1$: ce nombre étant positif, l'équation a deux solutions : $\sqrt{e^{2022} - 1}$ et $-\sqrt{e^{2022} - 1}$
Réponse **c**.

2. Soit la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par :

$$g(x) = x \ln(x) - x^2$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- a. La fonction g est convexe sur $]0 ; +\infty[$. b. La fonction g est concave sur $]0 ; +\infty[$.
c. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet exactement un point d'inflexion sur $]0 ; +\infty[$. d. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet exactement deux points d'inflexion sur $]0 ; +\infty[$.

Sur $\mathbb{R}_+$, g est dérivable et sur cet intervalle, $f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 2x = \ln(x) - 2x + 1$.

Puis $f''(x) = \frac{1}{x} - 2$.

On a donc $f''(x) = 0 \iff \frac{1}{x} - 2 = 0 \iff \frac{1}{x} = 2 \iff x = \frac{1}{2}$.

Sur $]0 ; +\infty[$, f a un seul point d'inflexion d'abscisse $\frac{1}{2}$. Réponse **c**.

3. On considère la fonction f définie sur $] -1 ; 1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

Une primitive de la fonction f est la fonction g définie sur l'intervalle $] -1 ; 1[$ par :

- a. $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - x^2)$ b. $g(x) = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}$
c. $g(x) = \frac{x^2}{2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)}$ d. $g(x) = \frac{x^2}{2} \ln(1 - x^2)$

Soit la fonction g définie sur $] -1 ; 1[$ par $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - x^2)$.

En posant $u(x) = 1 - x^2$, dérivable et non nulle sur $] -1 ; 1[$, on a $g'(x) = -2x$ et on sait que $g(x) = -\frac{1}{2} \ln u(x)$ entraîne $g'(x) = -\frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2} = f(x)$. Réponse **a**.

4. La fonction $x \mapsto \ln(-x^2 - x + 6)$ est définie sur

- a. $] -3 ; 2[$ b. $] -\infty ; 6[$
c. $]0 ; +\infty[$ d. $]2 ; +\infty[$

La fonction est définie si $-x^2 - x + 6 > 0 \iff x^2 + x - 6 < 0$.

Le trinôme $x^2 + x - 6$ a une racine évidente : 2. Le produit des racines étant égal à -6 , l'autre racine est donc -3 .

Donc $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$. On sait que ce trinôme est positif sauf (ce que l'on cherche) entre les racines -3 et 2 .

La fonction est donc définie sur l'intervalle $] -3 ; 2[$. Réponse **a**.

5. On considère la fonction f définie sur $]0,5 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x - 1)$$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a. $y = 4x - 7$

b. $y = 2x - 4$

c. $y = -3(x - 1) + 4$

d. $y = 2x - 1$

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.

• $f(1) = 1 - 4 + 3\ln(2 - 1) = -3 + 3 \times 0 = -3$;

• $f'(x) = 2x - 4 + 3 \times \frac{2}{2x - 1} = 2x - 4 + \frac{6}{2x - 1}$, d'où $f'(1) = 2 - 4 + \frac{6}{1} = -2 + 6 = 4$.

Une équation de la tangente est donc $y - (-3) = 4(x - 1) \iff y = 4x - 4 - 3 \iff y = 4x - 7$. Réponse **a**.

6. L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x + 3) < 2\ln(x + 1)$ est :

a. $S =] -\infty ; -2[\cup] 1 ; +\infty[$

b. $S =] 1 ; +\infty[$

c. $S = \emptyset$

d. $S =] -1 ; 1[$

D'après l'énoncé il faut que $x > -3$ et que $x > -1$. Il faut donc résoudre l'inéquation dans l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.

$$\ln(x + 3) < 2\ln(x + 1) \iff \ln(x + 3) < \ln(x + 1)^2 \iff x + 3 < (x + 1)^2 \iff 0 < x^2 + 2x + 1 - x - 3 \iff 0 < x^2 + x - 2.$$

Le trinôme $x^2 + x - 2$ a une racine évidente 1 ; comme le produit des racines est égal à -2 , l'autre racine est -2 . On a donc :

$x^2 + x - 2 > 0 \iff (x - 1)(x + 2) > 0$: le trinôme est positif (ce que l'on cherche) sauf entre les racines. D'après la remarque préliminaire $S =] 1 ; +\infty[$. Réponse **b**.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 4

Centres Etrangers 11 mai 2022

Partie A :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = e^x - x$$

1. • $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$, donc par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$.

• Pour $x \neq 0$, $h(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = +\infty$ et par produit de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty;$$

2. Somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$$h'(x) = e^x - 1.$$

$$\bullet h'(x) > 0 \iff e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0;$$

$$\bullet h'(x) < 0 \iff e^x - 1 < 0 \iff e^x < 1 \iff e^x < e^0 \iff x < 0.$$

La fonction h est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ de plus l'infini à $h(0) = e^0 - 0 = 1$, puis croissante sur $\mathbb{R}_+$ de $h(0) = 1$ à plus l'infini.

3. h étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, $0 < a < b \Rightarrow h(0) < h(a) < h(b)$.

Comme $h(0) = 1$, on a donc $1 < h(a) < h(b) \Rightarrow h(a) - h(b) < 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On a $M(x; y) \in T \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

On a $f'(x) = f(x) = e^x$ d'où $f'(0) = e^0 = 1$ et $f(0) = e^0 = 1$.

$$M(x; y) \in T \iff y - 1 = 1(x - 0) \iff y = x + 1.$$

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'écart entre T et $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0.

Cet écart est défini comme la différence des ordonnées des points de T et $\mathcal{C}_f$ de même abscisse.

On s'intéresse aux points d'abscisse $\frac{1}{n}$, avec n entier naturel non nul.

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$$

2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$ et enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 - 0 - 1 = 0$.

3. a. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \exp\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} - 1 - \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1\right) =$

$$\exp\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} - 1 - \exp\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} + 1 = \exp\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} - \exp\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} =$$

$$\exp\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} - \left[\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right] = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right).$$

- b. On a n non nul, donc $0 < n < n+1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow h\left(\frac{1}{n+1}\right) < h\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$

$$h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right) < 0.$$

Finalement pour n non nul, $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

4. Le tableau montre que $u_8 \approx 0,008 < 10^{-2}$.

Donc pour $x = \frac{1}{8}$, l'écart entre la courbe et la tangente est inférieur à un centième.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 5

Centres Etrangers 12 mai 2022

1. Soit f la fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, définie par $x \mapsto \frac{x}{e^x}$.

En utilisant la formule de la dérivée d'un quotient, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1 \times e^x - x \times e^x}{(e^x)^2} = \frac{(1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x} = (1-x)e^{-x}.$$

Réponse c

2. La courbe représentative donnée est celle de f'' . Avec la précision permise par ce graphique, on peut affirmer que f'' est positive sur $[-3; -1]$, négative sur $[-1; 1]$ et s'annule pour $x = -1$.

Cela signifie donc que f' est croissante sur $[-3; -1]$ puis décroissante sur $[-1; 1]$. Donc la fonction f' admet un maximum en $x = -1$.

Réponse d

3. Les fonctions F proposées sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Dérivons chacune d'entre elles. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \text{a. } F'(x) &= -\frac{1}{6} \left(3x^2 e^{-x^2} + (x^3 + 1) \times -2x e^{-x^2} \right) = -\frac{1}{6} e^{-x^2} (3x^2 - 2x^4 - 2x) \\ &= -\frac{1}{6} e^{-x^2} (-2x^3 + 3x^2 - 2x). \end{aligned}$$

$$\text{b. } F'(x) = -\frac{1}{4} \left(4x^3 \times e^{-x^2} + x^4 \times (-2x e^{-x^2}) \right) = -\frac{1}{4} e^{-x^2} (4x^3 - 2x^5).$$

$$\text{c. } F'(x) = -\frac{1}{2} \left(2x \times e^{-x^2} + (x^2 + 1) \times -2x e^{-x^2} \right) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (2x - 2x^3 - 2x) = -\frac{1}{2} \times (-2x^3 e^{-x^2}) = x^3 e^{-x^2} = f(x).$$

$$\text{d. } F'(x) = (6x - 8x^3) \times e^{-x^2} + (3x^2 - 2x^4) \times -2x e^{-x^2} = (4x^5 - 14x^3 + 6x) e^{-x^2}$$

Réponse c

$$4. \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x} \right)} = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}. \text{ Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Réponse b

5. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives notées F . De plus $f(x)$ est de la forme $u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = 2x + 1$. En remarquant que $f(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x+1}$, on peut

alors écrire que pour tout réel x , $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Sachant que $F(0) = 1$ alors

$$\frac{1}{2} e^1 + k = 1 \iff k = 1 - \frac{1}{2} e. \text{ Donc } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1} + 1 - \frac{1}{2} e.$$

Réponse c

6. Avec la précision permise par le graphique, on peut affirmer que la fonction f est concave sur $[-2; 1]$, convexe sur $[1; 4]$ et $f''(1) = 0$ (point d'inflexion). f'' est donc négative sur $[-2; 1]$, positive sur $[1; 4]$ s'annulant en 1.

Réponse a

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 6

Centres Etrangers 12 mai 2022

1. • On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
 • Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, on a par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$ et enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. La fonction f est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$. En utilisant la formule de la dérivée d'un produit, $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

- b. $f'(x) \geq 0 \iff \ln(x) + 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq e^{-1}$.

Dans le tableau : $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) + 1 = -e^{-1} + 1 = 1 - e^{-1} > 0$

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	1		$1 - e^{-1} \approx 0,632$	$+\infty$

- c. $f(1) = 1$. D'après les variations de la fonction f ,

— $\forall x \in]0; e^{-1}]$, $f(x) \in [1 - e^{-1}; 1]$;

— $\forall x \in [e^{-1}; 1]$, $f(x) \in [1 - e^{-1}; 1]$.

Donc $\forall x \in]0; 1]$, $f(x) \in [1 - e^{-1}; 1]$. Or $1 - e^{-1} > 0$ donc $f(x) \in]0; 1]$ pour tout réel x dans $]0; 1]$.

3. a. L'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

Avec $f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$, on en déduit l'équation de (T) : $y = x - 1 + 1 = x$, soit

$$M(x; y) \in (T) \iff y = x.$$

- b. Nous savons que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \ln(x) + 1$.

La fonction f' est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$, et $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc f est convexe sur $]0; +\infty[$.

- c. La courbe représentative d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes. En particulier $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (T) . Donc $\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) \geq x$.

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0; 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a. Montrons par récurrence que $0 < u_n < 1$ pour tout entier naturel n .

Initialisation : on a $u_0 \in]0; 1]$, soit $0 < u_0 < 1$: l'encadrement est vrai au rang 0;

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 < u_n < 1$.

On a vu à la question 2. b. que si $0 < x < 1$, alors $0 < f(x) < 1$.

Donc si $0 < u_n < 1$, alors $0 < f(u_n) < 1$, soit $0 < u_{n+1} < 1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il l'est aussi au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 1$.

- b. D'après la question 3.c, pour tout réel x positif, $f(x) > x$.

De plus pour tout entier naturel n , $u_n > 0$

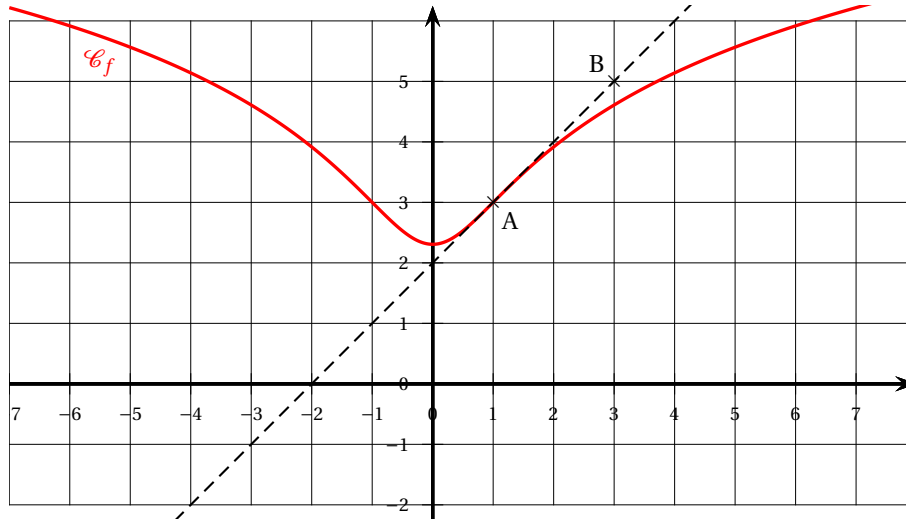
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) > u_n$ donc $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

- c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée l .

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 7

Asie 17 mai 2022

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A(1; 3) et B(3; 5).
On donne ci-dessous $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. On lit sur le graphique : $f(1) = 3$ et $f'(1) = 1$ (nombre dérivé égal au coefficient directeur de la droite (AB)).
2.
 - a. Comme $a \geq 0$ et $x^2 \geq 0$, on a $ax^2 \geq 0$, donc $ax^2 + 1 \geq 1 > 0$: la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $f'(x) = \frac{2ax}{ax^2 + 1}$.
 - b. Les résultats du 1. peuvent s'écrire :
$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(a+1) + b = 3 \\ \frac{2a}{a+1} = 1 \end{cases}.$$

La deuxième équation donne $2a = a + 1 \iff a = 1$ et en reportant dans la première : $\ln(1+1) + b = 3 \iff b = 3 - \ln 2$.
On a donc sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2).$$

1. Quel que soit le réel x , $f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) + 3 - \ln 2 = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2) = f(x)$. La fonction f est donc paire (la représentation graphique de f est donc symétrique autour de l'axe des ordonnées).
2. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ et par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(ax^2 + 1) = +\infty$ et enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
La fonction étant paire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Comme $x^2 + 1 > 0$ quel que soit le réel x , la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle : $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Le dénominateur étant supérieur à zéro le signe de $f'(x)$ est donc celui de $2x$, donc :

$f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Conclusion f est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le nombre $f(0) = \ln 1 + 3 - \ln 2 = 3 - \ln 2$ est donc le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$3 - \ln 2$	$+\infty$

4. D'après le tableau de variations l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions si $k > 3 - \ln 2$.
5. $f(x) = 3 + \ln 2 \iff \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2) = 3 + \ln(2) \iff \ln(x^2 + 1) = 2\ln(2) \iff \ln(x^2 + 1) = \ln 4 \iff x^2 + 1 = 4$ (par croissance de la fonction logarithme), soit $x^2 = 3$, d'où deux solutions $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

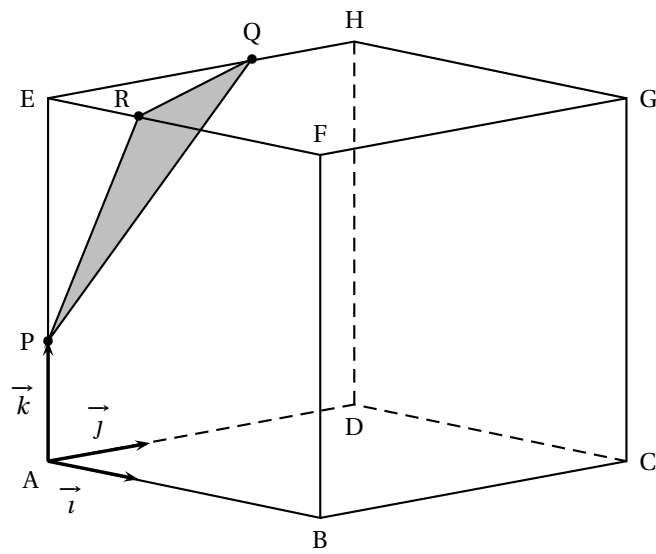
Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$.

1. Il semble qu'il y ait deux points d'inflexion aux points d'abscisses -1 et 1 .
2. Comme $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ soit le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur étant non nul; f' est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
- $$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}.$$
3. On a donc $f''(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff \begin{cases} 1 + x = 0 \\ 1 - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$ Donc $S = \{-1; 1\}$.

La dérivée seconde est positive quand le trinôme $1 - x^2$ est positif soit sur l'intervalle $] -1; 1[$. Donc la fonction f est convexe sur $] -1; 1[$.

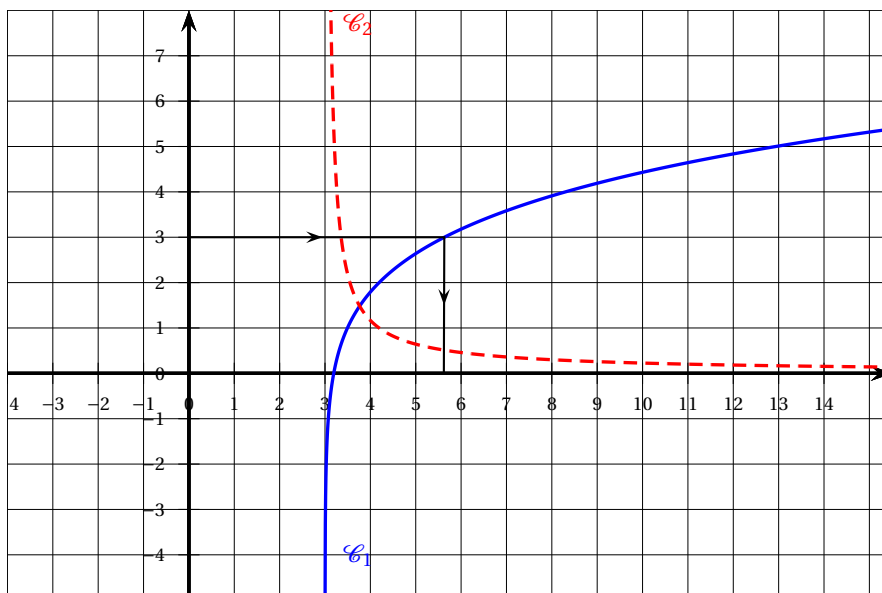
ANNEXE à rendre avec la copie



ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 8

Asie 18 mai 2022

Partie A



Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f' , toutes deux définies sur $]3; +\infty[$.

1. Si $\mathcal{C}_1$ était la représentation de la dérivée, celle-ci serait négative puis positive, donc la fonction serait décroissante puis croissante ce qui n'est pas le cas de la fonction représentée par la courbe $\mathcal{C}_2$.
Donc $\mathcal{C}_2$ est la représentation de la fonction dérivée et $\mathcal{C}_1$ celle de la fonction.
2. On lit approximativement $f(5,6) \approx 3$.
3. f semble concave sur $]3; +\infty[$.

Partie B

1. • $x^2 - x - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 = (x - \frac{1}{2} + \frac{5}{2})(x - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}) = (x+2)(x-3)$.

On sait que ce trinôme est positif sauf sur l'intervalle $[-2; 3]$. Donc $\ln(x^2 - x - 6)$ est bien définie sur $I =]3; +\infty[$;

- On peut calculer $\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2$ et en déduire les racines du trinôme $x^2 - x - 6$: $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$ et faire ensuite la même conclusion.

2. On admet que la fonction f de la Partie A est définie par $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ sur I .

- Limite en $+\infty$: $\ln(x^2 - x - 6) = \ln x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2} = 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} = 1.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, par composition de la fonction logarithme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Limite en 3 : $f(x) = \ln(x+2)(x-3)$.

On a $\lim_{x \rightarrow +3} (x+2)(x-3) = 5 \times 0 = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +3} \ln(x+2)(x-3) = -\infty$. Ceci signifie que la droite verticale d'équation $x = 3$ est asymptote à courbe représentative de la fonction f sur I (soit $\mathcal{C}_1$)

3. a. Sur I , on a vu que $x^2 - x - 6 > 0$, donc la fonction f est dérivable et sur I , on a $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2 - x - 6}$.

- b. $f'(x)$ a le signe du numérateur $2x - 1$:

pour $x > 3$, on a $2x - 1 > 5$ donc $2x - 1 > 0$ et donc $f'(x) > 0$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur I de moins l'infini à plus l'infini.

On dresse le tableau des variations de la fonction f .

x	3	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4. a. La fonction f est strictement croissante sur I et en particulier sur $]5; 6[$.
De plus $f(5) = \ln(25 - 5 - 6) = \ln 14 \approx 2,64 < 3$ et $f(6) = \ln(36 - 6 - 6) = \ln 24 \approx 3,18 > 3$.
La fonction f étant continue car dérivable sur l'intervalle $]5; 6[$, d'après la propriété des valeurs intermédiaires il existe un réel unique α tel que $f(\alpha) = 3$, avec $5 < \alpha < 6$.
- b. La calculatrice donne :
 $f(5,6) \approx 2,984$ et $f(5,7) \approx 3,035$, donc $5,6 < \alpha < 5,7$ puis
 $f(5,63) \approx 2,999$ et $f(5,64) \approx 3,004$ donc $5,63 < \alpha < 5,64$.
5. a. La fonction f' quotient de fonctions dérivables sur I , le dénominateur ne s'annulant pas est elle-même dérivable sur I et sur cet intervalle :
- $$f''(x) = \frac{2(x^2 - x - 6) - (2x - 1)(2x - 1)}{(x^2 - x - 6)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 12 - 4x^2 - 1 - 4x}{(x^2 - x - 6)^2} = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}.$$
- b. Le signe de la dérivée seconde est celui du numérateur puisque $(x^2 - x - 6)^2 > 0$.
Or ce trinôme $-2x^2 + 2x - 13$ n'a pas de racine ($\Delta = 4 - 8 \times 13 = -100 < 0$), donc est négatif en particulier sur I .
Sur I , $f''(x) < 0$: la fonction est concave sur cet intervalle.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 9

Centre Etrangers G1 18 mai 2022

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 1 + x - e^{0,5x-2}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée.

1. a. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,5x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,5x - 2 = -\infty$ et par composition de limites avec $X = 0,5x - 2$, $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ par somme de limites :
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$
- b. Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0,5x \left(2 - \frac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2} \right)$.
- On a $f(x) = 1 + [x - e^{0,5x-2}]$ et en factorisant $0,5x$ dans le crochet :
- $$f(x) = 1 + 0,5x \left[2 - \frac{e^{0,5x-2}}{0,5x} \right] = 1 + 0,5x \left(2 - \frac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2} \right).$$
- En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
Avec $X = 0,5x$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,5x = -\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = -\infty$.

mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{X} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{X} \times e^{-2} = +\infty$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{e^x}{X} \times e^{-2} = -\infty$ et enfin

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{e^x}{X} \times e^{-2} = -\infty$$

Enfin par produit de limites :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 0,5x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{e^x}{X} \times e^{-2} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

2. a. f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 1 - 0,5e^{0,5x-2}.$$

- b. On a dans $\mathbb{R}$,

$$f'(x) < 0 \iff 1 - 0,5e^{0,5x-2} < 0 \iff 1 < 0,5e^{0,5x-2} \iff 2 < e^{0,5x-2}. \text{ par croissance sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de la fonction logarithme népérien } \ln 2 < 0,5x - 2 \iff 2 + \ln 2 < 0,5x \iff 4 + 2\ln 2 < x.$$

Conclusion : $S =]4 + 2\ln(2); +\infty[$

3. On démontrerait de la même façon que $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $] -\infty; 4 + 2\ln 2[$.

La fonction f est donc croissante sur $] -\infty; 4 + 2\ln 2[$ puis décroissante sur $]4 + 2\ln(2); +\infty[$.

$f(4 + 2\ln 2) = 1 + 4 + 2\ln 2 - e^{2+\ln 2-2} = 5 + 2\ln 2 - e^{\ln 2} = 5 + 2\ln 2 - 2 = 3 + 2\ln 2$. C'est le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{0,5x-2} = 0$, on a par somme de limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

4. L'intervalle $[-1; 0]$ est inclus dans l'intervalle $] -\infty; 4 + 2\ln 2[$, donc est croissante sur cet intervalle de $f(-1) = 1 - 1 - e^{-1,5} = -e^{-1,5} < 0$ à $f(0) = 1 - e^{-2} \approx 0,85 > 0$.

La fonction f étant continue puisque dérivable le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe un réel unique $\alpha \in [-1; 0]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie à la partie A.

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

Initialisation : On a $u_0 = 0$, puis $u_1 = f(u_0) = f(0) = 1 - e^{-2} \approx 0,85$.

On a donc bien pour $n = 0$: $u_0 \leq u_1 \leq 4$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

On a vu dans la partie A que sur l'intervalle $] -\infty; 4 + 2\ln 2[$, donc sur l'intervalle $] -\infty; 4[$, la fonction est croissante et l'hypothèse de récurrence donne

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4).$$

$$\text{Or } f(4) = 1 + 4 - e^{2-2} = 5 - 1 = 4.$$

On a donc $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$: l'encadrement est vrai au rang $n + 1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai pour $n \in \mathbb{N}$, il l'est aussi pour $n + 1$. Le principe de récurrence montre donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

- b. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) est croissante et majorée par 4 : elle donc convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \leq 4$.

2. a. $\ell = f(\ell) \iff \ell = 1 + \ell - e^{0,5\ell-2} \iff e^{0,5\ell-2} = 1 \iff 0,5\ell - 2 = 0$ (par croissance de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$), d'où $0,5\ell = 2 \iff \ell = 4$.

La suite (u_n) a pour limite 4.

- b.

L'algorithme calcule les premiers termes de la suite (u_n) jusqu'à celui qui est supérieur à 3,99 : 12 signifie que u_{12} est le premier terme supérieur à 3,99.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 10

Centres Etrangers G1 19 mai 2022

Partie A

1. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue en 0 et $e^{-0} = 1$. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.
2. La fonction f est continue et dérivable sur $]0; 1]$.
$$\forall x \in]0; 1], f'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{x} = \frac{-xe^{-x} + 1}{x} = \frac{1 - xe^{-x}}{x}$$
3. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue, dérivable de dérivée $x \mapsto -e^{-x}$. Or $\forall x \in]0; 1], -e^{-x} < 0$, donc la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante sur $]0; 1]$.
Donc $\forall x \in]0; 1], e^{-1} \leq e^{-x} < e^0 < 1$ donc $0 < e^{-x} < e^0 < 1$. De plus $0 < x \leq 1$ donc $0 < xe^{-x} < 1$.
Cela signifie que $\forall x \in]0; 1], 1 - xe^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0; 1]$. $f(1) = e^{-1} + \ln(1) = e^{-1}$.

Ci-dessous le tableau de variation de la fonction f :

x	0	1
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	e^{-1}

4. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0; 1]$ à valeurs dans $] -\infty; e^{-1}]$. Or $0 \in] -\infty; e^{-1}]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée ℓ , dans $]0; 1]$.
À la calculatrice : $\ell \approx 0,567$.

Partie B

On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 &= \frac{1}{10} \\ b_0 &= 1 \end{cases} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} &= e^{-b_n} \\ b_{n+1} &= e^{-a_n} \end{cases}$$

1. a. $a_1 = e^{-b_0} = e^{-1} \approx 0,37$ et $b_1 = e^{-a_0} = e^{-\frac{1}{10}} \approx 0,90$.
b. Pour utiliser en Python la fonction exponentielle, il faut charger en premier la fonction `exp()` de la librairie "math" : `from math import exp`.

```
from math import exp
def termes(n) :
    a = 1/10
    b = 1
    for k in range(0, n) :
        c = exp(-b)
        b = exp(-a)
        a = c
    return(a, b)
```

2. a. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$.

$$\text{Initialisation : } a_0 = \frac{1}{10} \quad a_1 = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad b_0 = 1 = e^0 \quad b_1 = e^{-\frac{1}{10}}.$$

La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $-1 \leq -\frac{1}{10} \leq 0$ donc, $e^{-1} \leq e^{-\frac{1}{10}} \leq e^0$ et $\frac{1}{e} > \frac{1}{10}$ donc on peut alors affirmer que $0 < a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \leq 1$.

L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$.

Montrons que $0 < a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1} \leq 1$.

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1 \iff e^{-0} > e^{-a_n} \geq e^{-a_{n+1}} \geq e^{-b_{n+1}} \geq e^{-b_n} \geq e^{-1}$$

soit $0 < e^{-1} \leq e^{-b_n} \leq e^{-b_{n+1}} \leq e^{-a_{n+1}} \leq e^{-a_n} < 1 \leq 1$ donc

$0 < a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1} \leq 1$. On obtient ce qu'il fallait démontrer.

L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n , elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$.

- b. Nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leq a_{n+1} \leq 1$ et que $0 \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$.

La suite (a_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (a_n) converge.

De même, la suite (b_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (b_n) converge.

3. a. $A = e^{-B}$ et $B = e^{-A}$.

$$A = e^{-B} \iff \ln(A) = -B = -e^{-A} \text{ donc } \ln(A) + e^{-A} = 0 \text{ donc } f(A) = 0.$$

- b. De même $B = e^{-A} \iff \ln(B) = -A = -e^{-B}$ donc $\ln(B) + e^{-B} = 0$ donc $f(B) = 0$.

Donc A et B sont deux solutions de l'équation $f(x) = 0$. Or d'après la question A.4, cette équation admet une unique solution, donc $A = B$ et $A - B = 0$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 11

Amérique du Nord 18 mai 2022

$$1. \forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{1 + e^x}{1 + e^x} - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{2e^x}{1 + e^x} = \frac{2e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{2}{1 + e^{-x}}$$

Affirmation 1 : Vraie

$$2. g(x) = \frac{1}{2} \iff \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \iff 2e^x = e^x + 1 \iff e^x = 1 \iff x = 0$$

Affirmation 2 : Vraie

3. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \times -e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}.$$

L'équation d'une tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Pour que l'axe des abscisses soit tangent à $\mathcal{C}$, il faut que la courbe $\mathcal{C}$ admette une tangente d'équation $y = 0$ (équation de l'axe des abscisses), donc il faut que $f(a) = 0$ et $f'(a) = 0$.

Sachant que $\forall a \in \mathbb{R}, e^{-a} \neq 0$,

$$f(a) = 0 \iff a^2 e^{-a} = 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0.$$

$$f'(a) = 0 \iff (2a - a^2) e^{-a} = 0 \iff 2a - a^2 = 0 \iff a(2 - a) = 0 \iff a = 0 \text{ ou } a = 2.$$

Donc $a = 0$. Il n'existe donc qu'un seul point où l'axe des abscisses est tangent à $\mathcal{C}$.

Affirmation 3 : Vraie

4. La fonction h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative.

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^x \times (1 - x^2) + e^x \times -2x = e^x (1 - x^2 - 2x) = (-x^2 - 2x + 1) e^x.$$

La fonction h' est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, h''(x) = (-2x - 2) e^x + e^x \times (-x^2 - 2x + 1) = e^x (-2x - 2 - x^2 - 2x + 1) = (-x^2 - 4x - 1) e^x$$

Si $\mathcal{C}_h$ admet des points d'inflexions, alors $h''(x)$ peut s'annuler et changer de signe. Or $e^x > 0$ pour tout réel x , donc étudions le signe de $-x^2 - 4x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

$$-x^2 - 4x - 1 \text{ s'annule pour } x_1 = -2 - \sqrt{3} \text{ et pour } x_2 = -2 + \sqrt{3} \text{ car } \Delta = 12.$$

Le trinôme du second degré s'annule donc deux fois et change donc aussi de signe.

Affirmation 4 : Fausse

$$5. \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{e^x + x} = \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{x}{e^x}}.$$

D'après les croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Affirmation 5 : Fausse

$$6. 1 + e^{2x} \geq 2e^x \iff e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0 \iff (e^x - 1)^2 \geq 0.$$

Cette dernière inégalité est vraie pour tout réel x .

Affirmation 6 : Vraie

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 12

Amérique du Nord 19 mai 2022

Partie A

1. La fonction p est continue et dérivable sur $[-3; 4]$.

$$\forall x \in [-3; 4], p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3; 4], p'(x) > 0$. Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3; 4]$.

2. $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$

La fonction p est continue et strictement croissante sur $[-3; 4]$ à valeurs dans $[-68; 37]$. Or $0 \in [-68; 37]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[-3; 4]$.

3. À la calculatrice, $\alpha \approx -0,2$.

4. D'après les variations de la fonction p , et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3; 4]$:

x	-3	α	4
$p(x)$	$-$	0	$+$

Partie B

1. a. La fonction f est continue et dérivable sur $[-3 ; 4]$ (car $\forall x \in [-3 ; 4], 1+x^2 \neq 0$).

$$\forall x \in [-3 ; 4], f'(x) = \frac{e^x \times (1+x^2) - e^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2} = \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2}.$$
- b. $f'(x) = 0 \iff \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2} = 0 \iff (x-1)^2 e^x = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x-1 = 0 \iff x = 1.$
 Et $f(1) = \frac{e}{2}$. Donc au point d'abscisse 1, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y = \frac{e}{2}$.

2. a. Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :
- convexe sur $[-3 ; 0]$;
 - concave sur $[0 ; 1]$;
 - convexe sur $[1 ; 4]$.

Donc $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

b. $\forall x \in [-3 ; 4] : f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$

Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3 ; 4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.

$\forall x \in [-3 ; 4], (1+x^2)^3 > 0$ et $e^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.

On construit alors le tableau de signe suivant :

x	-3	α	1	4
$p(x)$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	+

La fonction f'' s'annule et change de signe en $x = \alpha$ et $x = 1$. Donc $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 13

Polynésie 30 août 2022

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout réel $x \in]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2 \ln x}{x}$.

1. On note g' la dérivée de g . On a : $g'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - 2 \ln x \times 1}{x^2} = \frac{2-2 \ln x}{x^2}$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$:

x	0	1	e	$+\infty$
Variations de g	$-\infty$	0	$\frac{2}{e}$	0

a. La valeur $\frac{2}{e}$ est l'image de e par f : $f(e) = \frac{2 \ln e}{e} = \frac{2}{e}$.

b. $g'(x) = \frac{2-2 \ln x}{x^2}$ donc $g'(x)$ est du signe de $2-2 \ln x = 2(1-\ln x)$.

- Sur $]0; e[$, $\ln x < 1$ donc $1 - \ln x > 0$ donc $g'(x) > 0$; la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.
- Sur $]e; +\infty[$, $\ln x > 1$ donc $1 - \ln x < 0$ donc $g'(x) < 0$; la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle.

c. On justifie les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2 \ln x = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$.

Donc, par produit de limites, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2 \ln x \times \frac{1}{x} = -\infty$.

- D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

3. On en déduit le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
signe de $g(x)$	$ $	-	0

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = [\ln(x)]^2$.

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

1. $[(u(x)^2)]' = 2u'(x)u(x)$ donc $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2 \ln x}{x} = g(x)$

Donc sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g .

2. a. On étudie la convexité de la fonction f .

D'après les questions précédentes, la fonction g , dérivée de la fonction f , est croissante sur $]0; e[$, donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

De même, la fonction g , dérivée de la fonction f , est décroissante sur $]e; +\infty[$, donc la fonction f est concave sur cet intervalle.

De plus, la fonction g donc la fonction f' , change de sens de variation en $x = e$, donc la courbe représentant la fonction f admet un point d'inflexion en $x = e$.

b. On étudie les variations de la fonction f en utilisant le signe de $f' = g$.

Sur l'intervalle $]0; 1[$, la fonction g est négative donc f' est négative; la fonction f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $]1; +\infty[$, la fonction g est positive donc f' est positive; la fonction f est donc strictement croissante sur cet intervalle.

De plus on peut dire que la fonction f admet un minimum pour $x = 1$.

3. a. Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse e est :

$$y = f'(e)(x - e) + f(e). \text{ On a : } f'(e) = g(e) = \frac{2}{e}; f(e) = (\ln e)^2 = 1$$

$$\text{L'équation devient : } y = \frac{2}{e}(x - e) + 1 \text{ soit } y = \frac{2}{e}x - 2 + 1 \text{ c'est-à-dire } y = \frac{2}{e}x - 1.$$

- b. La courbe représentant f admet un point d'inflexion en $x = e$ donc la tangente en ce point coupe la courbe; à gauche du point, la fonction est convexe donc la courbe est au dessus de cette tangente.

On en déduit que sur $]0; e]$, on a : $[\ln(x)]^2 \geq \frac{2}{e}x - 1$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 14

Métropole 8 septembre 2022

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

L'axe des abscisses est asymptote horizontale au graphe de la fonction f au voisinage de plus l'infini.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

- a. En dérivant $f(x)$ comme un quotient, on obtient pour $x \geq 1$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

- b. Quel que soit x , $x^2 \geq 0$, le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur $1 - \ln x$:

- $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff e > x : f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1; e]$;
- $1 - \ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff e < x : f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[e; +\infty[$.
- $1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff e = x$.

On a donc le tableau de signes de $f'(x)$:

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\emptyset$	-

- c. $f(1) = 0$ et $f(e) = \frac{1}{e}$; on dresse le tableau de variations de la fonction f sur $[1; +\infty[$.

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\emptyset$	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{e}$	0

3. a. D'après le tableau de variations sur l'intervalle $[1; e]$, la fonction est strictement croissante de 0 à $\frac{1}{e}$: l'équation $f(x) = k$ avec $0 \leq k \leq \frac{1}{e}$ a donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires une solution unique.

- b. D'après le tableau de variations $f(x) \leq \frac{1}{e}$ (maximum de f) : l'équation $f(x) = k$ avec $k > \frac{1}{e}$ n'a donc pas de solution

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{\frac{x}{4}}$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = e^{\frac{u_n}{4}} \text{ c'est-à-dire : } u_{n+1} = g(u_n).$$

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}$: produit de deux facteurs supérieurs à zéro, cette dérivée est supérieure à zéro, donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n \leq u_{n+1} \leq e$.

- *Initialisation*

$u_0 = 1$ et $u_1 = e^{u_0} = e^1 = e$. On a bien : $u_0 \leq u_1 \leq e$; la propriété est vraie pour $n = 0$.

- *Hérédité*

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq u_{n+1} \leq e$.

Par croissance de la fonction g , on a : $g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(e)$ soit

$$u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq g(e)$$

Or $g(e) = e^{\frac{e}{4}} \approx 1,97$; donc $g(e) \leq e$ et l'encadrement précédent devient :

$$u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq e : \text{ la propriété est vraie au rang } n+1.$$

- *Conclusion*

L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il est vrai au rang $n+1$; d'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq e$.

3. L'encadrement précédent montre :

- que la suite (u_n) est croissante;
- que la suite (u_n) est majorée par e .

Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite inférieure ou égale à e .

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ est solution de l'équation : $e^{\frac{x}{4}} = x$.

4. Quel que soit $x > 0$, $e^{\frac{x}{4}} = x \iff \frac{x}{4} = \ln x$, par croissance de la fonction $\ln$.

Or $\frac{x}{4} = \ln x \iff \frac{1}{4} = \frac{\ln x}{x}$, soit finalement : $f(x) = \frac{1}{4}$ avec f fonction définie dans la partie A.

5. On a : $e < 4$ donc $\frac{1}{4} < \frac{1}{e}$ donc $0 < \frac{1}{4} \leq \frac{1}{e}$.

D'après la question 3. a. de la partie A, l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ a donc une solution unique sur l'intervalle $[1; e]$.

La calculatrice donne : $f(1) = 0$ et $f(2) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,346$;

$f(1,4) \approx 0,24$ et $f(1,5) \approx 0,27$, donc $1,4 < \ell < 1,5$;

$f(1,42) \approx 0,247$ et $f(1,43) \approx 0,251$, donc $1,42 < \ell < 1,43$;

$f(1,429) \approx 0,2498$ et $f(1,430) \approx 0,2501$, donc $1,429 < \ell < 1,430$;

Finalement $\ell \approx 1,43$ au centième près.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 15

Métropole 9 septembre 2022

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - x \ln x$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. On cherche la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

On sait que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$.

2. On cherche la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

$$f(x) = x(1 - \ln x).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln x = -\infty$$

Par produit de limites, on déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = 1 - 1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x} = -\ln x$.

b. On détermine le signe de $f'(x)$:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		0	+
$f'(x)$		0	-

$f(1) = 1 - \ln 1 = 1$; on établit le tableau des variations de la fonction f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	0	1	$-\infty$

4. On résout l'équation $f(x) = x$ sur $]0; +\infty[$.

$$f(x) = x \iff x - x \ln x = x \iff -x \ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$$

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = u_n - u_n \ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0,5; 1]$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

- Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 0,5$ et $u_1 = f(u_0) = f(0,5) \approx 0,85$.
On a donc $0,5 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$, ce qui vaut dire que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- On suppose la propriété vraie au rang n , c'est-à-dire que $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
La fonction f est croissante sur $[0,5; 1]$ donc $f(0,5) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$.
Or $f(0,5) \approx 0,85 \geq 0,5$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(1) = 1$.
On a donc : $0,5 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$, donc la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0 ; de plus elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n .

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n , on a : $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

2. a. Des inégalités $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$, on peut déduire :

- $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante ;
- $u_n \leq 1$ donc la suite (u_n) est majorée par 1.

D'après le théorème de la convergence monotone, on peut en déduire que la suite (u_n) est convergente.

- b. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .

Pour tout n , on a $f(u_n) = u_{n+1}$. La fonction f étant continue, la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie donc $f(\ell) = \ell$.

L'équation $f(x) = x$ a pour solution $x = 1$ donc on peut dire que $\ell = 1$.

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f_k(x) = kx - x \ln x$.

1. On étudie les variations de la fonction f_k .

$$f'_k(x) = k - \ln x - x \times \frac{1}{x} = k - 1 - \ln x$$

- $f'_k(x) = 0 \iff k - 1 - \ln x = 0 \iff k - 1 = \ln x \iff e^{k-1} = x$
- $f'_k(x) > 0 \iff k - 1 - \ln x > 0 \iff k - 1 > \ln x \iff e^{k-1} > x$

Donc $f'_k(x) > 0$ si $x < e^{k-1}$, $f'_k(x) = 0$ si $x = e^{k-1}$ et $f'_k(x) < 0$ si $x > e^{k-1}$.

On en déduit que la fonction f_k admet un maximum y_k atteint pour $x_k = e^{k-1}$.

2. $x_k = e^{k-1}$ donc

$$\begin{aligned} y_k = f_k(x_k) &= kx_k - x_k \ln x_k = k e^{k-1} - e^{k-1} \ln e^{k-1} = k e^{k-1} - e^{k-1} (k-1) \\ &= k e^{k-1} - k e^{k-1} + e^{k-1} = e^{k-1} = x_k \end{aligned}$$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 16

Amérique du Sud 26 septembre 2022

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 1 + x^2[1 - 2 \ln(x)]$.

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. $g(e) = 1 + e^2(1 - 2 \ln(e)) = 1 + e^2(1 - 2) = 1 - e^2$
 $e > 2$ donc $e^2 > 4$ donc $1 - e^2 < 0$, et donc $g(e) < 0$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2 \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(1 - 2 \ln(x)) = -\infty$.
 On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

3. a. Pour $x \in]0 ; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = 2x(1 - 2 \ln(x)) + x^2 \left(-\frac{2}{x} \right) = 2x - 4x \ln(x) - 2x = -4x \ln(x).$$

- b. Pour étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$, on détermine le signe de $g'(x)$ sur cet intervalle.

x	0	1	$+\infty$
$-4x$		-	-
$\ln(x)$	-	0	+
$g'(x) = -4x \ln(x)$	+	0	-

Donc la fonction g

- est strictement croissante sur $]0; 1[$;
- est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$;
- admet en $x = 1$ un maximum égal à $g(1) = 1 + 1^2(1 - \ln(1)) = 2$.

- c. On trace le tableau des variations de la fonction g sur $]1; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	-
$g(x)$		2	$-\infty$

D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $]1; +\infty[$. On appelle α cette solution.

- d. $\left. \begin{array}{l} g(1) = 2 > 0 \\ g(2) \approx -0,55 < 0 \end{array} \right\}$ donc $\alpha \in [1; 2]$
 $\left. \begin{array}{l} g(1,8) \approx 0,43 > 0 \\ g(1,9) \approx -0,024 < 0 \end{array} \right\}$ donc $\alpha \in [1,8; 1,9]$
 $\left. \begin{array}{l} g(1,89) \approx 0,024 > 0 \\ g(1,90) \approx -0,024 < 0 \end{array} \right\}$ donc $\alpha \in [1,89; 1,90]$

4. On en déduit le signe de la fonction g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

x	1	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

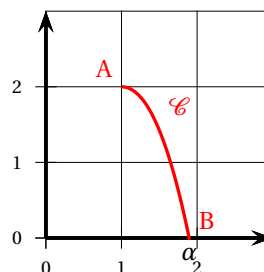
PARTIE B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]1; \alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x) + 1]$.

Sur $]1; \alpha]$, $\ln(x) \geq 0$ donc $\ln(x) + 1 > 0$ donc $-4(\ln(x) + 1) < 0$.

On en déduit que $g''(x) < 0$ et donc que la fonction g est concave sur $]1; \alpha]$.

2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 1 et α .



- a. La droite (AB) a pour équation réduite :

$$\begin{aligned} \frac{y - y_A}{x - x_A} &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \iff \frac{y - 2}{x - 1} = \frac{0 - 2}{\alpha - 1} \iff y = \frac{-2(x - 1)}{\alpha - 1} + 2 \\ &\iff y = \frac{-2}{\alpha - 1}x + \frac{2}{\alpha - 1} + \frac{2\alpha - 2}{\alpha - 1} \iff y = \frac{-2}{\alpha - 1}x + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \end{aligned}$$

- b. Sur l'intervalle $[1; \alpha]$, la fonction est concave, donc sa courbe représentative est située au dessus de toute sécante, donc au dessus du segment $[AB]$.

On en déduit que sur $[1; \alpha]$, on a : $g(x) \geq \frac{-2}{\alpha-1}x + \frac{2\alpha}{\alpha-1}$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 17

Amérique du Sud 27 septembre 2022

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 2(x-1) - x \ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g . On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

1. Calculer $g(1)$ et $g(e)$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +0} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
En déduire le tableau des variations de g sur $]0; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0; +\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[e; +\infty[$.
On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0; +\infty[$.

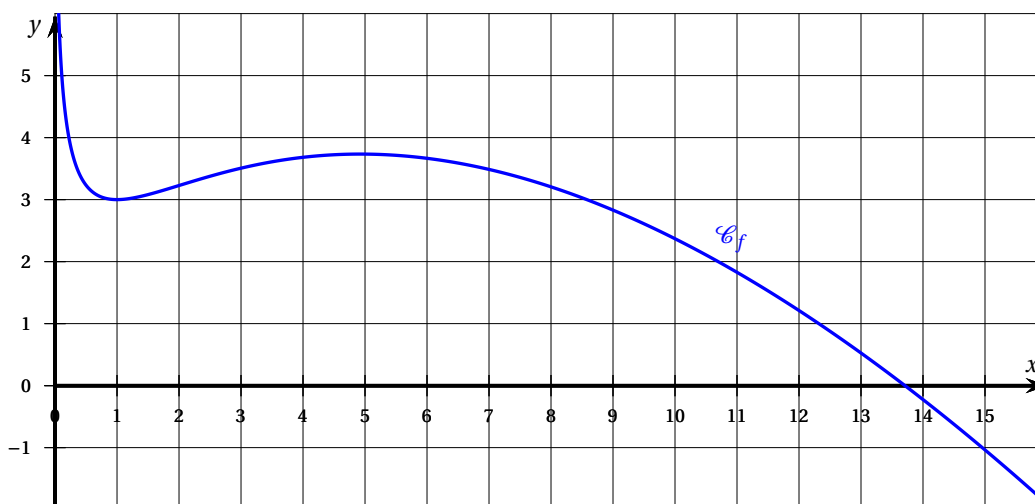
PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$, par

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f .

La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous. On admet que : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.
2.
 - a. Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
 - b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$.
3. On admet que, pour tout $x > 0$, la dérivée seconde de f , notée f'' , est définie par $f''(x) = \frac{2-x}{x^2}$.
Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 18

Nouvelle-Calédonie 26 octobre 2022

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

1.
 - a. On a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} -6x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} -4\ln x = -\infty$ et par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.
Graphiquement ce résultat montre que la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0.
 - b. On a puisque $x > 0$, $x^2 - 6x = x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right)$.
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$, donc
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{6}{x} = 1$ (par somme de limites), puis
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, d'où
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right) = +\infty$ (par produit de limites); enfin
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, donc finalement :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (par somme de limites).

2. a. Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, f est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 2x - 6 + 4 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}.$$

- b. Comme $x > 0$, le signe du quotient est celui du numérateur, donc du trinôme $2x^2 - 6x + 4$ ou plus simplement du trinôme $x^2 - 3x + 2$.

Celui-ci a une racine évidente : 1 et l'autre 2 (puisque le produit des racines est 2).

On a alors que $f'(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $]1; 2[$ où $f'(x) < 0$

La fonction f est donc croissante sauf sur l'intervalle $]1; 2[$ où elle est décroissante.

On a $f(1) = 1 - 6 + 4 \ln 1 = 0 - 5 = -5$ et $f(2) = 4 - 12 + 4 \ln 2 = 4 \ln 2 - 8 \approx -5,23$.

D'où le tableau de variations :

x	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
f	$-\infty$	-5	$\ln(2) - 8$	$+\infty$

3. • On a $f(4) = 16 - 24 + 4 \ln 4 = -8 + 8 \ln 2 \approx -2,45$ et $f(5) = 25 - 30 + 4 \ln 25 = 4 \ln 5 - 5 \approx 1,44$;

- Sur l'intervalle $[4; 5]$, la fonction est continue car dérivable et strictement croissante de $f(4) < 0$ à $f(5) > 0$, donc :

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in]4; 5[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

4. $f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}.$

- a. On a $2x^2 - 4 = 0 \iff 2(x^2 - 2) = 0 \iff x^2 - 2 = 0 \iff (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0 \iff$
 $\begin{cases} x + \sqrt{2} = 0 \\ x - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$

Le trinôme, donc $f''(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ ou ici puisque $x > 0$, $f''(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $]0; \sqrt{2}[$. Conclusion :

- Sur l'intervalle $]0; \sqrt{2}[$, $f''(x) < 0$, la fonction f est concave;
- Sur l'intervalle $]\sqrt{2}; +\infty[$, $f''(x) > 0$, la fonction f est convexe;
- $f''(\sqrt{2}) = 0$: le point d'abscisse $\sqrt{2}$, donc d'ordonnée $f(\sqrt{2}) = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \ln \sqrt{2} = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \times \frac{1}{2} \ln 2 = 2 - 6\sqrt{2} + 2 \ln 2$ est le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$, car en ce point la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

- b. • Pour $k \in]0; \sqrt{2}[$, $[AM_k]$ est une corde de la courbe d'une fonction concave donc $[AM_k]$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$.
- Pour $k \in]\sqrt{2}; +\infty[$, $[AM_k]$ est une corde de la courbe d'une fonction convexe donc $[AM_k]$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 19

Nouvelle-Calédonie 27 octobre 2022

Principaux domaines abordés : fonctions, fonction logarithme.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x) - x - 2.$$

1. a. Somme de produits de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, f est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x.$$

- b. On a $f(e) = e \ln e - e - 2 = -2$.

$$\text{De plus } f'(e) = \ln e = 1.$$

$$\text{On sait que } M(x; y) \in (T) \iff y - (-2) = 1(x - e) \iff y = x - 2 - e.$$

- c. De $f'(x) = \ln x$, on en déduit que $f''(x) = \frac{1}{x}$.

Comme $x > 0$, on a donc $f''(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$: la fonction f est donc convexe sur cet intervalle.

- d. Le résultat précédent montre que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la tangente T .

2. a. On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, que $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$

- b. On a pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, on peut écrire :

$$f(x) = x [\ln(x) - 1] - 2.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, on a par produit de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. On a $f'(x) = \ln x$. On sait que :

- sur $]0; 1[$, $\ln x < 0$: donc f décroît sur cet intervalle;
- sur $]1; +\infty[$, $\ln x > 0$: donc f croît sur cet intervalle;
- $f(1) = -1 - 2 = -3$ est donc le minimum de f sur $]0; +\infty[$.

D'où le tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	-2	-3	$+\infty$

4. a. Le tableau de variations montre que sur l'intervalle $]1; +\infty[$, f est strictement croissante de -3 à plus l'infini.

f étant continue car dérivable, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe un réel unique α de $]1; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

- b. On a $f(4,3) \approx -0,028$ et $f(4,4) \approx 0,119$.

D'après le même théorème ceci montre que $\alpha \in]4,3; 4,4[$.

- c. Conclusion :

- sur $]0; \alpha[$, $f(x) < 0$;
- sur $] \alpha; +\infty[$, $f(x) > 0$;
- $f(\alpha) = 0$.

La fonction `seuil(0.01)` renvoie la valeur 4,32.

Ceci donne l'encadrement de α au centième près : $4,31 < \alpha < 4,32$.