LYCÉE FRANÇAIS SAINT-EXUPÉRY DE BRAZZAVILLE
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES

LYCÉE INTERNATIONAL FRANÇAIS
SAINT EXUPÉRY
BRAZZAVILLE CONGO

ANNALES DU BAC MATHÉMATIQUES 2024

FONCTIONS

Exercices extraits du site de l'APMEP

PAR VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

SUJETS ET CORRIGÉS
60 PAGES

LYCÉE INTERNATIONAL FRANÇAIS SAINT EXUPÉRY
RÉP. DU CONGO

SOMMAIRE

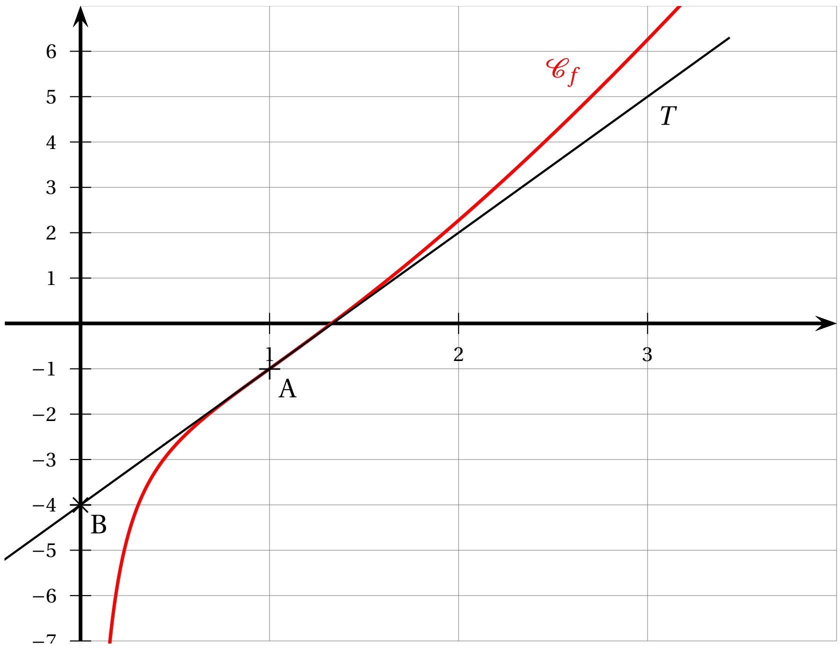
Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1\,;\,-1)$.

Cette tangente passe également par le point $B(0\,;\,-4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
   Que semble représenter le point A pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   a. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,
   $$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$
3. **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   b. Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Exercice 2

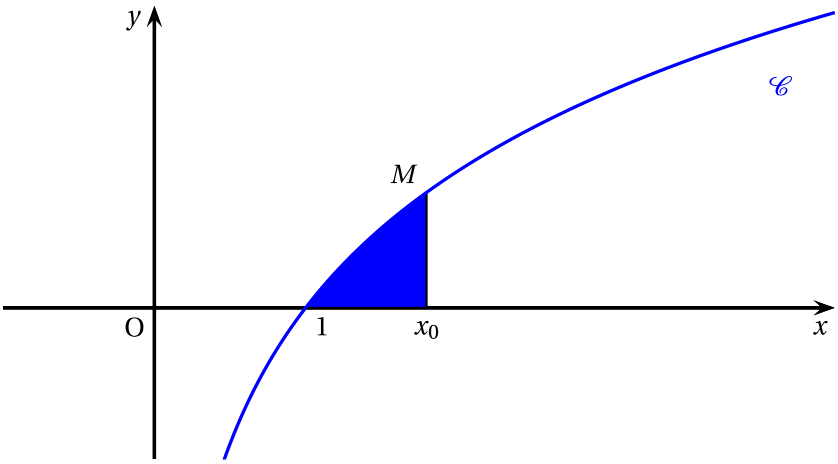
Amérique du Nord - 22 mai 2024

Soit a un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

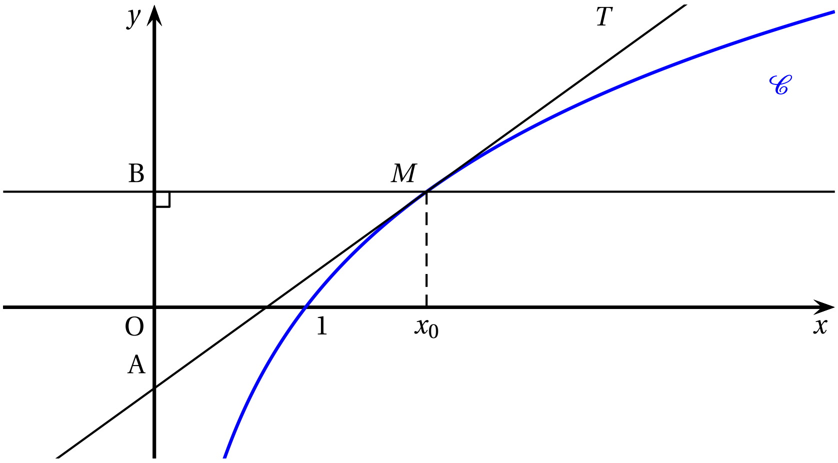
$$f(x) = a\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a[x\ln(x) - x]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire l'aire du domaine bleuté en fonction de a et de x_0.



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera.
   Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.

EXERCICE 3 — Centres étrangers 5 juin 2024

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. **a.** Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.
   b. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

   $$f'(x) = 2(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

   c. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n,

   $$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

   $$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.
4. **a.** Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln(2) - u_n$ est positif.

b. On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.

Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.1
    while ln (2) − u ... 0.0001 :
        n = n+1
        u = ...
    return (u, n)
```

c. Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction seuil ().

EXERCICE 4

Centres étrangers J2 - 5 juin 2024

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 1.

   b. En déduire une interprétation graphique.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f'(x) = \frac{(x-2)\,\mathrm{e}^{x}}{(x-1)^2}.$$

   b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f''(x) = \frac{\left(x^2-4x+5\right)\mathrm{e}^{x}}{(x-1)^3}.$$

   a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

$$\mathrm{e}^{x} \geqslant (-2x-1)(x-1).$$

5. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

EXERCICE 5

Centres étrangers J2 - 5 juin 2024

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}.$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. On considère le script Python ci-dessous :

```
from math import *
def seuil(n) :
    u = 5
    i = 0
    ℓ = (1 + sqrt(5))/2
    while abs(u-ℓ) >= 10**(-n) :
        u = sqrt(u+1)
        i = i+1
    return(i)
```

On rappelle que la commande **abs(x)** *renvoie la valeur absolue de x.*

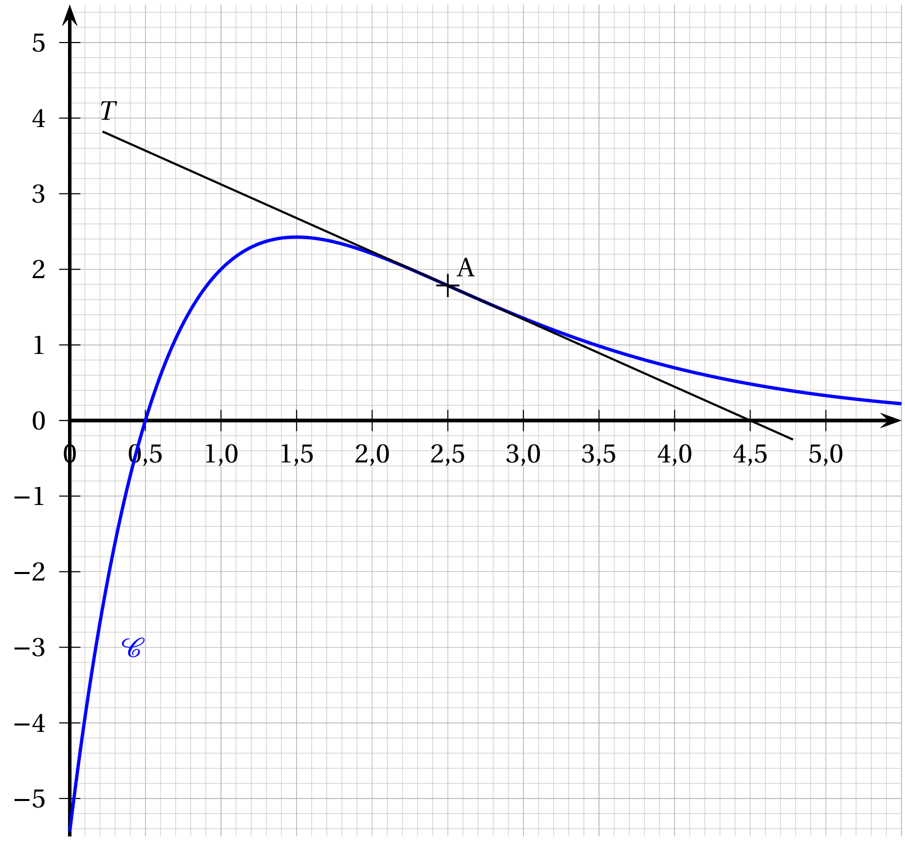
a. Donner la valeur renvoyée par `seuil` (2).

b. La valeur renvoyée par `seuil` (4) est 9.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

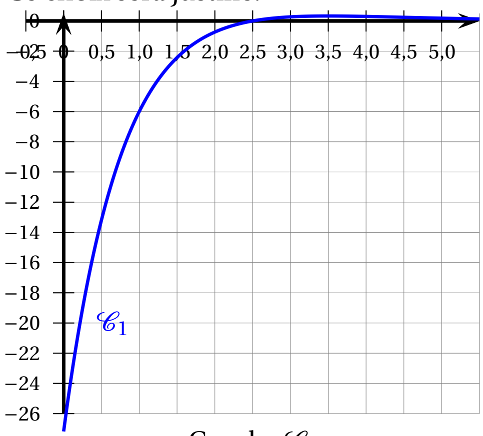
EXERCICE 6 — Asie 10 juin 2024

On considère une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.

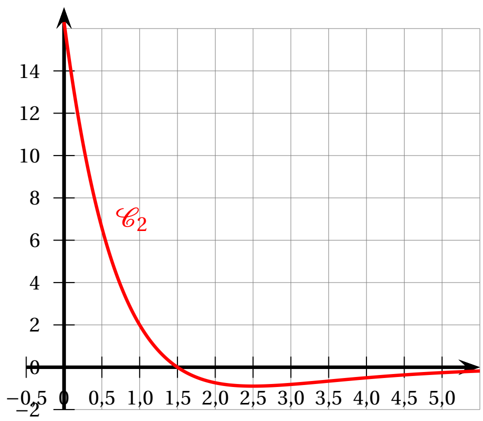
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.



1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$.
2. Que semble présenter la courbe $\mathscr{C}$ au point A ?
3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.
   Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente.
   Ce choix sera justifié.

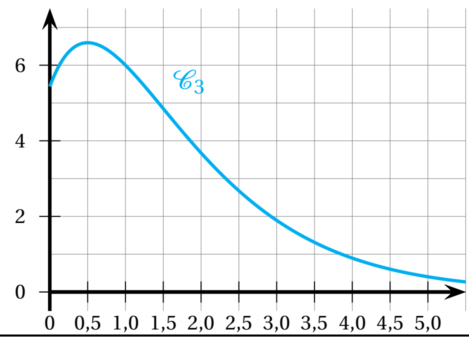


Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

4. La courbe $\mathscr{C}_3$ ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0\ ;\ +\infty[$ d'une primitive de la fonction f ? Justifier.



Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$, est définie par

$$f(x) = (4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}.$$

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. Étude de la fonction f

a. Montrer que $f'(x) = (-4x+6)\,\mathrm{e}^{-x+1}$.

b. Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.

2. On considère une fonction F définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.

a. Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.

b. On admet que $F(x) = (-4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.

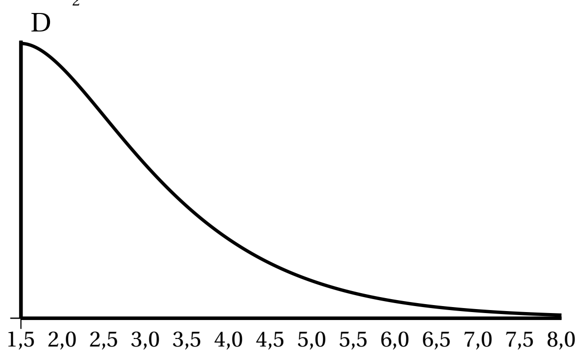
En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'intégrale

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.

Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}~;~8\right]$.

L'unité de longueur est le mètre.



a. Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.

b. La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur.

Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de 0,8 m^2, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
   On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g.
   Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.
   Résoudre, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n\ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

2. Justifier que la suite (u_n) converge.
   On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
3. Déterminer la valeur de ℓ.

EXERCICE 8 — Métropole 19 juin 2024

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.
   c. Étudier le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   d. Étudier la convexité de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\ ;\ +\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1\ ;\ 2]$.
   b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0\ ;\ +\infty[$.
   c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g.

La fonction g est définie sur $]0\ ;\ 1]$ par : $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\ ;\ 1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0\ ;\ 1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. **a.** Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.
   b. On admet le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	||	+	0	−	

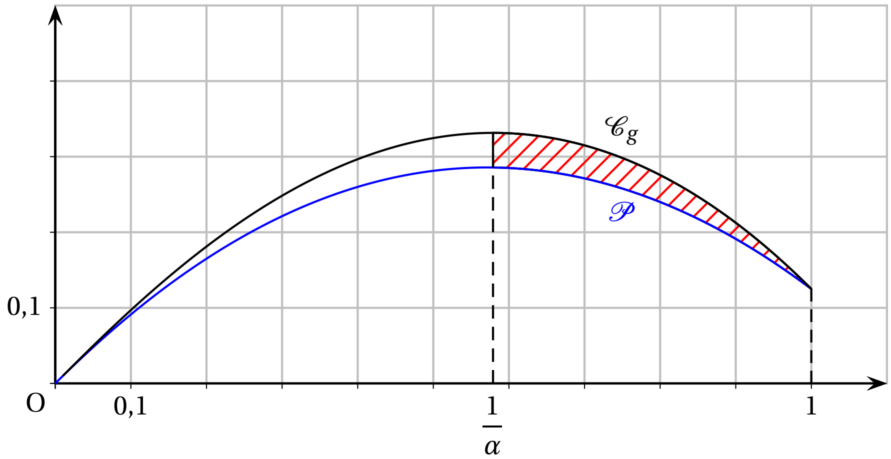
   En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

— La courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g ;

— La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{P}$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

1. **a.** Justifier la position relative des courbes C_g et $\mathscr{P}$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.

   b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathscr{A}$.

EXERCICE 9

Métropole 19 juin 2024 J1 (secours)

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

   a. Montrer que pour tout nombre réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) & = & u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant 0$.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire la convergence de la suite (u_n).

4. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

5. **a.** Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leqslant h$, où h est un nombre réel strictement positif.

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
  n = 0
  u =7
  while ... :
    n = n+1
    u = ...
  return n
```

b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit seuil(0.01) dans la console Python. Justifier la réponse.

Partie C : calcul intégral

1. Étudier le signe de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Interpréter graphiquement l'intégrale :

$$I = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2\ ;\ 4]$, on a l'encadrement :

$$0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25.$$

En déduire l'encadrement :

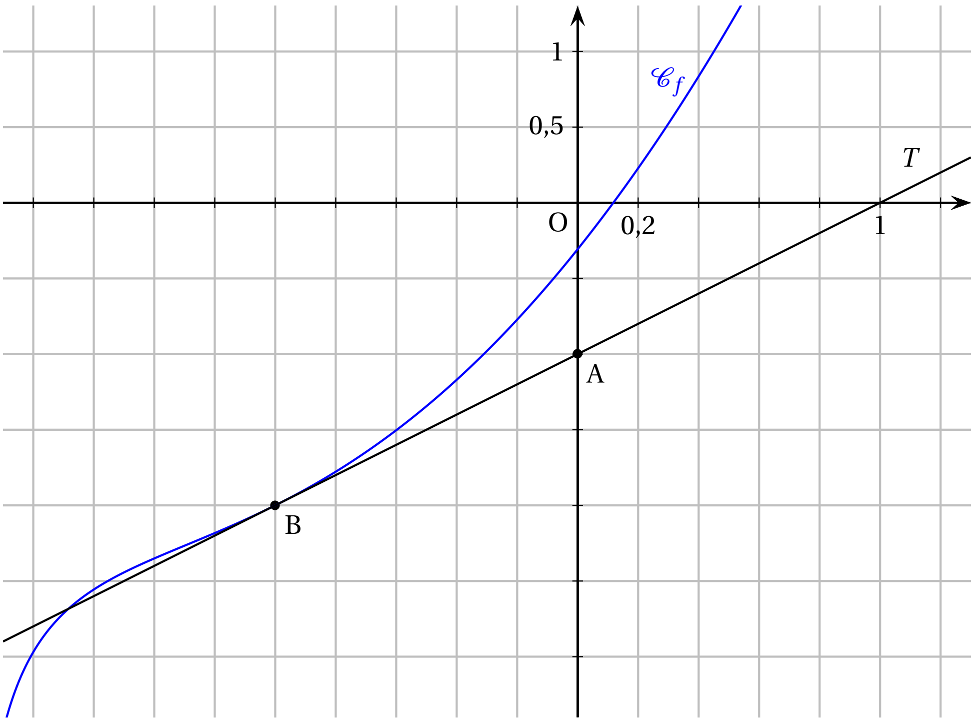
$$1 \leqslant I \leqslant 2.$$

EXERCICE 10 — Métropole 20 juin 2024

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1.

On précise que la droite T passe par le point A$(0\,;\,-1)$.



Partie A : exploitation du graphique

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

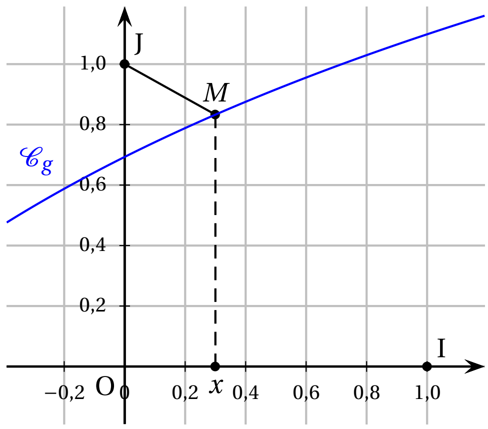
1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2.
Interpréter graphiquement ce résultat.
On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;\,+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.
5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.
6. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale

Soit g la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x+2).$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$, représentée ci- contre.
Soit M un point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.
Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.
On considère la fonction h définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \mathrm{J}M^2$.



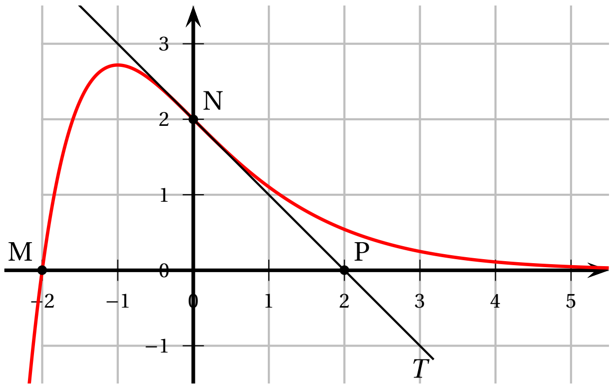
1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.
2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.
On admet également que pour tout réel $x > -2$,
$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$
où f est la fonction étudiée en partie B.
   a. Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;\,+\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.
   b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.
3. On notera M_a le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse α.
   a. Montrer que $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.
   b. En déduire que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_a et la droite $(\mathrm{J}M_\alpha)$ sont perpendiculaires.
   On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point N(0; 2) ;
- le point M(−2 ; 0) appartenant à $\mathscr{C}_f$ et P(2; 0) appartenant à la tangente T.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.

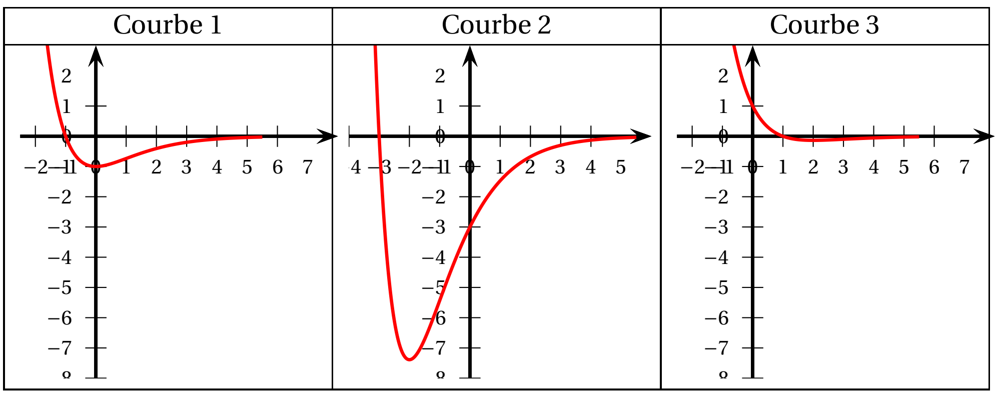


Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. **a.** Donner $f(0)$.

   b. Déterminer $f'(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.



Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a,b et λ sont des constantes réelles.

Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.

2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.

3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. On admet que $f'(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f. Justifier.

3. **a.** Étudier la convexité de f.

b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

4. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, on pose :

$$I(t) = \int_{-2}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I(t) = (-t-3)\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2}.$$

b. En déduire un exemple de surface non limitée dont l'aire est finie.

EXERCICE 12 — Polynésie 19 juin 2024

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.

Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}.$$

Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = ...
    for i in range(n) :
        ...
    return u
```

2. L'exécution de `suite(2)` renvoie 1.3333333333333333.
   Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.
3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$

3. **a.** Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
   Prouver l'équivalence suivante :

$$f(x) = x \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$$

   b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
   Déterminer sa limite.

5. Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme terme initial $u_0 = 4$ au lieu de $u_0 = 3$?

EXERCICE 13 — Polynésie 21 juin 2024

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel} \quad n,\ u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. **a.** Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2.

   b. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python. On admet que, pour tout réel strictement positif `a`, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de `a`.

```
def mystere(k) :
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k) :
        S = S + u
        u = u − log( u / 4 )
    return S
```

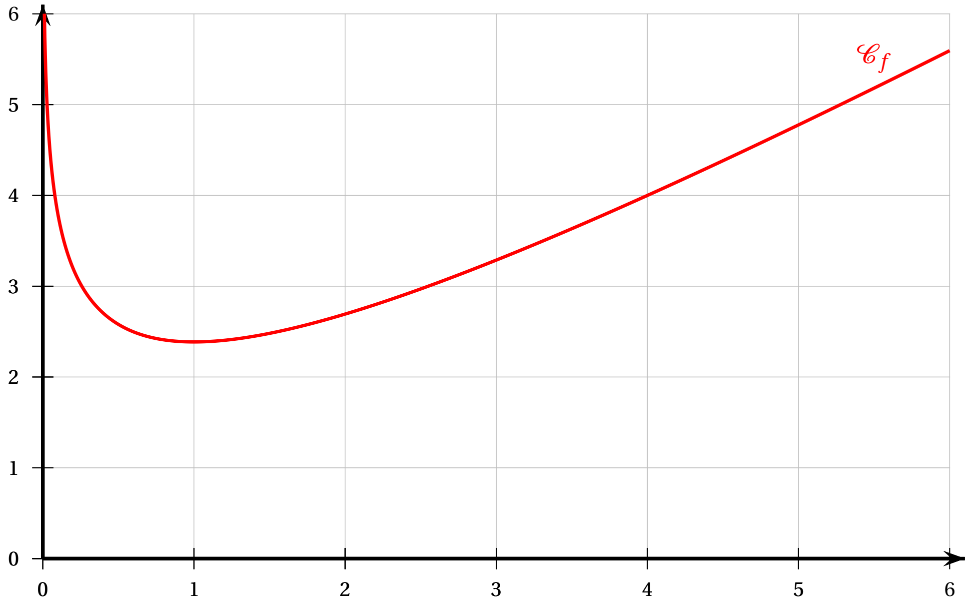
   L'exécution de `mystere(10)` renvoie `58.44045206721732`. Que représente ce résultat ?

   c. Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

   On donne ci-dessous une représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f pour les valeurs de x comprises entre 0 et 6.



Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $[0\ ;\ +\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle.
On note ℓ la valeur de cette limite

c. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

d. En déduire la valeur de ℓ.

EXERCICE 14 — Métropole Antilles-Guyane 11 septembre 2024

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).

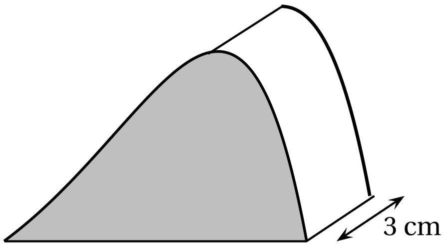


Figure 1

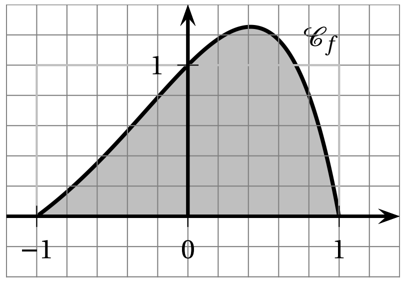


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par :

$$f(x) = \left(1 - x^2\right) \mathrm{e}^{x}.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. **a.** Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1 ; 1]$ on a $f(x) \geqslant 0$.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x.$$

2. Le volume $\mathscr{V}$ de chocolat, en cm^3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathscr{V} = 3 \times S$$

où S est l'aire, en cm^2, de la surface colorée (**Figure 2**).

En déduire que ce volume $\mathscr{V}$, arrondi à 0,1 cm^3 près, est égal à 4,4 cm^3.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0{,}01 ; +\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2[2 - 3\ln(q)] - 3.$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0{,}01 ; +\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{q \to +\infty} B(q)$.

b. Montrer que, pour tout $q \geqslant 0{,}01$, $B'(q) = 8q(1 - 6\ln(q))$.

c. Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0{,}01 ; +\infty[$.
Dresser le tableau de variation complet de la fonction B.

d. Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?

2. **a.** Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1{,}2\,;\,+\infty[$.
Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

b. On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0{,}01\,;\,1{,}2[$.
On donne $\alpha \approx 0{,}757$.
En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.

EXERCICE 15 — Amérique du Sud 21 novembre 2024

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + \frac{1}{4}y = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x},$$

d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ax\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle

$$(E'): \quad y' + \frac{1}{4}y = 0,$$

d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E').
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (20x + 8)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. De plus, on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

1. **a.** Justifier que, pour tout réel x positif,

$$f'(x) = (18 - 5x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}.$$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f. On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

   a. Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[14;15]$.

   b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction solution_equation ci-contre, écrite en langage Python :

a	14				
b	15				
$b-a$	1				
m	14,5				
Condition $f(m) > 8$	FAUX				

```
from math import exp
def f(x) :
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation() :
    a,b = 14,15
    while b-a > 0.1 :
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 8 :
            a = m
        else :
            b = m
    return a,b
```

   c. Quel est l'objectif de la fonction solution_equation dans le contexte de la question?

EXERCICE 16 — Amérique du Sud 22 novembre 2024

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 4\right) e^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = \left(-x^2 + 2x + 4\right) e^{-x}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_{-2}^{0} x^n e^{-x} \, dx$.

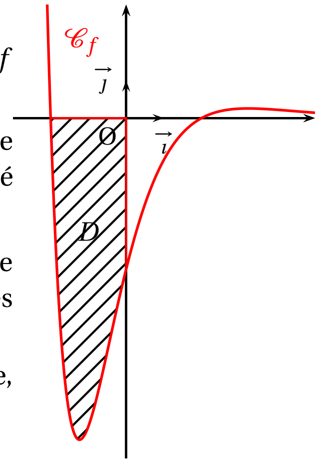
1. Justifier que $I_0 = e^2 - 1$.
2. En utilisant une intégration par partie, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1) I_n.$$

3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

Partie 3

1. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie 1.
2. On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   Le domaine D du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine D.



ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 1

Amérique du Nord 21 mai 2024

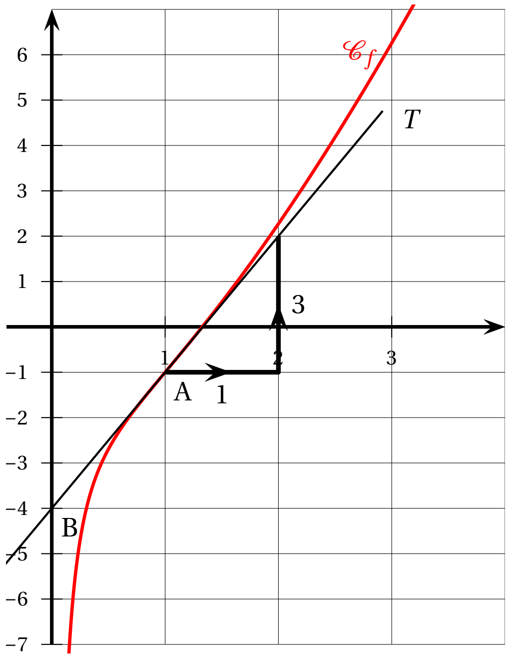
Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1\,;\ -1)$.

Cette tangente passe également par le point B$(0\,;\ -4)$.



1. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est le nombre dérivé $f'(1)$; on lit sur le graphique $f'(1) = \frac{3}{1} = 3$.
L'ordonnée à l'origine est égale à -4, donc l'équation réduite de la tangente (T) est

$$M(x\ ;\ y) \in (T) \iff y = 3x - 4.$$

2. • il semble que f est concave sur $]0 ; 1[$;
   • il semble que f est convexe sur $]1\ ;\ +\infty[$.
   Le point A semble être un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Partie B : étude analytique

1.
   • On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x^2\right) = +\infty$; donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   • Avec $f(x) = 2x\ln x - \frac{1}{x}$, on sait que $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$ (l'axe des ordonnées est asymptote verticale de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de zéro.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   a. Les fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \ln\left(x^2\right)$ et $x \longmapsto -\frac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ et l'on a :
   $f'(x) = \ln\left(x^2\right) + x \times \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \ln\left(x^2\right) + 2 + \frac{1}{x^2}$ ou $f'(x) = 2\ln x + 2 + \frac{1}{x^2}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. En dérivant $f'(x)$ on obtient :
   $f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^2-2}{x^3} = \frac{2\left(x^2-1\right)}{x^3} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$.
3. **a.** Comme $x^3 > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, le signe de $f''(x)$ est celui de $(x+1)(x-1)$ et comme $x+1 > 1 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $x-1$.
   Conclusion :
   • Sur $]0\ ;\ 1[$, $x < 1$, $f''(x) < 0$: la fonction est concave ;
   • Sur $]1\ ;\ +\infty[$, $x > 1$, $f''(x) > 0$: la fonction est convexe ;
   • pour $x = 1$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe : le point A est le point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$.
   b. Du signe de $f''(x)$ on en déduit les variations de f' qui est décroissante sur $]0 ; 1[$ puis croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$, donc $f'(1) = 2 + 1 = 3$ (vu à la question **1.**).
   Comme 3 est le minimum de f', on en déduit que $f'(x) > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ et par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. **a.** Tableau de variations de f :

x	0		1		2		$+\infty$
$f''(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\parallel$	$\searrow$	3	$\nearrow$		$\nearrow$	
f	$\parallel$ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$\approx 2{,}27$	$\nearrow$	$+\infty$

Sur l'intervalle $]1\,;\,2[$ la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante avec $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un nombre unique $\alpha \in]1\,;\,2[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

b. La calculatrice donne $f(1{,}3) \approx -0{,}09$ et $f(1{,}4) \approx 0{,}23$ donc $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$, puis $f(1{,}32) \approx -0{,}02$ et $f(1{,}33) \approx 0{,}007$, d'où $1{,}32 < \alpha < 1{,}33$ et enfin
$f(1{,}327) \approx -0{,}003$ et $f(1{,}328) \approx 0{,}0004$, donc $\alpha \approx 1{,}33$ au centième près.

On sait que α est solution de $f(x) = 0 \iff x\ln\left(x^2\right) - \dfrac{1}{x} = 0 \iff$
$x\ln\left(x^2\right) = \dfrac{1}{x} \iff \ln\left(x^2\right) = \dfrac{1}{x^2}$ et enfin par croissance de la fonction exponentielle :
$\exp\left(\ln\left(x^2\right)\right) = \exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \iff x^2 = \exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
α vérifie cette équation donc $\alpha^2 = \exp\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

Éléments de la correction de l'exercice 2

Amérique du Nord - 22 mai 2024

$$f(x) = a\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

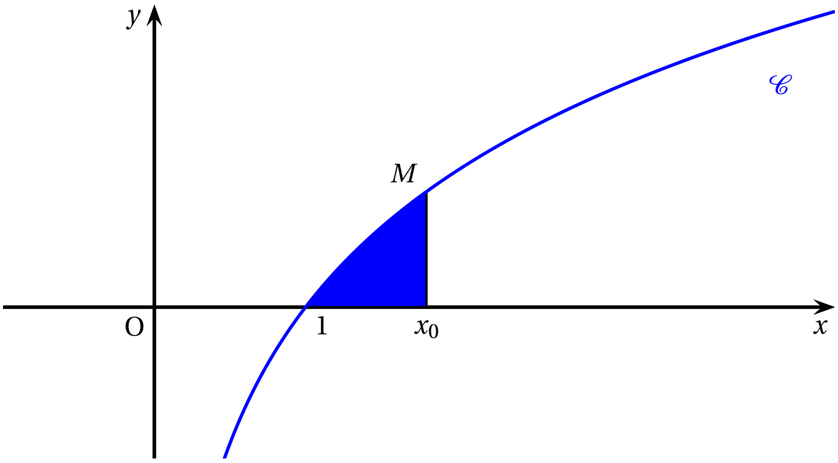
1. On a $f(x) = 0 \iff a\ln x = 0 \iff \ln x = 0$ (car $a \neq 0$) et par croissance de la fonction exponentielle $\mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}^{0} \iff x = 1$.
2. F est une différence de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, donc sur cet intervalle :
$F'(x) = a\left[\ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1\right] = a[\ln(x) + 1 - 1] = a\ln(x) = f(x)$, ce qui montre que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. On a vu que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ donc la surface bleue correspond à des points où $x \geqslant 1$, soit $\ln(x) \geqslant 0 \Rightarrow a\ln(x) \geqslant 0$.

Autrement dit pour $x \geqslant 1$, la fonction f est positive et on sait que sur un intervalle $[1\ ;\ x_0]$ avec $x_0 \geqslant 1$, l'aire de la surface limitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$ est égale à l'intégrale :

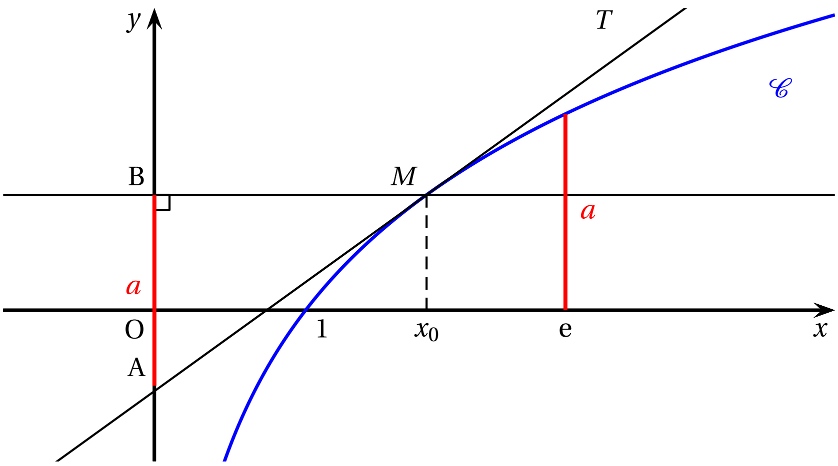
$$\int_1^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{x_0} = F(x_0) - F(1) = a[x_0\ln(x_0) - x_0] - a[1\ln(1) - 1] = .$$

l'aire bleutée est en unités d'aire : $a[x_0\ln(x_0) - x_0] + a = a\,[x_0\ln(x_0) - x_0 + 1]$.



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse x_0.

On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. On sait (équation de la tangente au point d'abscisse x_0) que :

$M(x\ ;\ y) \in T \iff y - f(x_0) = f'(x - x_0))$.

- $f(x_0) = a\ln x_0$;
- f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle $f'(x) = \dfrac{a}{x}$, donc $f'(x_0) = \dfrac{a}{x_0}$.

On obtient donc :

$M(x\ ;\ y) \in T \iff y - a\ln x_0 = \dfrac{a}{x_0} \times (x - x_0) \iff y = a\ln x_0 + \dfrac{ax}{x_0} - a$.

En particulier T coupe l'axe des ordonnées si $x = 0$, d'où $y = a\ln x_0 - a$ (ordonnée de A).

L'ordonnée de B est égale à $f(x_0) = a\ln(x_0)$.

On a $\text{AB} = \left|y_B - y_A\right| = |a\ln(x_0) - (a\ln x_0 - a)| = |a| = a$ (car $a > 0$).

Remarque : On a $f(\text{e}) = a\ln\text{e} = a \times 1 = a$.

$f(\text{e}) = a$: on a mis en évidence ceci sur le dessin ; le corollaire est que la tangente à la courbe au point d'abscisse e contient l'origine O !

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 3

Centres étrangers 5 juin 2024

1. **a.** Résolvons, dans $[0\,;\,1]$, l'équation demandée :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 2x\,\text{e}^{-x} = x \\ &\iff 2x\,\text{e}^{-x} - x = 0 \\ &\iff x(2\,\text{e}^{-x} - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\,\text{e}^{-x} - 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\,\text{e}^{-x} = 1 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \text{e}^{-x} = \frac{1}{2} \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln(2) \end{aligned}$$

Or, 0 et $\ln(2)$ sont deux réels dans $[0; 1]$ (en effet, la stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}^{*+}$ donne : $1 < 2 < \text{e} \implies 0 < \ln(2) < 1$).

L'équation a donc deux solutions dans $[0\,;\,1]$: 0 et $\ln(2)$.

b. f est dérivable sur $[0\,;\,1]$, en tant que composée et produit de fonctions qui pourraient être définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in [0;1], \quad f'(x) = 2 \times \text{e}^{-x} + (2x) \times (-\text{e}^{-x}) = (2 - 2x)\,\text{e}^{-x} = 2(1 - x)\,\text{e}^{-x}$.

On arrive donc à l'expression demandée.

c. On sait que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$. On a : $f(0) = 2 \times 0\,\text{e}^{-0} = 0$ et $f(1) = 2 \times 1\,\text{e}^{-1} = 2\,\text{e}^{-1}$.

On peut donc établir le tableau de variations de la fonction :

x	0		1
signe de 2		$+$	
signe de $(1-x)$		$+$	0
signe de e^{-x}		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0
variations de f	0	$\nearrow$	$2\,\text{e}^{-1}$

2. **a.** *Initialisation :* Calculons u_1. $u_1 = f(u_0) = f(0{,}1) = 2 \times 0{,}1\,\mathrm{e}^{-0{,}1} \approx 0{,}18$.

On constate que l'inégalité est vraie pour $n = 0$, on a bien : $0 \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 1$.

Hérédité : Pour un entier naturel k donné, on suppose que l'inégalité $0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1$ est vraie.

Montrons que l'inégalité sera vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1 &\implies f(0) \leqslant f(u_k) < f(u_{k+1}) \leqslant f(1) \\ &\qquad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur } [0;1] \\ &\implies 0 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-1} \\ &\qquad \text{car } f \text{ est la fonction de récurrence de la suite } (u_n) \\ &\implies 0 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant 1 \\ &\qquad \text{car } 2\,\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}74 < 1 \end{aligned}$$

Ainsi, la véracité de l'inégalité est héréditaire.

Conclusion : L'inégalité est vraie au rang 0, et sa véracité est héréditaire pour tout entier naturel, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.

b. On a notamment :

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc (strictement) croissante.

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$. La suite (u_n) est donc bornée par 0 et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est donc convergente, vers une limite ℓ vérifiant $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $[0;1]$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

D'après la question **1. a.**, cette équation n'a que deux solutions dans $[0;1]$: 0 et $\ln(2)$, or la suite est (strictement) croissante, donc minorée par son premier terme : $u_0 = 0{,}1$, donc la limite ne saurait être inférieure à 0,1 : la possibilité d'avoir $\ell = 0$ est donc écartée, et finalement, l'unique valeur possible pour ℓ est donc $\ln(2)$.

La suite (u_n) converge donc vers $\ln(2)$.

4. **a.** La suite (u_n) est croissante et converge vers $\ln(2)$, donc elle est majorée par $ln(2)$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ln(2) \implies \ln(2) - u_n \geqslant 0$.

Pour tout entier naturel n, la différence $\ln(2) - u_n$ est bien positive.

b. Un terme de la suite (u_n) sera donc toujours une valeur approchée par défaut de $\ln(2)$. Si on veut que la valeur approchée soit à 10^{-4} près, cela signifie que la différence entre u_n, la valeur approchée, et $\ln(2)$ doit être inférieure ou égale à 10^{-4}.

On va donc explorer les termes consécutifs de la suite (u_n) tant que $\ln(2) - u_n > 0{,}0001$, de sorte que la boucle s'interrompra dès que la différence deviendra inférieure ou égale à $10^{-4} = 0{,}0001$.

Le script ci-dessous convient (à condition d'avoir importé les fonctions `exp` et `log` qui est la fonction logarithme népérien, de la librairie `math`, au préalable).

On a dans ce corrigé ajouté les deux lignes qui rendent le programme exécutable

```
from math import exp
from math import log as ln
def seuil():
  n=0
  u=0.1
  while ln(2) - u > 0.0001:
    n=n+1
    u=2*u*exp(-u)
  return(u,n)
```

Remarque : on peut aussi importer la constante d'Euler de la librairie maths et utiliser une variante : `from math import e` en lieu et place de la première ligne et `u=2*u*e**(-u)` ou `u=2*u/(e**u)` pour l'avant dernière.

c. $n = 11$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 4

Centres étrangers J2 - 5 juin 2024

1. **a.** La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc : $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{1} = \mathrm{e} > 0$.

Par limite de la somme, on a : $\lim\limits_{x\to 1} x - 1 = 0$, et comme on travaille sur $]-\infty\,;\,1[$, on a $x - 1 < 0$. (on peut noter $\lim\limits_{x\to 1} x - 1 = 0^{-}$).

Par limite du quotient, on a : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$.

b. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale, d'équation $x = 1$.

2. On a : $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$;

Par limite de la somme, on a : $\lim\limits_{x\to -\infty} x - 1 = -\infty$,

Par limite du quotient, on en déduit : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$.

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet également une asymptote, d'équation $y = 0$, au voisinage de $-\infty$.

3. **a.** f est dérivable sur $]-\infty\,;\,1[$, en tant que quotient de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle, avec la fonction au dénominatuer ne s'annulant pas sur l'intervalle.

$$\forall x \in]-\infty\,;\,1[,\quad f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} \times (x-1) - \mathrm{e}^{x} \times 1}{(x-1)^2} = \frac{\mathrm{e}^{x} \times (x-1-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)\,\mathrm{e}^{x}}{(x-1)^2}$$

b. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, et pour tout x dans $]-\infty\,;\,1[$, $(x-1)^2$ est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $(x-2)$.

$x-2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$, donc sur $]-\infty\,;\,1[$, $(x-2)$ est strictement négatif, donc $f'(x)$ également.

Finalement, on peut donc en déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$, et donc, on a le tableau de variations suivant (avec les limites justifiées aux questions **1. a.** et **2.**) :

x	$-\infty$		1
signe de $f'(x)$		$-$	$\Vert$
variations de f	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$

4. **a.** Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on va étudier le signe de $f''(x)$.

Comme, pour tout x dans $]-\infty\,;\,1[$, on a $(x-1)<0$ et donc $(x-1)^3<0$ et $\mathrm{e}^{x}>0$, on en déduit que le signe de $f''(x)$ est l'opposé du signe du trinôme : x^2-4x+5.

Or, ce trinôme a un discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times 5 = -4$ qui est strictement négatif, donc n'admet pas de racine, et donne des images strictement positives (car le coefficient dominant est positif) pour tout réel x.

Rem. On peut écrire :
$x^2-4x+5 = (x-2)^2-4+5 = (x-2)^2+1 \geqslant 1 > 0$: le trinôme est positif quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Finalement, la dérivée seconde f'' est à valeurs strictement négatives sur $]-\infty\,;\,1[$, on en déduit que la fonction f est concave sur $]-\infty\,;\,1[$.

b. Pour déterminer l'équation de T, il nous faut connaître $f'(0)$ et $f(0)$:

— $f'(0) = \dfrac{(0-2)\,\mathrm{e}^{0}}{(0-1)^2} = \dfrac{-2}{1} = -2$;

— $f(0) = \dfrac{\mathrm{e}^{0}}{0-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

La formule classique donne une équation pour T :
$y = f'(0)(x-0)+f(0) \iff y = -2x-1$
L'équation réduite de T est donc : $y=-2x-1$.

c. Puisque f est concave sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, la courbe $\mathscr{C}$ est donc située sous ses tangentes, notamment sous la tangente T, sur cet intervalle.

Pour tout réel x dans cet intervalle, l'ordonnée d'un point sur la courbe $\mathscr{C}$ (c'est-à-dire $f(x)$) est donc inférieure ou égale à l'ordonnée du point ayant la même abscisse sur la tangente T (or, sur la tangente T, l'ordonnée du point d'abscisse x est $-2x-1$, d'après la question précédente).

On en déduit donc :
$$\begin{aligned} x \in\,]-\infty\,;\,1[&\implies f(x) \leqslant -2x-1 \\ &\implies \frac{\mathrm{e}^{x}}{x-1} \leqslant -2x-1 \\ &\implies \mathrm{e}^{x} \geqslant (x-1)(-2x-1) \\ &\qquad \text{car sur }]-\infty\,;\,1[,\quad x-1<0 \\ &\implies \mathrm{e}^{x} \geqslant (-2x-1)(x-1) \end{aligned}$$

On arrive donc à l'inégalité demandée.

5. **a.** La fonction f est :

— continue sur $]-\infty\,;\,1[$ (car dérivable sur cet intervalle) ;

— strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$ (d'après la question **3. b.**) ;

— telle que -2 est une valeur intermédiaire entre $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{1} f = -\infty$;

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

b. Comme on a repéré à la question **4. b.** que $f(0) = -1$, on sait que la solution sera à chercher dans l'intervalle $]0\,;\,1[$.

À l'aide de la calculatrice, par balayage, on a :

— $f(0{,}31) \approx -1{,}98 > -2$;

— $f(0{,}32) \approx -2{,}03 < -2$;

Un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} est $0{,}31 < \alpha < 0{,}32[$.

Éléments de la correction de l'exercice 5

Centres étrangers J2 - 5 juin 2024

Partie A

1. f est de la forme $\sqrt{u}$ avec, pour tout x réel positif : $u(x) = x+1$ et $u'(x) = 1$.

Donc $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

La fonction racine carrée étant à valeurs positives, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$f(x) - x = \sqrt{x+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x+1} - x\right) \times \left(\sqrt{x+1} + x\right)}{\sqrt{x+1} + x} = \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x+1} + x} = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}.$$

3. $$f(x) = x \iff \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x} = 0$$
$$\iff -x^2 + x + 1 = 0$$

Car sur $[0\,;\,+\infty[$, le dénominateur $\sqrt{x+1} + x$ est strictement positif, en tant que somme d'une expression strictement positive $(\sqrt{x+1})$ et d'une autre positive (x), donc ce dénominateur est non nul.

On a un polynome du second degré. Calculons le discriminant.

$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5$

On a donc deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \geqslant 0$

$x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{-2} < 0$ donc n'est pas solution de l'équation sur $[0\,;\,+\infty[$

L'équation $f(x) = x$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarque : ce nombre est connu sous l'appellation « nombre d'or ».

Partie B

1. — *Initialisation :* pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$.
   $u_0 \in [0\,;\,+\infty[$, donc $f(u_0)$ est définie et $u_1 = f(u_0) = f(5) = \sqrt{5+1} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$.
   L'inéquation $\quad 1 \leqslant u_{0+1} \leqslant u_0 \quad$ est bien vérifiée.

   — *Hérédité :* Pour un naturel n, on suppose que l'inégalité est vraie au rang n, c'est-à-dire : $\quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   En appliquant la fonction f aux trois membres de cette inégalité, la croissance de f sur $[0\,;\,+\infty[$ donne :
   $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \implies \sqrt{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$
   $\implies 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}, \quad car\ \sqrt{2} \approx 1{,}4 \geqslant 1$
   Cette conclusion est l'inégalité, au rang suivant.

   — *Conclusion :* l'inégalité est vraie au rang 0, et sa véracité est héréditaire, pour tout entier naturel, donc, en vertu du principe de récurrence, pour tout entier naturel n, l'inégalité est vraie, soit : $\quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. La question précédente donne :
   — $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n \quad$ la suite est donc décroissante ;
   — $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \quad$ la suite est donc minorée, par 1 ;

   La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est donc convergente, vers une limite qui doit être supérieure ou égale à 1 (et inférieure ou égale à u_0 car la suite est décroissante).

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $[0\,;\,+\infty[$, intervalle qui contient la limite de la suite.
   D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   D'après la question **3.** de la **Partie A**, cette équation n'a qu'une solution dans $[0\,;\,+\infty[$: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   On constate également que cette valeur satisfait les critères supplémentaires que l'on connaît pour cette limite (supérieure à 1 et inférieure à u_0).
   La suite (u_n) converge donc vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. La fonction `seuil` présentée initialise la variable `u` à 5, c'est-à-dire u_0 et la variable `i` à 0, c'est-à-dire l'indice de u_0.
   Tant que la valeur absolue de la différence entre ℓ et `u` est supérieure ou égale à 10^{-n}, on remplace dans la variable `u` le terme de la suite par le terme suivant, et dans la variable `i` l'indice par l'indice suivant.
   La boucle s'arrête donc dès que `u` contient un terme de la suite dont la distance à ℓ est strictement inférieure à 10^{-n} et renvoie l'indice de ce terme (qui est donc une valeur approchée à 10^{-n} près de la limite).

   a. `seuil(2)` va donc renvoyer l'indice du premier terme qui est à moins d'un centième de la limite ℓ.
   Par exploration à la calculatrice, on a $u_4 - \ell \approx 0{,}02 \geqslant 10^{-2}$ et
   $u_5 - \ell \approx 0{,}007 < 10^{-2}$ donc la fonction renverra l'indice du premier terme pour lequel le test du `while` n'est pas satisfait : 5.

b. Si `seuil(4)` renvoie 9, c'est que le premier terme de la suite qui est une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près sera u_9.

Remarque : comme la suite (u_n) converge vers ℓ en décroissant, tous les termes de la suite sont des valeurs approchées de ℓ par excès, l'utilisation de la fonction `abs` dans la fonction Python n'était indispensable pour cette fonction de récurrence.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 6

Asie 10 juin 2024

Partie A

1. Par lecture graphique :

x	0	1,5	5
variations de f	$-5,5$	2,4	0,35

2. La courbe $\mathscr{C}$ semble traverser la tangente au point A et donc admettre un point d'inflexion au point A.

3. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1{,}5[$ puis décroissante sur l'intervalle $]1{,}5\,;\,5]$, sa dérivée est donc positive puis négative. La courbe représentant la dérivée f' de f est donc la courbe $\mathscr{C}_2$.

   La fonction f est concave sur $[0\,;\,2{,}5[$ puis convexe sur $]2{,}5\,;\,5]$, sa dérivée seconde est donc négative puis positive. La courbe représentant la dérivée seconde f'' de f est donc la courbe $\mathscr{C}_1$.

4. Si F est une primitive de f, on aura donc $f = F'$ et $f' = F''$.

   f est négative sur $[0\,;\,0{,}5[$ puis positive, une primitive est donc décroissante sur $[0\,;\,0{,}5[$ puis croissante : ce n'est pas le cas (c'est même exactement le contraire) de la fonction représentée par $\mathscr{C}_3$.

   $\mathscr{C}_3$ n'est donc pas la représentation graphique d'une primitive de la fonction f.

Partie B

1. **a.** f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 4x - 2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x+1}$.

   On a donc $u'(x) = 4$ et $v'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x+1}$.

   $f' = u'v + v'u$ donc, pour tout réel x positif :

   $f'(x) = 4 \times \mathrm{e}^{-x+1} - 1 \times \mathrm{e}^{-x+1} \times (4x-2) = (4-4x+2)\,\mathrm{e}^{-x+1} = (-4x+6)\,\mathrm{e}^{-x+1}$.

   b. Déterminons le signe de $-4x+6$: $\quad -4x+6 > 0 \iff 6 > 4x$

   $$\iff \frac{3}{2} > x$$

   les images pertinentes sont : $\quad f(0) = (4\times 0 - 2)\,\mathrm{e}^{-0+1} = -2\,\mathrm{e}$

et $\quad f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(4\times\dfrac{3}{2}-2\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}+1} = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ (la limite en $+\infty$ est admise).

Remarque : On a $-2\,\mathrm{e} \approx -5{,}43$, ce qui confirme la lecture graphique de la **partie A**

et $f\left(\dfrac{3}{2}\right) \approx 2{,}43$, là aussi, conforme.

On a donc le tableau :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $-4x+6$		$+$	0	$-$	
signe de e^{-x+1}		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$-2\,\mathrm{e}$	$\nearrow$	$4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

c. Pour tout réel x positif on a :

$f''(x) = -4\times\mathrm{e}^{-x+1} - 1\times\mathrm{e}^{-x+1}\times(-4x+6) = (-4+4x-6)\,\mathrm{e}^{-x+1} = (4x-10)\,\mathrm{e}^{-x+1}$

Déterminons le signe de $4x-10$: $\quad 4x-10>0 \iff 4x>10$

$$\iff x > \frac{5}{2}$$

x	0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
signe de $4x-10$		$-$	0	$+$	
signe de e^{-x+1}		$+$		$+$	
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction f est donc concave sur $\left[0\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\dfrac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Le point A, d'abscisse $\dfrac{5}{2}$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.

2. **a.** Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x+1}$ avec a et b deux nombres réels.

F est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.

Pour tout réel x positif on a :

$F'(x) = 1\times\mathrm{e}^{-x+1} - \times\mathrm{e}^{-x+1}\times(ax+b) = (a-ax-b)\,\mathrm{e}^{-x+1} = (-ax-b+a)\,\mathrm{e}^{-x+1}$

F est une primitive de $f \iff F' = f$

$$\iff \forall x\in\mathbb{R}^+\quad (-ax-b+a)\,\mathrm{e}^{-x+1} = (4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}$$

$$\iff \forall x\in\mathbb{R}^+\quad (-ax-b+a) = (4x-2)\quad \text{car}\quad \mathrm{e}^{-x+1}>0$$

$$\iff \begin{cases}-a=4\\ a-b=-2\end{cases}\quad \text{par identification des coefficients}$$

$$\iff \begin{cases}a=-4\\ b=a+2=-4+2=-2\end{cases}$$

$F(x) = (-4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. $I=\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\mathrm{d}x=\left[(-4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}\right]_{\frac{3}{2}}^{8}=(-4\times 8-2)\,\mathrm{e}^{-8+1}-\left(-4\times\frac{3}{2}-2\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}+1}=$
$-34\,\mathrm{e}^{-7}+8\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$
$I\approx 4{,}821$ soit $4{,}82$ à 10^{-2} près.

3. **a.** La hauteur du point de départ est égale à $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\approx 2{,}426$
soit 2,43 m au centimètre près.

b. L'aire, en unité d'aire, est égale à l'intégrale I calculée à la question **3.**
L'unité est le mètre, une unité d'aire est donc égale à 1 m^2.
On veut donc couvrir une surface de : $\dfrac{75}{100}\times 4{,}82\,\text{m}^2$ soit environ $3{,}62\,\text{m}^2$.
De plus : $\dfrac{3{,}62}{0{,}8}\approx 4{,}525$
Il faudra donc 5 bombes de peinture pour réaliser cette œuvre.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 7

Asie 11 juin 2024

1. • Limite en 0 :
$\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2=0$ et, d'après la propriété des croissances comparées : $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln(x)=0$
Par limite de la somme, on a donc : $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2-x\ln(x)=0$
• Limite en $+\infty$:
$f(x)=x^2-x\ln(x)=x^2\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$
Par croissances comparées $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ donc, par limite de la somme, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)=$
1
De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, donc, par limite du produit, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$

2. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x)=2x-1\times\ln(x)-x\times\dfrac{1}{x}=2x-1-\ln(x)$.

3. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f''(x)=2-0-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x}{x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x-1}{x}$.

4. Déterminons le signe de $2x-1$:
$$\begin{aligned}2x-1>0 &\iff 2x>1\\ &\iff x>\frac{1}{2}\end{aligned}$$
L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)
$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\times\dfrac{1}{2}-1-\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-1+\ln(2)=\ln(2)$
On a donc :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $2x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variations de f'	$\Vert$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	

5. Le minimum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$ est donc $\ln(2)$ qui est strictement positif, donc, sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$ et donc, la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B :

1. Pour tout réel x strictement positif, on a : $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

Déterminons le signe de $x - 1$:

$x - 1 > 0 \iff x > 1$

L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

$g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1$

On a donc :

x	0		1		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variations de g	$\Vert$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. $f(x) = x \iff x = x^2 - x\ln(x)$

$\iff 0 = x^2 - x - x\ln(x)$

$\iff 0 = x(x - 1 - \ln(x))$

$\iff 0 = x - 1 - \ln(x)$ car $x > 0$ donc $x \neq 0$

$\iff 1 = x - \ln(x)$

$\iff 1 = g(x)$

$\iff x = 1$

L'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$, cette solution est $x = 1$.

Partie C :

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Initialisation : Calculons u_1. $u_1 = f(u_0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\ln(2)}{2} \approx 0{,}597$.

On constate que l'inégalité est vraie pour $n = 0$, on a bien : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Montrons que l'inégalité est vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence on a :

$\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 \implies f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$

car f est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

$\implies f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$

car f est la fonction de récurrence de la suite (u_n)

$\implies \dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$

car $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx 0{,}60 > \dfrac{1}{2}$

Ceci montre que les inégalités sont vraies au rang $n+1$.

Conclusion : Les inégalités sont vraies au rang 0, et si elle sont vraies au rang n naturel, elles sont vraies au rang suivant $n+1$, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$

2. On a notamment :

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}.$ La suite (u_n) est donc croissante.

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1.$ La suite (u_n) est donc bornée par $\frac{1}{2}$ et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est convergente, vers une limite ℓ vérifiant $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $]0\,;\,+\infty[$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

D'après la question **2.** de la **Partie B**, cette équation n'a qu'une solution dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$: 1.

La suite (u_n) converge donc vers $\ell = 1$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 8

Métropole 19 juin 2024

Partie A : étude de la fonction f.

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x, \quad \text{sur }]0\,;\,+\infty[$$

1. **a.**

• Limite en 0 : On sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} x - 2 = -2$ et que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

• Limite en plus l'infini :

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. Sur l'intervalle de définition f est une somme de fonctions dérivables et sur cet intervalle :
$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}$.

c. On a successivement : $0 < x \Rightarrow 0 < 2x < 2x + 1$ et
$2x + 1 > 2x > 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{2x} > 1 > 0$: donc $f'(x) > 1 > 0$: $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ de moins l'infini à plus l'infini.

d. f' est elle-même dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle, en dérivant le quotient :

$f''(x) = \dfrac{1\times x - 1\times(x+1)}{x^2} = \dfrac{x-x-1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Or $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} > 0$ et enfin $f''(x) < 0$.

Conclusion : la fonction f est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$

2. **a.** Sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction f est continue car dérivable sur cet intervalle et strictement croissante de moins à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in]0\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Comme $f(1) = 1-2+0{,}5\times\ln 1 = -1$ et

$f(2) = 2-2+\dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{\ln 2}{2} > 0$, le même théorème appliqué à l'intervalle $[1\,;\,2]$ montre que $\alpha \in [1\ ;\ 2]$.

b. On a donc :

- $f(x) < 0$ sur $]0\ ;\ \alpha[$;
- $f(x) > 0$ sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$;
- $f(\alpha) = 0$.

c. Le dernier résultat s'écrit :

$\alpha - 2 + \dfrac{1}{2}\ln\alpha = 0 \iff \dfrac{1}{2}\ln\alpha = 2-\alpha \iff \ln\alpha = 2(2-\alpha)$

Partie B étude de la fonction g

Sur $]0\,;\,1]$, $\quad g(x) = -\dfrac{7}{8}x^2 + x - \dfrac{1}{4}x^2\ln x$.

1. g est une somme de produits de fonctions dérivable sur $]0\,;\,1]$, elle est donc dérivable sur cet intervalle et

$g'(x) = -2\times\dfrac{7}{8}x + 1 - \dfrac{1}{4}\left(2x\ln x + x^2\times\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{7}{4}x + 1 - \dfrac{1}{2}x\ln x - x\dfrac{1}{4} = -\dfrac{8}{4}x + 1 - \dfrac{1}{2}x\ln x = 1 - 2x - \dfrac{x\ln x}{2}$.

Puisque $x \neq 0$, on peut factoriser x et $g'(x) = x\left(\dfrac{1}{x} - 2 - \ln x\dfrac{1}{2}\right)$.

Posons $X = \dfrac{1}{x} \iff x = \dfrac{1}{X}$; en remarquant que $X = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \ln X = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$, on peut écrire :

$g'(x) = \dfrac{1}{X}\left(X - 2 + \dfrac{1}{2}\ln X\right)$, soit $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2. **a.** On a vu dans la partie A que $0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) < 0$, soit en prenant les inverses de ces nombres positifs :

$\dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{x} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.

b. D'après le tableau de signes admis comme $0 < x \leqslant 1$ on en déduit par produit que :

- $g'(x) > 0$ sur $\left]0\ ;\ \dfrac{1}{\alpha}\right[$; g est croissante sur cet intervalle
- $g'(x) < 0$ sur $\left]\dfrac{1}{\alpha}\ ;\ 1\right[$; g est décroissante sur cet intervalle
- $g'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$; $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ est un maximum de g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie C : un calcul d'aire

1. **a.** On sait que sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $\ln x \leqslant 0$ et comme $x^2 \geqslant 0$, on conclut que $-\dfrac{1}{4}x^2\ln x \geqslant 0$.

Conclusion : sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $-\dfrac{7}{8}x^2+x \leqslant -\dfrac{7}{8}x^2+x-\dfrac{1}{4}x^2\ln x$ ce qui signifie géométriquement que sur cet intervalle l'arc de la parabole est en dessous de la représentation graphique de g.

b. Ne connaissant pas de primitive évidente de la fonction $x \longmapsto x^2\ln x$, on effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & \ln x \\ v'(x) & = & x^2 \end{array} \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{rcl} u'(x) & = & \dfrac{1}{x} \\ v(x) & = & \dfrac{x^3}{3} \end{array}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\alpha}\,;\,1\right]$ et leurs dérivées sont continues sur ce même intervalle,

donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} =$

$-\dfrac{1}{9}-\left(\dfrac{1}{3\alpha^3}\ln\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{9\alpha^3}\right) = -\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3\alpha^3}\left(-\ln\alpha-\dfrac{1}{3}\right)$,

soit en remplaçant $\ln\alpha$ par $2(2-\alpha)$,

$\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}-\frac{1}{3\alpha^3}\left(-4+2\alpha-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9}+\frac{4}{3\alpha^3}-\frac{2}{3\alpha^2}+\frac{1}{9\alpha^3} =$

$\dfrac{-\alpha^3+12-6\alpha+1}{9\alpha^3} = \dfrac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3}$.

2. L'aire de la partie hachurée est égale la différence des intégrales :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x\right)\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(-\frac{7}{8}x^2+x\right)\mathrm{d}x$, soit par linéarité de l'intégrale :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(-\frac{1}{4}x^2\ln x\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(x^2\ln x\right)\mathrm{d}x$,

soit d'après le calcul précédent :

$\mathscr{A} = -\dfrac{1}{4}\times\dfrac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3} = \dfrac{\alpha^3+6\alpha-13}{36\alpha^3} \approx 0{,}07$.

Éléments de la correction de l'exercice 9

Métropole 19 juin 2024 J1 (secours)

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x-\ln\left(x^2+1\right)$,
où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. **a.** En posant $u(x) = x^2+1$ et avec $u'(x) = 2x$, on obtient :

$[\ln(u)]' = \dfrac{u'}{u}$ donc $\left[\ln(x^2+1)\right]' = \dfrac{2x}{x^2+1}$, et donc :

pour tout nombre réel x, $f'(x) = 1-\dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

b. Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+1 \geqslant 1$ donc $x^2+1>0$.

Comme $(x-1)^2 \geqslant 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a par quotient $f'(x) \geqslant 0$: la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout nombre réel $x > 0$n on a :
$f(x) = x - \ln\left[x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right] = x - \ln(x^2) - \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

3. On a :

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$, puis par composition $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln 1 = 0$.
- $x - 2\ln(x) = x\left(1-2\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

  On sait (puissances comparées) que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x - 2\ln(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\end{array}\right.$$

1. Soit la propriété « $u_n \geqslant 0$ ».

Initialisation On a $u_0 = 7 \geqslant 0$: la propriété est vraie au rang 0;

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n \geqslant 0$: la fonction f étant croissante on a donc $u_n \geqslant 0 \Rightarrow f(u_n) \geqslant f(0)$; or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(0) = 0$, donc $u_{n+1} \geqslant 0$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $u_n \geqslant 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

2. De la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right)$ on déduit :
$u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right)$.
$u_n^2 \geqslant 0 \Rightarrow u_n^2+1 \geqslant 1 \Rightarrow \ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant \ln(1)0$ par croissance de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}^*$.
$\ln(1) = 0$ donc $\ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant 0$ et donc $-\ln\left(u_n^2+1\right) \leqslant 0$.
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \iff u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par zéro; d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.

4. La fonction f est continue car dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc la relation de récurrence donne par limite en plus l'infini :
$\ell = \ell - \ln\left(\ell^2+1\right) \iff \ln\left(\ell^2+1\right) = 0 \iff \ell^2+1 = 1 \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0$

5. **a.** On complète le script ci-dessous écrit en langage Python : afin qu'il

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
   n = 0
   u = 7
   while u > h :
      n = n + 1
      u = u - ln(u**2+1)
   return n
```

b. La calculatrice donne $u_{96} \approx 0{,}010\,03$ et $u_{97} \approx 0{,}009\,9$
Le programme Python renverra la valeur 97 ; à partir du 98^e les termes seront inférieurs à un centième.

Partie C : calcul intégral

1. f est croissante sur $[0~;~+\infty[$, donc, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0)$.
Or $f(0) = 0$ donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[0~;~+\infty[$.
2. Soit l'intégrale : $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
f étant positive sur $\mathbb{R}^+$ l'est sur l'intervalle $[2\,;\,4]$, donc I est égale (en unités d'aire) à l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 2$ et $x = 4$.
3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2~;~4]$, on a l'encadrement : $0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25$.
Sur l'intervalle $[2\,;\,4]$, l'intégration conserve l'ordre donc :

$$0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25 \Longrightarrow \int_2^4 (0{,}5x - 1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 (0{,}25x + 0{,}25)\,\mathrm{d}x$$
$$\Longrightarrow \left[\frac{x^2}{4} - x\right]_2^4 \leqslant I \leqslant \left[\frac{x^2}{8} + 0{,}25x\right]_2^4$$
$$\Longrightarrow 4 - 4 - (1 - 2) \leqslant I \leqslant 2 + 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$
$$\Longrightarrow 1 \leqslant I \leqslant 2$$

Éléments de la correction de l'exercice 10

Métropole 20 juin 2024

Partie A : exploitation du graphique.

1. On lit que B a pour coordonnées $(-1~;~-2)$, or la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par B, donc $f(-1) = f(x_{\mathrm{B}}) = y_{\mathrm{B}} = -2$.
On nous dit que la tangente T, tangente à $\mathscr{C}_f$ en B, d'abscisse -1, est aussi la droite (AB), dont le coefficient directeur est 1, donc $f'(-1) = 1$.

2. La fonction f n'est manifestement pas convexe sur son ensemble de définition, car la courbe $\mathscr{C}_f$ passe en dessous de sa tangente T pour les valeurs x inférieures à $-1{,}7$, environ. Si la fonction était convexe sur tout son ensemble de définition, elle serait au-dessus de n'importe quelle tangente, sur tout son ensemble de définition. Ici, on a l'impression que la fonction est d'abord concave, puis convexe, avec un point d'inflexion dont l'abscisse est aux alentours de $-1{,}4$.
3. De ce que l'on peut voir de $\mathscr{C}_f$, on ne voit qu'une seule solution à l'équation, qui est environ 0,1 (à 10^{-1} près).

Partie B : étude de la fonction f.

1. On a : $\lim\limits_{x\to-2} x^2+2x-1 = (-2)^2+2\times(-2)-1 = -1$, car $x \longmapsto x^2+2x-1$ est une fonction polynôme, continue sur $\mathbb{R}$ et donc notamment continue en -2.
   de plus : $\lim\limits_{x\to-2} (x+2) = 0$
   et donc, par composition : $\lim\limits_{x\to-2} \ln(x+2) = \lim\limits_{y\to0} \ln(y) = -\infty$
   finalement, par limite de la somme : $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = -\infty$.
   Graphiquement, cela signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale, d'équation $x=-2$.
2. *Remarque :* la justification de la dérivabilité de f, donnée ci-après, n'est généralement pas attendue.

   La fonction $x \longmapsto \ln(x+2)$ est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$, en tant que composée de $x \longmapsto x+2$ définie et dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$, où la fonction ln est définie et dérivable.
   f est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$, en tant que somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (une fonction polynôme et une fonction composée).
   $$\begin{aligned}\forall x \in]-2\,;\,+\infty[,\quad f'(x) &= 2x+2+0+\frac{1}{x+2}\\ &= \frac{(2x+2)(x+2)+1}{x+2}\\ &= \frac{2x^2+4x+2x+4+1}{x+2}\\ &= \frac{2x^2+6x+5}{x+2}.\end{aligned}$$
   On arrive bien à l'expression attendue pour la fonction dérivée f'.
3. Pour tout x réel strictement supérieur à -2, $x+2$ est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le signe de son numérateur. Ledit numérateur étant une expression polynomiale de degré 2 ayant un coefficient dominant (2) positif, cela signifie que les images seront positives, sauf entre d'éventuelles racines.
   Déterminons le discriminant du numérateur : $\Delta = 6^2-4\times2\times5 = 36-40 = -4 < 0$.
   Le trinôme n'a donc pas de racines réelles, et a donc des images strictement positives pour tout x réel.
   f' est donc une fonction à valeurs strictement positives sur $]-2\,;\,+\infty[$, et f est donc strictement croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$.
   On peut donc établir le tableau de variations suivant :

x	-2	$+\infty$
signe de $f'(x)$	||	$+$
variations de f	|| $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

4. La fonction f est continue (car dérivable) sur $]-2\ ;\ +\infty[$, de plus, elle est strictement croissante sur cet intervalle et enfin, 0 est une valeur intermédiaire entre $\lim\limits_{-2} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-2\ ;\ +\infty[$, que l'on notera α.

Avec une exploration à la calculatrice (éclairée par notre lecture graphique de la partie A), on trouve $0{,}115 < \alpha < 0{,}12$, donc une valeur approchée à 10^{-2} de α est 1,12.

5. Puisque f est strictement croissante sur $]-2\ ;\ +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} -2 < x < \alpha &\implies f(x) < f(\alpha) \\ &\implies f(x) < 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \alpha < x &\implies f(\alpha) < f(x) \\ &\implies 0 < f(x) \end{aligned}$$

f est donc à valeurs strictement négatives sur $]-2\ ;\ \alpha[$, nulle pour $x = \alpha$ et à valeurs strictement positives sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

6. Pour étudier la présence d'un point d'inflexion, on va étudier le signe de la dérivée seconde de f, notée f''.

f est deux fois dérivable sur $]-2\ ;\ +\infty[$, car sa dérivée première est une fraction rationnelle, et donc f' est dérivable partout où elle est définie.

$$\forall x \in]-2\ ;\ +\infty[,\quad f''(x) = \frac{(4x+6)\times(x+2) - (2x^2+6x+5)\times 1}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{4x^2+8x+6x+12-2x^2-6x-5}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}$$

Pour tout x réel strictement supérieur à -2, $(x+2)^2$ est une quantité strictement positive, donc le signe de $f''(x)$ est le signe de son numérateur, un polynôme de degré 2, dont le coefficient dominant est strictement positif, dont les images sont strictement positives, sauf entre ses deux éventuelles racines.

Le discriminant est : $\Delta = 8^2 - 4\times 2\times 7 = 8\times 8 - 8\times 7 = 8 > 0$.

Le trinôme a exactement deux racines réelles distinctes, et donc s'annule en changeant de signe deux fois, pour :

$$x_1 = \frac{-8-\sqrt{8}}{2\times 2} = \frac{-8-2\sqrt{2}}{4} = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
$$x_2 = \frac{-8+\sqrt{8}}{2\times 2} = \frac{-8+2\sqrt{2}}{4} = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La valeur x_1 est manifestement strictement inférieure à -2, et donc :

Sur $\left]-2\ ;\ -2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$, f'' est à valeurs strictement négatives, on a $f''\left(-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

et sur $\left]-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ +\infty\right[$, f'' est à valeurs strictement positives.

Ainsi, f est concave sur $\left]-2\ ;\ -2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et convexe sur $\left]-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ +\infty\right[$ et donc son unique point d'inflexion est le point d'abscisse $-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque : On a : $-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx -1{,}29$, ce qui n'est pas incohérent avec l'estimation graphique formulée en partie A dans ce corrigé.

Partie C : une distance minimale.

1. Le point J a pour coordonnées $(0\,;\,1)$ et M a pour coordonnées $\left(x\,;\,g(x)\right)$.
Comme on est dans un repère orthonormé, on a : $\mathrm{J}M=\sqrt{(x_M-x_\mathrm{J})^2+(y_M-y_\mathrm{J})^2}$
Donc, $\forall x\in]-2\,;\,+\infty[,\quad h(x)=\mathrm{J}M^2$
$$\begin{aligned}&=(x_M-x_\mathrm{J})^2+(y_M-y_\mathrm{J})^2\\&=(x-0)^2+\left(g(x)-1\right)^2\\&=x^2+\left[\ln(x+2)-1\right]^2.\end{aligned}$$
On arrive bien à l'expression attendue.

2. **a.** La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et la distance JM est nécessairement positive, en tant que distance.
Donc $\mathrm{J}M_{x_1}\leqslant \mathrm{J}M_{x_2}\iff \mathrm{J}M^2_{x_1}\leqslant \mathrm{J}M^2_{x_2}$.
La distance JM sera donc minimale pour la valeur x qui rend minimale le carré de cette distance, c'est-à-dire $h(x)$.
On sait que, pour tout x dans $]-2\,;\,+\infty[$, $\dfrac{2}{x+2}$ est strictement positif, donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$.
On peut donc établir le tableau suivant :

x	-2		α		$+\infty$
signe de $f(x)$	‖	$-$	0	$+$	
signe de $h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de h	‖	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	

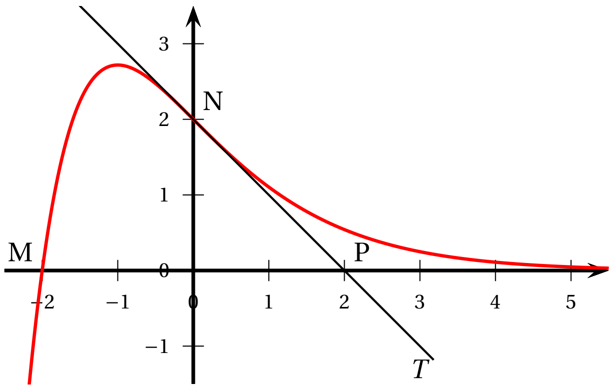
b. Comme h est décroissante sur $]-2\,;\,\alpha[$ et croissante sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est donc bien le nombre α, solution de l'équation $f(x)=0$, défini à la question **4.** de la **partie B**.

3. **a.** On sait que α est la solution de l'équation $f(x)=0$.
$$\begin{aligned}f(x)=0 &\iff x^2+2x-1+\ln(x+2)=0\\&\iff \ln(x+2)=1-2x-x^2\end{aligned}$$
Comme α est solution de cette équation, on en déduit bien :
$\ln(\alpha+2)=1-2\alpha-\alpha^2$.

b. La tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α a pour coefficient directeur : $g'(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+2}$.
La droite $(\mathrm{J}M_\alpha)$ a pour coefficient directeur :
$$\frac{y_{M_\alpha}-y_\mathrm{J}}{x_{M_\alpha}-x_\mathrm{J}}=\frac{g(\alpha)-1}{\alpha-0}=\frac{\ln(\alpha+2)-1}{\alpha}=\frac{1-2\alpha-\alpha^2-1}{\alpha}=\frac{\alpha(-2-\alpha)}{\alpha}=-2-\alpha.$$
Le produit de ces deux coefficients directeurs est donc : $\dfrac{1}{\alpha+2}\times(-2-\alpha)=-1.$
On en déduit dont que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite $(\mathrm{J}M_\alpha)$ sont perpendiculaires.
Remarque : on aurait aussi pu mobiliser des connaissances du programme de première et utiliser des vecteurs normaux ou des vecteurs directeurs de ces deux droites, et en calculer le produit scalaire (entre les deux vecteurs directeurs, ou entre les deux vecteurs normaux) ou vérifier la colinéarité (entre le vecteur directeur de l'une et le vecteur normal de l'autre), pour arriver à la même conclusion.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 11

Métropole 20 juin 2024 J2 (dévoilé)



Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

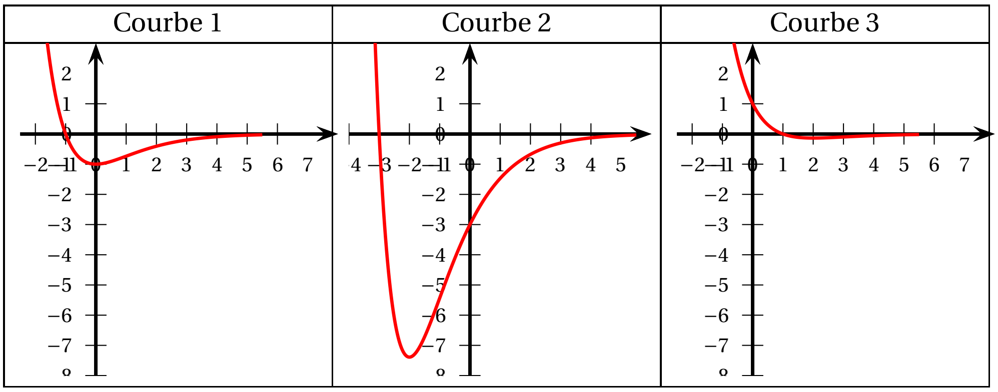
1. **a.** On lit $f(0) = 2$.

   b. Déterminer $f'(0)$. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la droite (NP) soit à $\dfrac{0-2}{2-0} = -1 = f'(0)$

2. Il semble que $f(-2) = 0$. $S = \{-2\}$.

3. Il semble que la fonction est convexe sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$: sur cet intervalle toutes les tangentes à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ sont sous cette courbe.

   Toujours graphiquement sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ les coefficients directeurs des tangentes à la courbe (-1 et 0 au voisinage de plus l'infini) sont croissants : autrement dit la fonction f" est croissante donc $f''(x) \geqslant 0$

4. 

   • On sait que $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$, donc une primitive sur le même intervalle est croissante ce qui élimine la courbe 3 ;

   • Si F est une primitive de f et est représentée par la courbe 1, alors $F'(0) = 0 = f(0) = -1$: ceci est faux donc la courbe 1 est éliminée.

   Il ne reste que la courbe 2.

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax+b)\,e^{\lambda x},$$

où a,b et λ sont des constantes réelles.

1. On a vu que $f(0) = 2 \iff b\,e^{\lambda\times 0} = 2 \iff b = 2$.
   Donc $f(x) = (ax+2)\,e^{\lambda x}$.
2. On a donc $f(x) = (ax+2)\,e^{\lambda x}$.
   On sait aussi que $f(-2) = 0 \iff (-2a+2)\,e^{-2\lambda} = 0$ et comme $e^{-2\lambda} \neq 0$ on a donc $-2a+2 = 0 \iff a = 1$.
   Donc $f(x) = (x+2)\,e^{\lambda x}$.
3. On a vu que $f'(0) = -1$
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = e^{\lambda x} + \lambda(x+2)\,e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(1+\lambda x+2\lambda)\,e^{\lambda x}$.
   Donc $f'(0) = -1 \iff 1+2\lambda = -1 \iff 2\lambda = -2 \iff \lambda = -1$.
   On a donc finalement $f(x) = (x+2)\,e^{-x}$.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\,e^{-x}.$$

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x+2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
2. Produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable et sur cet intervalle :
   $f'(x) = e^{-x} - (x+2)\,e^{-x} = e^{-x}(1-x-2) = (-x-1)\,e^{-x}$.
   On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$: le signe de $f('x)$ est donc celui de $-x-1$.
   • $-x-1 > 0 \iff -1 > x \iff x < -1$: sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[$ $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur cet intervalle ;
   • $-x-1 < 0 \iff -1 < x \iff x > -1$: sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante sur cet intervalle ;
   • $-x-1 = 0 \iff -1 = x, f'(1) = 0$; $f(-1) = (-1+2)\,e^{1} = e$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$. Il reste à calculer la liite en plus l'infini : comme $f(x) = x\,e^{-x} + 2\,e^{-x}$.
   Or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = 0$ (puissances comparées) et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\,e^{-x} = 0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. **a.** f' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $f''(x) = -e^{-x} + (x+1)\,e^{-x} = e^{-x}(x+1-1) = x\,e^{-x}$.
   Comme $e^{-x} > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de x, donc :
   - f est convexe sur $[0\,;\,+\infty[$;
   - f est concave sur $]-\infty\,;\,0]$;

   b. – Donc d'après le résultat précédent la courbe $\mathscr{C}_f$ a un seul point d'inflexion de coordonnées $(0;2)$.
4. $$I(t) = \int_{-2}^{t} (x+2)\,e^{-x}\,dx.$$

a. On pose $u(x) = x+2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, d'où
$u'(x) = 1$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
Toutes ces fonctions étant continues car dérivables on peut intégrer par parties :
$I(t) = [-(x+2)\mathrm{e}^{-x}]_{-2}^{t} + \displaystyle\int_{-2}^{t} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-(x+2)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{t} = \left[(-x-3)\mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{t} =$
$(-t-3)\mathrm{e}^{-t} + 1\mathrm{e}^{2} = \mathrm{e}^{2} - (t+3)\mathrm{e}^{-t}$.

b. f est positive sur l'intervalle $[-2~;~+\infty[$; on sait qu'alors l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = t$ est égale à l'intégrale $I(t)$.
Or quand $t \to +\infty$, la surface n'est pas limitée à droite alors que l'intégrale l'est elle puisqu'on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} (t+3)\mathrm{e}^{-t} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} I(t) = \mathrm{e}^{2}$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 12

Polynésie 19 juin 2024

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{4}{5-u_n}$.

Partie A

1. On complète la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```python
def suite(n):
    u = 3
    for i in range(n) :
        u = 4/(5 - u)
    return u
```

2. À la première boucle on trouve $u_1 = \dfrac{4}{5-3} = \dfrac{4}{2} = 2$.

   À la seconde on trouve $u_2 = \dfrac{4}{5-2} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}333$.

3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

Les affichages successifs sont des approximations de u_2, u_5, u_{10}, u_{20} et leur examen laisse à conjecturer que la la limite de la suite est égale à 1.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ par : $f(x) = \dfrac{4}{5-x}$.
Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. La fonction f quotient de fonctions dérivables sur $]-\infty\,;\,5[$, de dénominateur non nul puisque $x \neq 5$, est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{0-4\times(-1)}{(5-x)^2} = \dfrac{4}{(5-x)^2}$
Quotient de deux carrés cette dérivée est strictement positive, donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,5[$.

2. Soit la propriété : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.
Initialisation : on a vu que $u_1 = 2$ et on a $u_0 = 3$, donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 4$.
La propriété est vraie au rang 0.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$: ces nombres étant rangés dans l'ordre croissant leur images par f fonction strictement croissante pour des réels plus petits que 4, sont rangées dans le même ordre, soit $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(4)$.
Comme $f(1) = \dfrac{4}{5-1} = 1$ et $f(4) = \dfrac{4}{5-4} = 4$, on obtient $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.

3. **a.** Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
On a pour $x < 5$:
$f(x) = x \iff \dfrac{4}{5-x} = x \iff 4 = x(5-x) \iff 4 = 5x - x^2 \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$

b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$, revient d'après la question précédente à résoudre l'équation du second degré $x^2 - 5x + 4 = 0$.
Les racines de cette équation 1 et 4 sont évidentes (sinon on calcule le discriminant), donc :
$$x^2-5x+4=0 \iff (x-1)(x-4)=0 \iff \left[\begin{array}{ccc} x-1 & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ x-4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ & \text{ou} & \\ x & = & 4 \end{array}\right.$$
La solution 4 est vraisemblable puisque $x \leqslant 4$, on a donc $S = \{1\,;\,4\}$.

4. L'encadrement démontré par récurrence montre deux choses : pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $u_{n+1} \leqslant u_n$ signifie que la suite (u_n) est décroissante ;
- $1 \leqslant u_n$ signifie que la suite (u_n) est minorée par 1.

La suite (u_n) décroissante et minorée par 1 est donc convergente vers un réel $\ell \geqslant 1$.
Par continuité de la fonction trinôme la limite ℓ est solution de l'équation précédente et cette solution est 1 ou 4, mais on a vu que $u_0 = 3$ et la suite étant décroissante la solution 4 est à rejeter..
Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
La suite (u_n) converge vers 1.

5. Avec $u_0 = 4$, on a $u_1 = \dfrac{4}{5-4} = \dfrac{4}{1} = 4$ et donc en répétant le calcul $u_n = 4$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
Dans ce cas la suite est constante : tous ses termes sont égaux à 4, elle converge vers 4.

Éléments de la correction de l'exercice 13

Polynésie 21 juin 2024

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel} \quad n,\; u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. **a.**
   - $u_1 = 8 - \ln 2 \approx 7{,}31$;
   - $u_2 = 8 - \ln 2 \ln 8 - \ln 24 - \approx 6{,}70$.

   b. `mystere(10)` donne la somme des premiers termes de la suite de u_0 à u_9, soit
   $u_0 + u_1 + \ldots + u_9 = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

   c. Il suffit en ligne 7 de remplacer S par (S /k)

2. $$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

   La fonction f somme de fonctions dérivables sur $[0 ;\ +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle en posant $u(x) = \dfrac{x}{4}$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{4}$,
   $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{\frac{x}{4}} = 1 - \dfrac{1}{4} \times 4\dfrac{1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$
   Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$:
   - si $0 < x < 1$, alors $x - 1 < 0$: la fonction f est décroissante sur $]0 ;\ 1[$;
   - si $x > 1$, alors $x - 1 > 0$: la fonction f est croissante sur $-1 ;\ +\infty[$
   - si $x = 1$, alors $f'(1) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln\dfrac{1}{4} = 1 - (-\ln 4) = 1 + \ln 4$ est le minimum de la fonction f sur $[0 ;\ +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. **a.** *Initialisation* : on a vu que $u_1 \approx 7{,}3$ et comme $u_0 = 8$, on a donc :

   $$1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$$

   l'encadrement est vrai au rang 0.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   On sait que sur l'intervalle $[1 ;\ +\infty[$ la fonction f est croissante, donc on a

$f(1) \leqslant f\left(u_{n+1}\right) \leqslant f\left(u_n\right)$.
Or $f(1) = 1 - \ln \dfrac{1}{4} \approx 2{,}39$, donc $f(1) \geqslant 1$ et on a
$1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$ il l'est encore au rang suivant : d'après le principe de récurrence :
pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

b. L'encadrement précédent montre que : pour tout naturel n
- $u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante;
- $1 \leqslant u_n$: la suite $\left(u_n\right)$ est minorée par 1.

On sait qu'alors la suite $\left(u_n\right)$ converge vers une limite $\ell \geqslant 1$

c. $f(x) = x \iff x - \ln\left(\dfrac{x}{4}\right) = x \iff 0 = \ln\left(\dfrac{x}{4}\right) \iff \dfrac{x}{4} = 1 \iff x = 4$.

d. Par continuité de la fonction f (car elle est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$), la relation $u_{n+1} = u_n - \ln\left(\dfrac{u_n}{4}\right)$, donne puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$:
$\ell = \ell - \ln\left(\dfrac{\ell}{4}\right)$: d'après la question précédente $\ell = 4$.

Éléments de la correction de l'exercice 14

Métropole Antilles-Guyane 11 septembre 2024

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).

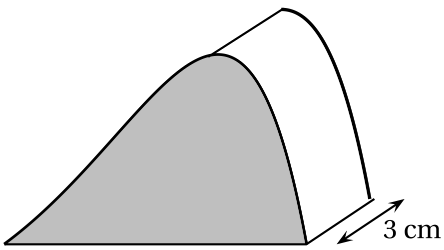


Figure 1

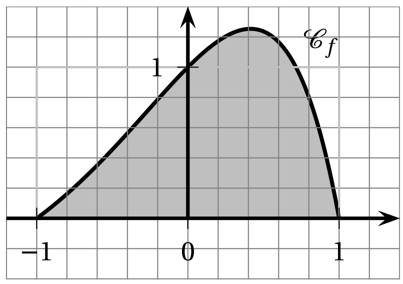


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1\,;\,1]$ par : $f(x) = \left(1 - x^2\right) \mathrm{e}^{x}$.

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. **a.** Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{x} > 0$, et si $x \in [-1\,;\,1]$, on a $1 - x^2 \geqslant 0$.
Donc pour tout x de $[-1\,;\,1]$, on a $f(x) \geqslant 0$.

b. Soit $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose $u(x) = 1 - x^2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{x}$. Donc $u'(x) = -2x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x}$.

Par intégration par parties : $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

Donc $I = \left[(1-x^2)\,\mathrm{e}^{x}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(-2x)\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 0 + 2\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

2. Le volume $\mathcal{V}$ de chocolat, en cm³, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par : $\mathcal{V} = 3 \times S$ où S est l'aire, en cm², de la surface colorée (**Figure 2**).

On calcule $\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$ par une intégration par parties.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{x}$. Donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x}$.

$$\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \left[x\,\mathrm{e}^{x}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 1 \times \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \left[x\,\mathrm{e}^{x}\right]_{-1}^{1} - \left[\mathrm{e}^{x}\right]_{-1}^{1} = \left[1\,\mathrm{e}^{1} - (-1)\,\mathrm{e}^{-1}\right] - \left[\mathrm{e}^{1} - \mathrm{e}^{-1}\right]$$
$$= \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} = 2\,\mathrm{e}^{-1}$$

Donc $S = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 4\,\mathrm{e}^{-1}$.

$\mathcal{V} = 3 \times S = 12\,\mathrm{e}^{-1}$ donc $\mathcal{V} \approx 4{,}4$ cm^3.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0{,}01\ ;\ +\infty[$ par : $B(q) = 8q^2[2 - 3\ln q] - 3$.

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0{,}01\ ;\ +\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1. **a.**
- $\lim\limits_{q \to +\infty} \ln q = +\infty$ donc $\lim\limits_{q \to +\infty} 2 - 3\ln q = -\infty$
- $\lim\limits_{q \to +\infty} q^2 = +\infty$
- Donc $\lim\limits_{q \to +\infty} 8q^2[2 - 3\ln(q)] = -\infty$ et donc $\lim\limits_{q \to +\infty} 8q^2[2 - 3\ln(q)] - 3 = -\infty$

On a donc démontré que $\lim\limits_{q \to +\infty} B(q) = -\infty$.

b. Pour tout $q \geqslant 0{,}01$: $B'(q) = 8 \times 2q\left(2 - 3\ln q\right) + 8q^2\left(0 - \dfrac{3}{q}\right) - 0$

$$= 8q\left(4 - 6\ln q\right) + 8q(-3) = 8q\left(1 - 6\ln q\right)$$

c. $q > 0$ donc $B'(q)$ est du signe de $1 - 6\ln q$.

$1 - 6\ln q > 0 \iff 1 > 6\ln q \iff \dfrac{1}{6} > \ln q \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{6}} > q$

$\mathrm{e}^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}2$: $B\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}\right) \approx 13{,}7$; $B(0{,}01) \approx -3$

On dresse le tableau de variation complet de la fonction B.

q	$0{,}01$		$\mathrm{e}^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}2$		$+\infty$
$B'(q)$		$+$	0	$-$	
$B(q)$	≈ -3	$\nearrow$	$\approx 13{,}7$	$\searrow$	$-\infty$

d. Le maximum de la fonction B est $B\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}\right) \approx 13{,}7$, donc le bénéfice maximum que peut espérer l'artisan est de 137 €.

2. **a.** Sur l'intervalle $[1{,}2\,;\,+\infty[$:

- La fonction B est dérivable, donc continue, et strictement décroissante.
- Elle décroît de 13,7 à $-\infty$.

Donc, d'après le corollaire des valeurs intermédiaires, l'équation $B(q) = 10$ admet une solution unique sur l'intervalle $[1{,}2\,;\,+\infty[$. On l'appelle β.

$$\left.\begin{array}{l} B(1) = 13 > 10 \\ B(2 \approx -5{,}5 < 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta \in [1\,;\,2] \qquad \left.\begin{array}{l} B(1{,}5) \approx 11{,}1 > 10 \\ B(1{,}6 \approx 9{,}1 < 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta \in [1{,}5\,;\,1{,}6]$$

$$\left.\begin{array}{l} B(1{,}55) \approx 10{,}17 > 10 \\ B(1{,}56 \approx 9{,}97 < 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta \in [1{,}55\,;\,1{,}56]$$

$$\left.\begin{array}{l} B(1{,}558) \approx 10{,}007 > 10 \\ B(1{,}559 \approx 9{,}986 < 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta \in [1{,}558\,;\,1{,}559]$$

Donc β a pour valeur approchée 1,558 à 10^{-3} près.

b. On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0{,}01\,;\,1{,}2[$. On donne $\alpha \approx 0{,}757$, et on complète le tableau de variation de B.

q	0,01	α	1,2	β	$+\infty$
$B(q)$	-3	10	13,7	10	$-\infty$

Pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros, le nombre minimal de bonbons au chocolat à vendre correspond à α centaines, soit environ 76, et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre correspond à β centaines, soit environ 156.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 15

Amérique du Sud 21 novembre 2024

PARTIE A

On considère l'équation différentielle (E) : $\quad y' + \dfrac{1}{4}y = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$,
d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ax\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

La fonction linéaire u définie par $u(x) = -\dfrac{1}{4}x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $u'(x) = -\dfrac{1}{4}$.

La fonction composée $g(u(x)) = ax\,\mathrm{e}^{u(x)}$ est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle, $g'(u) = a\,\mathrm{e}^{u(x)} + axu' \times \mathrm{e}^{u(x)} = a\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + ax \times \left(-\dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\left(a - \dfrac{ax}{4}\right)$.

Or $g'(x)+\dfrac{1}{4}g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\left(a-\dfrac{ax}{4}\right)+\dfrac{1}{4}\times ax\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\left(a-\dfrac{ax}{4}+\dfrac{ax}{4}\right) = a\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.
Donc g est solution de l'équation différentielle sur $[0\,;\,+\infty[$, si sur cet intervalle :
$a\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \iff a = 20$, car quel que soit x réel, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \neq 0$.
La fonction $g : x \longmapsto 20x\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ est une solution particulière de l'équation (E).

2. On considère l'équation différentielle (E') : $\quad y'+\dfrac{1}{4}y = 0$,
d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
L'équation (E') peut s'écrire $y' = -\dfrac{1}{4}y$ et on sait que les solutions de cette équation (E') sont les fonctions f définies par :
$f(x) = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$, avec $K\in\mathbb{R}$.
3. Les solutions f de l'équation (E) sont telles que pour $x\in[0\,;\,+\infty[$,
$f'(x)+\dfrac{1}{4}f(x) = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ ou d'après la question 1. :
$f'(x)+\dfrac{1}{4}f(x) = g'(x)+\dfrac{1}{4}g(x) \iff f'(x)-g'(x) = \dfrac{1}{4}[f(x)-g(x)]$ soit par linéarité de la dérivation :
$(f-g)'(x)+\dfrac{1}{4}[(f-g](x) = 0$: ceci signifie que la fonction $f-g$ est solution de (E') c'est-à)dire que
$f(x)-g(x) = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \iff f(x) = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}+g(x)$ ou enfin $f(x) = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}+20x\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \iff$
$f(x) = (20x+K)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$, avec $K\in\mathbb{R}$.
Les solutions de (E) sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ sont donc les fonctions f définies par :
$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}(20x+K)$, avec $K\in\mathbb{R}$.
4. On a $f(0) = 8 \iff (20\times 0+K)\mathrm{e}^{0} = 8 \iff K = 8$, donc :
$f(x) = (20x+8)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = 4(5x+2)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (20x+8)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

1. **a.** La fonction f est la fonction trouvée à la fin de la partie A : elle est donc dérivable et vérifie l'équation (E), soit
$f'(x)+\dfrac{1}{4}f(x) = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ donc
$f'(x) = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}-\dfrac{1}{4}\times 4(5x+2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}(20-5x-2) = (18-5x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

b. Comme quel que soit x, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $18-5x$:
- $18-5x > 0 \iff \dfrac{18}{5} > x$: sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{18}{5}\right]$, $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante;
- $18-5x < 0 \iff \dfrac{18}{5} < x$: sur l'intervalle $\left[\dfrac{18}{5}\,;\,+\infty\right]$, $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante;

$f'\left(\dfrac{18}{5}\right) = 0$, donc $f\left(\dfrac{18}{5}\right)$ est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
On a $f\left(\dfrac{18}{5}\right) = (72+8)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times\frac{18}{5}} = 80\mathrm{e}^{-\frac{9}{10}} \approx 32{,}53$.
On a vu à la partie A que $f(0) = 8$, et on admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
D'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{18}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	8	$\nearrow$	$80\,\mathrm{e}^{-\frac{9}{10}}$	$\searrow$	0

2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

a. On a $f(14) = 288\,\mathrm{e}^{-3,5} \approx 8,7$ et $f(15) = 300\,\mathrm{e}^{-3.75} \approx 7,2$.
Sur l'intervalle $[14;\ 15]$, la fonction f est continue car dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc sur $[14; 15]$ et elle est strictement décroissante ; comme $8 \in [f(15)\ ;\ f(14)]$, il existe d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires un réel unique α telle que $f(\alpha) = 8$.

b. On complète le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction `solution_equation` écrite en langage Python

a	14	14	14,25	14,375	14,4375
b	15	14,5	14,5	14,5	14,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	14,5	14,25	14,375	14,4375	
Condition $f(m) > 8$	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	

c. L'objectif de la fonction `solution_equation` est de déterminer, par dichotomie, un encadrement d'amplitude 0,1 de la solution de l'équation $f(x) = 8$ dans l'intervalle $[14\ ; 15]$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 16

Amérique du Sud 22 novembre 2024

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 4\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Limites :

- : en $-\infty$: de $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - 4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ on en déduit par produit de limites que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;
- : en $+\infty$ $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} - 4\,\mathrm{e}^{-x}$: on sait que

$\lim\limits_{x\to+\infty} 4\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ (puissances comparées), donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Sur cet intervalle :
$f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x} + \left(x^2-4\right) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(2x - x^2 + 4) = \left(-x^2 + 2x + 4\right)\,\mathrm{e}^{-x}$.
3. On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $-x^2 + 2x + 4$.
On a $-x^2 + 2x + 4 = -\left(x^2 - 2x - 4\right) = -\left[(x-1)^2 - 1 - 4\right] = -\left[(x-1)^2 - 5\right] =$
$-x^2+2x+4 = -\left(x - 1 + \sqrt{5}\right)\left(x - 1 - \sqrt{5}\right)$: ce trinôme a deux racines $1-\sqrt{5}$ et $1+\sqrt{5}$.
On sait que le trinôme a le signe de $a = -1$, donc est négatif sauf sur l'intervalle $\left[1-\sqrt{5}\ ;\ 1+\sqrt{5}\right]$ où il est positif.
On a donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		0		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			$+$			$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\approx -8{,}5$	$\nearrow$	-4	$\nearrow$	$\approx 0{,}25$	$\searrow$	0

On a $f\left(1-\sqrt{5}\right) = \left(2 - 2\sqrt{5}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}-1} \approx -8{,}5$;
$f\left(1+\sqrt{5}\right) = \left(2 + 2\sqrt{5}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}-+1} \approx 0{,}25$;
$f(0) = -4$

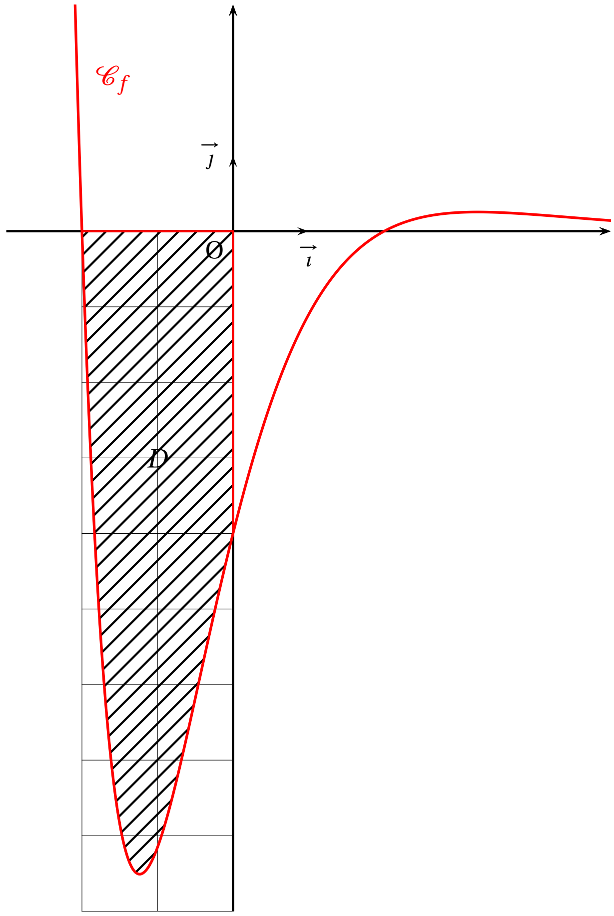
Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. $I_0 = \displaystyle\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{0} = -\mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{2} = \mathrm{e}^{2} - 1$.
2. On calcule I_n en faisant une intégration par partie : on a
$\left\{\begin{array}{lllll} u(x) & = & \mathrm{e}^{-x} & u'(x) & = & -\mathrm{e}^{-x} \\ v'(x) & = & x^n & v(x) & = & \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{array}\right.$ on a
$I_n = \left[\mathrm{e}^{-x} \times \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{-2}^{0} - \displaystyle\int_{-2}^{0} -\mathrm{e}^{-x}x^n = 0 - \dfrac{(-2)^{n+1}\mathrm{e}^{2}}{n+1} + \dfrac{I_{n+1}}{n+1} \iff$
$(n+1)I_n = -(-2)^{n+1}\mathrm{e}^{2} + I_{n+1} \iff I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n$.
3. L'égalité précédente donne avec :
   - $n = 0$: $I_1 = (-2)^1\mathrm{e}^2 + I_0 = -2\,\mathrm{e}^{2} + \mathrm{e}^{2} - 1 = -\mathrm{e}^{2} - 1$,
   - $n = 1$: $I_2 = (-2)^2\mathrm{e}^2 + I_1 = 4\mathrm{e}^2 - 2\,\mathrm{e}^{2} - 2 = 2\mathrm{e}^2 - 2$.

Partie 3

1. f a le signe du trinôme $x^2 - 4$ car quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$.
Comme $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ ce trinôme a le signe de $a = 1$ donc est positif, sauf sur l'intervalle borné par les deux racines soit sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$ où $f'x) < 0$.
Donc sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$, $f(x) < 0$ et sur $]-\infty\ ;\ -2[\cup]2\ ;\ +\infty[$, $f(x) > 0$.
2. $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -2 t on vient de voir que sur l'intervalle $]-2\ ,\ 0[$, $f(x) < 0$, donc l'aire S du domaine D est égale à l'opposé de l'intégrale de la fonction d de $x = -2$ à $x = 0$.
aire(D) $= -\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{0}\left(x^2-4\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{0} x^2\,\mathrm{e}^{-x} + 4\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^{-x} = -I_2 +$ $4I_0 = 4\left(-\mathrm{e}^{2} - 1\right) - \left(2\,\mathrm{e}^{2} - 2\right) = 2\,\mathrm{e}^{2} - 2 \approx 12{,}78$ (ce que l'on peut conforter avec la figure).


$\mathscr{C}_f$
$\vec{j}$
O
$\vec{\imath}$
D